2.7　対数関数を含む関数

(1) 対数関数と 2次方程式・不等式

例1

(1) 関数 $f(x)=\log_2(x-2)+\log_2(10-x)$ は，$x=$ ${}^{ウ}\boxed{}$ のとき，最大値 ${}^{エ}\boxed{}$ をとる。

(2) x が実数全体を動くとき， $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x+5)$ の最大値を求めよ.

(3) 関数 $y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$ は x の値が ${}^{ア}\boxed{}$ のときに最大値をとり，その最大値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

解説

(1) 真数条件より

$x-2>0, 10-x>0$　　$\therefore 2<x<10$

$f(x)=\log_2(x-2)(10-x)$

$=\log_2(-x^2+12x-20)$

$=\log_2\{-(x-6)^2+16\}$

底2>1 より，$x={}^{ウ}6$ のとき最大

　最大値　$\log_2 16={}^{エ}4$ をとる。

(2) ($x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$ より，定義域は実数全体)

$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x+5)=\log_{\frac{1}{2}}\{(x+1)^2+4\}$

$0<$底 $\dfrac{1}{2}<1$ より， $x=-1$ のとき最大

　最大値　$\log_{\frac{1}{2}}4=-2$

(3) 真数条件より

$x-2>0\ , 3-x>0$　　$\therefore 2<x<3$　……①

$y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$

$=\log_2(x-2)+\log_2(3-x)$

$=\log_2(x-2)(3-x)$

$=\log_2(-x^2+5x-6)$

$=\log_2\left(-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right)$

底$2>1$ より，y は $x=$ ${}^{ア}\dfrac{5}{2}$ のとき最大

最大値　$\log_2\dfrac{1}{4}=$ ${}^{イ}-2$

例2
a を実数の定数とする。x に関する方程式 $\log_2(x-1)-\log_4(2x-a)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a の値の範囲は
${}^{ア}\boxed{}<a<{}^{イ}\boxed{}$ である。

(解説)

真数条件より

$x-1>0$, $2x-a>0$　$\therefore$ $x>1, 2x-a>0$

$\log_2(x-1)-\log_4(2x-a)=0$

$\log_2(x-1)-\dfrac{\log_2(2x-a)}{2}=0$

$2\log_2(x-1)=\log_2(2x-a)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(2x-a)$

$\therefore (x-1)^2=2x-a$ …①

①より，$x>1$ において $2x-a>0$ より

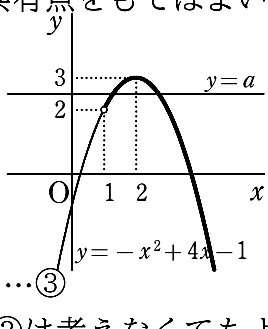
$x>1$ において ① が異なる 2 つの実数解をもつ a の範囲を求めればよい

①は，$-x^2+4x-1=a$

この方程式が $x>1$ に異なる 2 つの実数解をもつとき，

$y=-x^2+4x-1\ (x>1)$ と $y=a$ が異なる 2 つの共有点をもてばよいから，

$y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$



グラフより

$2<a<3$

注 本問において，与えられた方程式は

$x-1>0$ …①, $2x-a>0$ …②, $(x-1)^2=2x-a$ …③

に等しいが，①, ③を満たせば②は満たすので，②は考えなくてもよい。

例3

a は定数で $0<a<1$ である。不等式

$$\text{(A)}\quad 2\log_a(x+a)>\log_a(2x+2)$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　不等式 (A) を満たす x の範囲を求めよ。

(2)　不等式 (A) を満たす正の整数 x がただ 1 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。

(解説)

(1) 真数条件より

$x+a>0$, $2x+2>0$　$\therefore\ x>-a$ ($0<a<1$ より)

$2\log_a(x+a)>\log_a(2x+2)$

$\log_a(x+a)^2>\log_a(2x+2)$

$0<$底 $a<1$

$(x+a)^2<2x+2$

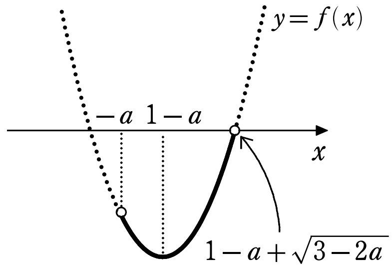
$x^2+2(a-1)x+a^2-2<0$ …①

ここで

$x^2+2(a-1)x+a^2-2=0$

$\therefore\ x=-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-(a^2-2)}$

$=-a+1\pm\sqrt{3-2a}$



$0<a<1$ から $1<\sqrt{3-2a}<\sqrt{3}$ より

$-a+1-\sqrt{3-2a}<-a<-a+1+\sqrt{3-2a}$

よって，①の解は

$-a<x<-a+1+\sqrt{3-2a}$

(2) $f(x)=x^2+2(a-1)x+a^2-2$ とおく

$0<a<1$ より

$-a<1$，$f(1)=(a+3)(a-1)<0$

$x=1$ は不等式 (A) の解である

不等式 (A) の正の整数解が $x=1$ だけとなるとき

$f(2)=a^2+4a-2\geqq 0$

$0<a<1$ より，$-2+\sqrt{6}\leqq a<1$

(2) 対数関数を変数とする関数

例4

(1) $y=2(\log_4 x)^2-\log_4 x$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(2) 関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{8}\right)(\log_2 2x)$ を考える。

$y=(\log_2 x)^2-{}^{ア}\boxed{}\log_2 x-{}^{イ}\boxed{}$ が成り立ち，$1\leqq x\leqq 8$ のとき，

y は $x={}^{ウ}\boxed{}$ で最大値 ${}^{エ}\boxed{}$ をとり，

$x={}^{オ}\boxed{}$ で最小値 ${}^{カ}\boxed{}$ をとる。

解説

(1) $y=2(\log_4 x)^2-\log_4 x$

$=2\left(\log_4 x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

$\log_4 x=\dfrac{1}{4}$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のとき最小

最小値 $-\dfrac{1}{8}$

(2) $y=\left(\log_2\dfrac{x}{8}\right)(\log_2 2x)$

$=(\log_2 x-\log_2 8)(\log_2 2+\log_2 x)$

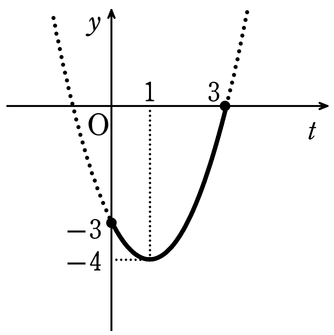
$=(\log_2 x-3)(\log_2 x+1)$

$=(\log_2 x)^2-{}^{ア}2\log_2 x-{}^{イ}3$

$\log_2 x=t$ とおくと，$1\leqq x\leqq 8$ より $0\leqq t\leqq 3$

$y=t^2-2t-3$

$=(t-1)^2-4$



よって，y は

$t=3$ すなわち $x={}^{ウ}8$ のとき最大

最大値 ${}^{エ}0$

$t=1$ すなわち $x={}^{オ}2$ のとき最小

最小値 ${}^{カ}-4$

例5

x の方程式 $\log_2 x + a\log_x 4 - 2a = 0$ が $1 < x \leqq 8$ において，解をもつような定数 a の範囲を求めよ。

解説

$\log_2 x + a\log_x 4 - 2a = 0$ …①

$$\log_2 x + a \cdot \frac{2}{\log_2 x} - 2a = 0$$

$(\log_2 x)^2 - 2a\log_2 x + 2a = 0$

$t = \log_2 x$ とおくと， $1 < x \leqq 8$ より $0 < t \leqq 3$

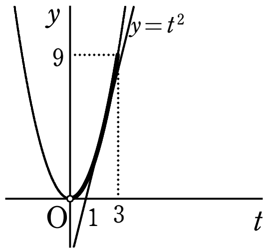
$t^2 - 2at + 2a = 0$

$t^2 = 2a(t-1)$ …②

①が $1 < x \leqq 8$ に解をもつとき，②が $0 < t \leqq 3$ に解をもてばよい

②が $0 < t \leqq 3$ に解をもつとき，

$y = t^2 (0 < t \leqq 3)$ と $y = 2a(t-1)$ が共有点をもてばよい



これらが接するとき，②が重解をもつから

判別式を D として，

$D = a^2 - 2a = 0$

$a > 0$ より， $a = 2$

グラフより

$a < 0, a \geqq 2$

例6

$x > 0$ のとき，不等式 $(\log_9 x)^2 + \log_{81} x + a > 0$ が常に成り立つような a の値の範囲を求めよ.

解説

$(\log_9 x)^2 + \log_{81} x + a > 0$

$$(\log_9 x)^2 + \frac{\log_9 x}{2} + a > 0$$

$2(\log_9 x)^2 + \log_9 x + 2a > 0$

$\log_9 x = t$ とおくと， t は任意の実数値をとる

$2t^2 + t + 2a > 0$

これが常に成り立つとき，

$2t^2 + t + 2a = 0$ の判別式を D として， $D < 0$ となればよいから

$$D=1^2-4\cdot2\cdot2a<0 \quad \therefore\ a>\frac{1}{16}$$

(3) $\log_a x+\log_x a$ を変数とする関数

例7

(1) 実数 x が $x>1$ の範囲を動くとき，$\log_3 x+3\log_x 3$ の最小値を求めよ。

(2) 関数 $\log_x y+\log_y x$ $(x>1,\ y>1)$ の最小値は $\boxed{}$ である．

(解説)

(1) $\log_3 x+3\log_x 3=\log_3 x+\dfrac{3}{\log_3 x}$

$x>1$ のとき，$\log_3 x>0$，$\dfrac{3}{\log_3 x}>0$ であるから，相加相乗平均より

$$\log_3 x+\frac{3}{\log_3 x}\geqq 2\sqrt{\log_3 x\cdot\frac{3}{\log_3 x}}=2\sqrt{3}$$

等号成立は $\log_3 x=\sqrt{3}$，すなわち $x=3^{\sqrt{3}}$ のとき

よって，最小値 $2\sqrt{3}$

(2) $\log_x y+\log_y x=\log_x y+\dfrac{1}{\log_x y}$

$x>1,\ y>1$ のとき，$\log_x y>0$ であるから，相加相乗平均より

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\geqq 2\sqrt{\log_x y\cdot\frac{1}{\log_x y}}=2$$

等号成立は，$\log_x y=1$，すなわち $x=y$ のとき

よって，最小値 2

例8

$x>1$ で定義された関数 $y=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-\log_2 x-\log_x 2+a$ があり，最小値は -2 である。ただし，a は定数とする。$\log_2 x+\log_x 2=t$ とするとき，t のとりうる値の範囲は，$t\geqq{}^{ア}\boxed{}$ であり，関数 y を t の式で表すと，$y={}^{イ}\boxed{}$ となる。したがって，y が最小となるのは，$t={}^{ウ}\boxed{}$ のときである。このとき $x={}^{エ}\boxed{}$，$a={}^{オ}\boxed{}$ である。

(解説)

$x>1$ のとき， $\log_2 x>0$ であるから，相加相乗平均より

$$t=\log_2 x+\log_x 2=\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}\geqq 2\sqrt{\log_2 x\cdot\frac{1}{\log_2 x}}=2 \cdots(\text{ア})$$

等号成立は， $\log_2 x=1$ ，すなわち $x=2$ のとき

$y=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-\log_2 x-\log_x 2+a$

$t=\log_2 x+\log_x 2$ とおくと

$t^2=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2+2$ から， $(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2=t^2-2$ より

$$y=(t^2-2)-t+a\ (t\geqq 2)$$
$$=t^2-t-2+a \cdots(\text{イ})$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+a$$

t が最小となるのは $t=2$ のとき…(ウ)

最小値 a

このとき， $x=2$ …(エ)

最小値が -2 より， $a=-2$ …(オ)

確認問題1

$\log_a(x+1)+\log_a(2-x)=-1$ を満たす実数 x が存在するためには，a は，$^{ア}\boxed{} \leqq a < {}^{イ}\boxed{}$ または $^{ウ}\boxed{} < a$ の範囲になければならない。

(解説)

真数条件より

$x+1>0, 2-x>0 \quad \therefore -1<x<2$

底の条件より，$a>0, a \neq 1$

$\log_a(x+1)+\log_a(2-x)=-1$ …①

$\log_a(x+1)(2-x)=-1$

$(x+1)(2-x)=\dfrac{1}{a}$ …②

①を満たす実数 x が存在するとき，

②を満たす $-1<x<2$ である x が存在すればよい

このとき，$y=(x+1)(2-x)\ (-1<x<2)$ と $y=\dfrac{1}{a}$ が共有点をもてばよいから，$y=(x+1)(2-x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ より

$0<\dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ {}^{ア}\dfrac{4}{9}\leqq a<{}^{イ}1，{}^{ウ}1<a$

確認問題2

a を定数とする。x についての方程式 $\{\log_4(x^2+\sqrt{2})\}^2-\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$ が実数解をもつような a の値の範囲は $a\leqq{}^{ア}\boxed{}$ である。$a={}^{ア}\boxed{}$ のとき方程式は異なる $^{イ}\boxed{}$ 個の実数解をもつ。また方程式が異なる実数解を 3 個だけもつのは $a=\dfrac{{}^{ウ}\boxed{}}{{}^{エ}\boxed{}}$ のときである。

(解説)

$\{\log_4(x^2+\sqrt{2})\}^2-\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$ …①

$\frac{1}{4}\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$

$t=\log_2(x^2+\sqrt{2})$ とおくと，$t \geqq \log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}t^2-t+a=0$

$-\frac{1}{4}t^2+t=a$ …②

$f(t)=-\frac{1}{4}t^2+t\left(t \geqq \frac{1}{2}\right)$ とおく　$f(t)=-\frac{1}{4}(t-2)^2+1$

②を満たす $t \geqq \frac{1}{2}$ となる t の個数は

放物線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい

$t=\log_2(x^2+\sqrt{2})$ において，

$t=\frac{1}{2}$ のとき，1つの t に対して1つの x

$t>\frac{1}{2}$ のとき，1つの t に対して2つの x が対応するから

①が実数解をもつのは，$a \leqq 1$ のとき

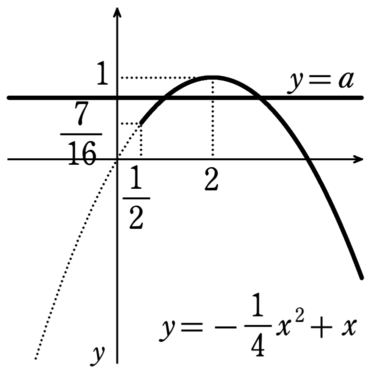
$a=1$ のとき，②の解は $t=2$ より，

①は異なる ${}^{イ}2$ 個の実数解をもつ

①が異なる実数解を3個だけもつとき

②が $t=\frac{1}{2}$ と $t>\frac{1}{2}$ なる解をもてばよいから

$a=\frac{{}^{ウ}7}{{}^{エ}16}$



確認問題3

xに関する方程式 $\left\{\log_{\frac{1}{10}}(ax)\right\}^2+\log_{\frac{1}{10}}x+\frac{1}{4}=0$ が解をもつとき，すべての解が $\sqrt{10}$ より大きくなるように a の値の範囲を定めよ．

(解説)

真数条件より

$ax>0$，$x>0$　$\therefore\ a>0$，$x>0$

$\left\{\log_{\frac{1}{10}}(ax)\right\}^2+\log_{\frac{1}{10}}x+\frac{1}{4}=0$ …①

$\left(\log_{\frac{1}{10}}a+\log_{\frac{1}{10}}x\right)^2+\log_{\frac{1}{10}}x+\frac{1}{4}=0$

$\left(\log_{\frac{1}{10}}x\right)^2+\left(2\log_{\frac{1}{10}}a+1\right)\log_{\frac{1}{10}}x+\left(\log_{\frac{1}{10}}a\right)^2+\frac{1}{4}=0$

$t=\log_{\frac{1}{10}}x$ とおくと，

$t^2+\left(2\log_{\frac{1}{10}}a+1\right)t+\left(\log_{\frac{1}{10}}a\right)^2+\frac{1}{4}=0$ …②

①のすべての解が $\sqrt{10}$ より大きくなるとき，

$x>\sqrt{10}$　$\log_{\frac{1}{10}}x<-\frac{1}{2}$　$\therefore\ t<-\frac{1}{2}$

であるから，②を満たす t がすべて $t<-\frac{1}{2}$ となればよい

このとき，$f(t)=t^2+\left(2\log_{\frac{1}{10}}a+1\right)t+\left(\log_{\frac{1}{10}}a\right)^2+\frac{1}{4}$ とおいて

$f(t)=0$ の判別式を D とすると

$D\geqq0$, 軸$<-\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$

$D>0$ より

$D=\left(\log_{\frac{1}{10}}a+\frac{1}{2}\right)^2-\left\{\left(\log_{\frac{1}{10}}a\right)^2+\frac{1}{4}\right\}=\log_{\frac{1}{10}}a>0$　$\therefore\ a<1$

軸$<-\frac{1}{2}$ より

$-\left(\log_{\frac{1}{10}}a+\frac{1}{2}\right)<-\frac{1}{2}$　$\log_{\frac{1}{10}}a>0$　$\therefore\ a<1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$ より

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\log_{\frac{1}{10}} a\right)^2-\log_{\frac{1}{10}} a$$

$$=\log_{\frac{1}{10}} a\left(\log_{\frac{1}{10}} a-1\right)>0$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{10}} a<0, \log_{\frac{1}{10}} a>1 \quad \therefore a>1\text{ , } a<\frac{1}{10}$$

$a>0$ より

$$0<a<\frac{1}{10}$$

確認問題4

$t>4$ を満たすすべての t について，不等式 $(\log_2 t)^2-b\log_2 t+2>0$ が成り立つ b の範囲を求めよ。

(解説)

$(\log_2 t)^2-b\log_2 t+2>0$

$\log_2 t=X$ とおくと， $X>\log_2 4=2$

$$X^2-bX+2>0$$

$f(X)=X^2-bX+2$ ($X>2$) とおく

$$=\left(X-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+2 \quad \text{軸は } X=\frac{b}{2}$$

(i) $\frac{b}{2}\leqq 2$，すなわち $b\leqq 4$ のとき

$f(2)\geqq 0$ となればよいから

$$6-2b\geqq 0 \quad \therefore b\leqq 3$$

(ii) $\frac{b}{2}>2$，すなわち $b>4$ のとき

$f\left(\frac{b}{2}\right)>0$ となればよいから

$$-\frac{b^2}{4}+2>0$$

$b>4$ より，解なし

(i)，(ii)より

$$b\leqq 3$$

確認問題5

a を実数とする。関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(\log_{\frac{1}{2}} x^2\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}(8x^{1-a})+a-8 \quad (1\leqq x\leqq 4)$$

と定める。$t=\log_{\frac{1}{2}} x$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を t を用いて表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq 4$ のとき，t の値の範囲を求めよ。

(3)　次の条件 $(*)$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

　　　$(*)$　$1\leqq x\leqq 4$ のとき，$f(x)<0$ である。

(解説)

(1) $f(x)=\frac{1}{4}\left(2\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2-\log_{\frac{1}{2}} 8-(1-a)\log_{\frac{1}{2}} x+a-8$

$\quad\quad =\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2+(a-1)\log_{\frac{1}{2}} x+a-5$

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$ とおくと，$f(x)=t^2+(a-1)t+a-5$

(2) $1\leqq x\leqq 4$ のとき，底 $\frac{1}{2}<1$ より，

$\quad \log_{\frac{1}{2}} 4\leqq t\leqq \log_{\frac{1}{2}} 1 \quad \therefore -2\leqq t\leqq 0$

(3) $-2\leqq t\leqq 0$ において，常に $t^2+(a-1)t+a-5<0$ を満たす a の値の範囲を求めればよい

$g(t)=t^2+(a-1)t+a-5$ $(-2\leqq t\leqq 0)$ とすると，

条件を満たすとき，

$\quad g(-2)<0$, $g(0)<0$

$g(-2)<0$ より

$\quad 4-2(a-1)+a-5<0 \quad \therefore a>1$

$g(0)<0$ より

$\quad a-5<0 \quad \therefore a<5$

よって

$\quad 1<a<5$