3.5　いろいろな数列(1)

(1) いろいろな数列の和

　これまでに学んだ数列以外にも，いろいろな工夫をすることによって，その和を求められることがあります。

例1

次の計算をせよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+k}$

解説

(1) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

注 $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ の変形を**部分分数分解**といいます。

この部分分数分解は，

$$\frac{1}{k(k+1)}=a\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$ とおいて

両辺 $k(k+1)$ をかけて

$1=a\{(k+1)-k\}$

$\therefore\ a=1$

よって，$\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

というようにして行います。

(2) $$\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots\cdots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2n}{n+1}$$

例2

(1) 次の和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(\ k+2\ )}$ を求めよ.

解説

(1) 求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$$

例3

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ の値を求めよ。

解説

$\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=a\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$ とおくと,

両辺 $k(k+1)(k+2)$ をかけて

$$1=2a \quad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

よって

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3}}-\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3\cdot 4}}-\cancel{\frac{1}{4\cdot 5}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{20\cdot 21}}-\frac{1}{21\cdot 22}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{462}\right)=\frac{{}^{ア}115}{{}^{イ}462}$$

例4

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定めるとき，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

解説

$\dfrac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{a}{n(n+1)}+\dfrac{b}{(n+1)(n+2)}$ とおく

両辺 $n(n+1)(n+2)$ をかけて

$$4n+3=a(n+2)+bn$$

$$4n+3=(a+b)n+2a$$

これが任意の n で成り立つとき，

$$a+b=4, 2a=3 \quad \therefore a=\frac{3}{2}, b=\frac{5}{2}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{5}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{n}{2(n+2)}$$

$$=\frac{6n(n+2)+5n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(11n+17)}{4(n+1)(n+2)}$$

別解

$$a_n=\frac{4n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}+\frac{3}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

と変形して求めてもよい。

例5

(1) 数列 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},\ \cdots\cdots$ において，初項から第 8 項までの和 S は $S=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，$n=$ ${}^{イ}\boxed{}$ のとき，初項から第 n 項までの和が 14 となる.

(2) $S=\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+\ \cdots\cdots\ +\dfrac{1}{\sqrt{45}+\sqrt{49}}$ とすると，S の値は $\boxed{}$ である。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$ の値は $\boxed{}$ である。

(解説)

(1) この数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$$

よって

$$S=\sum_{k=1}^{8}a_k=(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+\ \cdots\ +(-\sqrt{8}+\sqrt{9})$$
$$=-1+3=2$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=14$ のとき

$$-1+\sqrt{n+1}=14$$
$$\sqrt{n+1}=15 \qquad n+1=225 \qquad \therefore\ n=224$$

(2) $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1}}=\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{4}(\sqrt{4k+1}-\sqrt{4k-3})$

$$=\frac{1}{4}\{(\cancel{\sqrt{5}}-1)+(\cancel{\sqrt{9}}-\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{\sqrt{13}}-\cancel{\sqrt{9}})+\ \cdots\ +(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{45}})\}=\frac{3}{2}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$$=\frac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-1)+(\cancel{\sqrt{4}}-\sqrt{2})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})$$
$$+\cdots+(\cancel{\sqrt{48}}-\cancel{\sqrt{46}})+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{47}})+(\sqrt{50}-\cancel{\sqrt{48}})\}$$

$$=\frac{1}{2}(5\sqrt{2}+7-\sqrt{2}-1)=3+2\sqrt{2}$$

例6

$\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\log_{10}\frac{k}{k+1}$ を求めよ。

解説

$$\sum_{k=1}^{99}\log_{10}\frac{k}{k+1}=\sum_{k=1}^{99}\{\log_{10}k-\log_{10}(k+1)\}$$

$$=(\log_{10}1-\cancel{\log_{10}2})+(\cancel{\log_{10}2}-\cancel{\log_{10}3})+\cdots+(\cancel{\log_{10}99}-\log_{10}100)$$

$$=-\log_{10}100=-2$$

別解

$$\sum_{k=1}^{99}\log_{10}\frac{k}{k+1}=\log_{10}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}=\log_{10}\frac{1}{100}=-2$$

例7

(1)　数列 $\{a_k\}$ の第 k 項が $a_k=\log_{10}\dfrac{k+2}{k}$ であるとき，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　(1) の S_n が初めて 2 を超えるときの n の値を求めよ．

解説

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_{10}\frac{k+2}{k}=\log_{10}\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+2}{n}$

$$=\log_{10}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(2) $\log_{10}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}>2$

$\therefore\ \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}>100$　　$\therefore\ (n+1)(n+2)>200$

$n=13$ のとき，(左辺)$=14\cdot15=210$

$n=12$ のとき，(左辺)$=13\cdot14=182$ より

$n=13$

例8

(1)　加法定理を用いて，次の積を差に変える公式を証明せよ。

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

(2)　積 $\cos kx\sin\dfrac{x}{2}$ を差に変える公式を用いて，自然数 n に対して，

次の等式を証明せよ。ただし，$\sin\dfrac{x}{2}\fallingdotseq 0$ とする。

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

(3)　次の値を求めよ。ただし，角度はラジアン単位である。

$$\sum_{k=1}^{10}\cos k\frac{\pi}{3}$$

(解説)

(1) 加法定理より

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ \cdots①$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ \cdots②$$

①－②より

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

(2) (1)より

$$\cos kx\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right\}$$

$S=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ として

両辺に $2\sin\dfrac{x}{2}$ をかけると

$$\left(2\sin\frac{x}{2}\right)S=\sin\frac{x}{2}+2\cos x\sin\frac{x}{2}+2\cos 2x\sin\frac{x}{2}+\cdots+2\cos nx\sin\frac{x}{2}$$

よって

$$\left(2\sin\frac{x}{2}\right)S=\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)$$

$$+\cdots+\left(\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{2n-1}{2}x\right)$$

$$=\sin\frac{2n+1}{2}x=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

$2\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ より

$$S=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\text{，すなわち }\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

(3) (2) において，$n=10$，$x=\dfrac{\pi}{3}$ とすると

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{10}\cos k\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\left(\dfrac{21}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\sin\dfrac{\pi}{6}}=\frac{\sin\dfrac{7}{2}\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{6}}=\frac{\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\pi\right)}{2\cdot\dfrac{1}{2}}$$

$$=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\cos k\frac{\pi}{3}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

例9

$a_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ とする．数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$$

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

よって

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

次のような，等差数列×等比数列となるような数列の和も工夫することによって求めることができます。

例10
(1) 和 $\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$ を求めよ。 (2) 次の和を求めよ。 $4+7\cdot4+10\cdot4^2+\cdots\cdots+(3n+1)\cdot4^{n-1}$ (3) 次の計算をせよ。 $1+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{16}+\cdots\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\cdots\cdots+\frac{21}{2^{20}}$

解説

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\,2^k$ とおくと

$S_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n2^n$ …①

$2S_n=\quad 1\cdot2^2+2\cdot2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n2^{n+1}$ …②

①−②より

$-S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n2^{n+1}$

$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$

$\therefore S_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$，すなわち $\sum_{k=1}^{n} k\,2^k=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

(2) 求める和を S とすると

$S=4+7\cdot4+10\cdot4^2+\cdots+(3n+1)\cdot4^{n-1}$ …①

$4S=\quad 4\cdot4+\ \cdot7\cdot4^2+\cdots+(3n-2)\cdot4^{n-1}+(3n+1)\cdot4^n$ …②

①−②より

$-3S=4+3(4+4^2+\cdots+4^{n-1})-(3n+1)\cdot4^n$

$=4+3\cdot\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(3n+1)\cdot4^n$

$=4+4^n-4-(3n+1)\cdot4^n=-3n\cdot4^n$

$\therefore S=n\cdot4^n$，すなわち $4+7\cdot4+10\cdot4^2+\cdots+(3n+1)\cdot4^{n-1}=n\cdot4^n$

(3) 与えられた和を S とすると

$$S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots+\frac{21}{2^{20}} \cdots ①$$

$$\frac{1}{2}S=\quad+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{20}{2^{20}}+\frac{21}{2^{21}} \cdots ②$$

①−②より

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{19}}+\frac{1}{2^{20}}-\frac{21}{2^{21}}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{21}{2^{21}}=2\left(1-\frac{1}{2^{21}}\right)-\frac{21}{2^{21}}=2-\frac{23}{2^{21}}$$

$$\therefore S=4-\frac{23}{2^{20}}$$

例11

(1)　$S_n=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ を求めよ．

(2)　初項 1，公差 2 の等差数列の第 k 項を x_k とし，初項 1，公比 2 の等比数列の第 k 項を y_k とする．このとき，$T_n=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ を求めよ．

(解説)

(1) $x=1$ のとき

$$S_n=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$x \fallingdotseq 1$ のとき

$$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1} \cdots ①$$

$$xS_n=\quad x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \cdots ②$$

①−②より

$$S_n-xS_n=1+x+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$$(1-x)S_n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore S_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

(2) $x_k=2k-1,\ y_k=2^{k-1}$

(1)より

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{k-1}=2\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$$
$$=2\cdot\frac{1-(n+1)2^n+n\cdot 2^{n+1}}{(1-2)^2}-\frac{1-2^n}{1-2}=2^n(2n-3)+3$$

別解

$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{k-1}$ より

T_n-2T_n を作り，等比数列を作って求めることもできます。

例12

次の数列に関し，下の問いに答えよ．

$*\ S_n=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}$

$*\ P_n=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+n\cdot 2^{n-1}$

$*\ Q_n=1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$

$*\ R_n=1+2^2\cdot 2+3^2\cdot 2^2+\cdots\cdots+n^2\cdot 2^{n-1}$

(1)　$S_n=\left(^{ア}\boxed{}\right)^n+{}^{イ}\boxed{}$ である．

(2)　$P_n=n\left(^{ウ}\boxed{}\right)^n+{}^{エ}\boxed{}S_n$ である．

(3)　$Q_n={}^{オ}\boxed{}P_n+{}^{カ}\boxed{}S_n$ である．

(4)　$R_n=n^2\left(^{キ}\boxed{}\right)^n+{}^{ク}\boxed{}Q_n$ である．

(5)　以上のことから，

$R_n=\left(n^2+{}^{ケ}\boxed{}n+{}^{コ}\boxed{}\right)\left(^{サ}\boxed{}\right)^n+{}^{シ}\boxed{}$ を得る．

解説

(1) $S_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

(2) $P_n=1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1}\cdots①$

$2P_n=\quad 1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n\cdots②$

①−②より

$-P_n=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$

$-P_n=S_n-n\cdot 2^n \qquad \therefore\ P_n=n\cdot 2^n-S_n$

(3) $Q_n=1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\ \cdots\ +(2n-1)\cdot 2^{n-1}$ …③

$2Q_n=\qquad 1\cdot 2+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\ \cdots\ +(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n$ …④

③−④より

$-Q_n=1+2\cdot 2+2\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\ \cdots\ +2\cdot 2^{n-1}-(2n-1)\cdot 2^n$

$-Q_n=2S_n-1-(2n-1)\cdot 2^n$

$-Q_n=-2(n\cdot 2^n-S_n)+2^n-1$

$-Q_n=-2P_n+S_n \qquad \therefore\ Q_n=2P_n-S_n$

(4) $R_n=1+2^2\cdot 2+3^2\cdot 2^2+4^2\cdot 2^3+\ \cdots\ +n^2\cdot 2^{n-1}$ …⑤

$2R_n=\qquad 1\cdot 2+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+\ \cdots\ +(n-1)^2\cdot 2^{n-1}+n^2\cdot 2^n$ …⑥

⑤−⑥より

$-R_n=1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\ \cdots\ +(2n-1)\cdot 2^{n-1}-n^2\cdot 2^n$

$-R_n=Q_n-n^2\cdot 2^n \qquad \therefore\ R_n=n^2\cdot 2^n-Q_n$

(5) $R_n=n^2\cdot 2^n-Q_n=n^2\cdot 2^n-(2P_n-S_n)$

$=n^2\cdot 2^n-\{2(n\cdot 2^n-S_n)-S_n\}$

$=n^2\cdot 2^n-n\cdot 2^{n+1}+3S_n$

$=(n^2-2n)\cdot 2^n+3(2^n-1)$

$=(n^2-2n+3)\cdot 2^n-3$

確認問題1

(1)　2以上の整数 n に対し

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}$$

を求めよ.

(2)　任意の正の整数 n に対し

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$$

が成り立つことを示せ.

解説

(1) $\displaystyle \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}$$

(2) $\displaystyle \frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{n^3-n}>\frac{1}{n^3}$（$n=2, 3, \cdots$）より

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}$$

$$<\frac{1}{1^3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

$$=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

よって，成り立つ

確認問題2

(1)　自然数 n に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

(2)　次の不等式が成り立つことを示せ.

$$18<\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}<19$$

(解説)

(1) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$,

$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ より

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$ (分子の有理化)

(2) (1)より

$$2\sum_{n=1}^{100}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}2\sum_{n=1}^{100}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})&=2\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{101}-\sqrt{100})\}\\&=2(\sqrt{101}-1)\\&>2(10-1)=18\end{aligned}$$

よって, $18<\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}$

また, $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=2}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}+1$

(1)より

$\displaystyle\sum_{n=2}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sum_{n=2}^{100}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}2\sum_{n=2}^{100}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})&=2\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\}\\&=2(10-1)=18\end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}<18+1=19$

したがって, $18<\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}<19$

確認問題3

自然数のうち，2 と 8 がどの桁にも現れないものを考え，それらを小さい方から順に並べた数列

1，3，4，5，6，7，9，10，11，13，14，15，16，17，19，30，31，33，……

を $\{a_n\}$ とする。いま，自然数 m に対し，数列 $\{a_n\}$ の中にある m 桁の整数の個数を $f(m)$ とする。例えば $f(1)=7$ である。

(1)　$f(2)$，$f(3)$ を求めよ。

(2)　自然数 m に対し，$f(m)$ を求めよ。

(3)　自然数 m に対し，数列 $\{a_n\}$ の中にある m 桁の整数の逆数の総和は $\dfrac{f(m)}{10^{m-1}}$ より小さいことを示せ。

(4)　すべての自然数 n に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<35$ が成り立つことを示せ。

解説

(1) $f(2)=7\cdot 8=56$, $f(3)=7\cdot 8\cdot 8=448$

(2) $f(m)=7\cdot 8^{m-1}$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の中にある m 桁の整数を，小さい順に b_i ($i=1, 2, \cdots, f(m)$) とおくと

$10^{m-1}\leqq b_i<10^m$ より，$\dfrac{1}{b_i}\leqq\dfrac{1}{10^{m-1}}$ ($i=1, 2, \cdots, f(m)$)

よって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{f(m)}\frac{1}{b_i}<\sum_{i=1}^{f(m)}\frac{1}{10^{m-1}}=\frac{f(m)}{10^{m-1}}$

(4) a_n が l 桁の整数であるとする

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leqq\sum_{m=1}^{l}\frac{f(m)}{10^{m-1}}=\sum_{m=1}^{l}\frac{7\cdot 8^{m-1}}{10^{m-1}}=7\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{4}{5}\right)^{m-1}$$

$$=7\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{l}}{1-\frac{4}{5}}=35\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{l}\right\}<35$$

確認問題4

n を正の整数とする。

(1)　等式 $\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)\sin\frac{x}{2}=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$ が成り立つことを示せ。

(2)　方程式 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx=0$ の解 x をすべて求めよ。

(解説)

(1) $2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\sin\frac{x}{2}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(kx-\frac{x}{2}\right)\right\}\text{(積和公式)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2}x-\sin\frac{2k-1}{2}x\right)$$

$$=\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)$$

$$+\cdots+\left(\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{2n-1}{2}x\right)=\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

よって

$$(\text{左辺})=\sin\frac{x}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

(2) (1)より

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}\quad\cdots\cdots①$$

(i) $\sin\frac{x}{2}=0$ のとき

$\frac{x}{2}=l\pi$ (l は整数)，すなわち，$x=2l\pi$

このとき

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}\cos 2kl\pi=\sum_{k=1}^{n}1=n\qquad\therefore\sum_{k=1}^{n}\cos kx\neq 0$$

(ii) $\sin\frac{x}{2}\fallingdotseq 0$ すなわち $x \fallingdotseq 2l\pi$ のとき

$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=0$ となるとき

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=0$$

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\sin\frac{x}{2}$$

$$\therefore\ \left(n+\frac{1}{2}\right)x=\frac{x}{2}+2m\pi,\ \pi-\frac{x}{2}+2m\pi\ (m\text{ は整数})$$

$$\therefore\ x=\frac{2m}{n}\pi,\ \frac{2m+1}{n+1}\pi$$

ただし，$\frac{m}{n}$ が整数となるときの $x=\frac{2m}{n}\pi$ は除く

確認問題5

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2$，$\sum_{k=1}^{n} b_k = 2^n$ を満たすものとする。このとき，次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2$ (2) $\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$ (3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

解説

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とする。

(1) $n=1$ のとき， $a_1 = S_1 = 1^2 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

これは， $n=1$ のときにも成り立つから

$$a_n = 2n-1 \ (n \geqq 1)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{3} n\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\}$$

$$= \frac{1}{3} n(4n^2 - 1) = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$$

(2) $n=1$ のとき， $b_1 = T_1 = 2^1 = 2$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = T_n - T_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \ (n \geqq 2)$$

よって

$n=1$ のとき　$b_1 = 2$, $n \geqq 2$ のとき　$b_n = 2^{n-1}$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 = 2^2 + \sum_{k=2}^{n} (2^{k-1})^2 = 4 + \sum_{k=2}^{n} 4^{k-1} = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$$

$$= 4 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4-1} = \frac{1}{3}(4^n + 8)$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2^3 + \cdots\cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

$$U = 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2^3 + \cdots\cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1} \ \cdots ①$$

$$2U = 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots\cdots + (2n-3)\cdot 2^{n-1} + (2n-1)\cdot 2^n \ \cdots ②$$

①−②より

$$-U = 3\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + \cdots\cdots + 2\cdot 2^{n-1} - (2n-1)\cdot 2^n$$

$$= 2 + 2\cdot \frac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n = (3-2n)\cdot 2^n - 2$$

$$\therefore U = (2n-3)\cdot 2^n + 2$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 1\cdot 2 + U = (2n-3)\cdot 2^n + 4$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ

確認問題6

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = n\cdot 3^{n-1},\qquad b_n = n(n+1)\cdot 3^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める．$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき

$$S_n - cS_n = 1+3+3^2+\ \cdots\cdots\ +3^{n-1}-3a_n$$

を満たす定数 c は $c=$ ア$\boxed{}$ である．S_n を n を用いて表すと S_n $=$ イ$\boxed{}$ となる．したがって，$T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ も同様に計算し n を用いて表すと $T_n=$ ウ$\boxed{}$ となる．ゆえに $\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 3^{k-1}=$ エ$\boxed{}$ となる．

解説

$$\begin{array}{rl}
S_n = & 1+2\cdot 3+3\cdot 3^2+\ \cdots\cdots\ +\qquad n\cdot 3^{n-1} \\
-)\ 3S_n = & \qquad 1\cdot 3+2\cdot 3^2+\ \cdots\cdots\ +(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n \\
\hline
S_n-3S_n = & 1+\ 3+\ 3^2+\ \cdots\cdots\ +\qquad 3^{n-1}-3a_n
\end{array}$$

$$-2S_n=\frac{3^n-1}{3-1}-n\cdot 3^n$$

$$\therefore\ S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n\right)=\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4}$$

$$\begin{array}{rl}
T_n = & 1\cdot 2+2\cdot 3\cdot 3+3\cdot 4\cdot 3^2+\ \cdots\cdots\ +n(n+1)\cdot 3^{n-1} \\
-)\ 3T_n = & \qquad 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 3^2+\ \cdots\cdots\ +(n-1)n\cdot 3^{n-1}+n(n+1)\cdot 3^n \\
\hline
-2T_n = & 1\cdot 2+2\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 3^2+\ \cdots\cdots\ +\qquad 2n\cdot 3^{n-1}-n(n+1)\cdot 3^n \\
= & 2S_n-n(n+1)\cdot 3^n
\end{array}$$

$$T_n=\frac{1}{2}n(n+1)\cdot 3^n-S_n$$

$$=\frac{n(n+1)\cdot 3^n}{2}-\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{4}=\frac{(2n^2+1)\cdot 3^n-1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 3^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left\{k(k+1)\cdot 3^{k-1}-k\cdot 3^{k-1}\right\}=T_n-S_n$$

$$=\frac{(n^2-n+1)\cdot 3^n-1}{2}$$