3.3　Σ記号

(1) Σ記号

数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和を Σ という記号を用いて $\sum_{k=1}^{n} a_k$ と表します。Σ はギリシャ文字で，シグマと読みます。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

また，$\sum_{k=p}^{q} a_k$ は数列 $\{a_n\}$ の第 p 項から第 q 項までの和を表します。

例えば，

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} (5k-2) = 3 + 8 + 13 + \cdots + (5n-2)$$

$$\sum_{k=3}^{10} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{10}$$

となります。

例1

数列の和について次の一連の問いに答えよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示せ。

(2)　多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示せ。

(3)　$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示せ。

(4)　$\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ。結果は因数分解すること。

解説

(1) $S = \sum_{k=1}^{n} k$ とおくと

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n$$
$$S=n+(n-1)+\cdots\cdots+1$$
辺々を加えると
$$2S=(n\underbrace{+1)+(n+1)+\cdots\cdots+(n+}_{n\text{個}}1)$$
$$S=\frac{1}{2}n(n+1) \quad \therefore \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$
(2) $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

$k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入してこれらをすべて加えると
$$\text{左辺}=(\cancel{2^3}-1^3)+(\cancel{3^3}-\cancel{2^3})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^3}-\cancel{(n-1)^3}\}+\{(n+1)^3-\cancel{n^3}\}$$
$$=(n+1)^3-1$$
$$\text{右辺}=3\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3\cdot(1+2+\cdots+n)+(1+1+\cdots+1)$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$$
よって，
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\{(n+1)^3-(n+1)\}-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)\{(n+1)^2-1\}-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
(3) $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$

同様に
$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n$$
$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}\{(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(n+1)^4-(n+1)^2(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{4}(n+1)^2\{(n+1)^2-(2n+1)\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
(4) $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$，同様にして
$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)$$

本問より，以下の公式が得られます。

数列の和の公式

$\sum_{k=1}^{n} 1=1+1+\cdots+1=n$　　$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

また，$r \fallingdotseq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} r^{n-1}=1+r+r^2+\cdots r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

が成り立ちます。どのような数列の和かが分からないときは，Σ記号を使わずに具体的に表して考えます。

(2) Σの性質

2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ と定数 p に対して

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$pa_1+pa_2+\cdots+pa_n=p(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

が成り立ちます。すなわち，次の性質が成り立ちます。

Σの性質

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} pa_k=p\sum_{k=1}^{n} a_k$　（p は k に無関係な定数）

この性質を線形性といいます。

一般に，p, q を k に無関係な定数とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n} a_k+q\sum_{k=1}^{n} b_k$$

が成り立ちます。特に，$p=1, q=-1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} b_k$$

例2

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+3)$ を計算せよ。

(2) $\sum_{k=1}^{20}(2k-3)(k+2)=\boxed{}$

(3) n を自然数とするとき，和 $\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)$ を n の整式として表せ。

(解説)

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6(n+1)+18\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+9n+25)$$

(2) $\sum_{k=1}^{20}(2k-3)(k+2)=\sum_{k=1}^{20}(2k^2+k-6)$

$$=2\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}k-6\sum_{k=1}^{20}1$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41+\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21-6\cdot 20$$

$$=5740+210-120=5830$$

(3) $\sum_{k=2n}^{3n}(3k^2+5k-1)=\sum_{k=1}^{3n}(3k^2+5k-1)-\sum_{k=1}^{2n-1}(3k^2+5k-1)$

ここで

$$\sum_{k=1}^{N}(3k^2+5k-1)=3\sum_{k=1}^{N}k^2+5\sum_{k=1}^{N}k-\sum_{k=1}^{N}1$$

$$=\frac{1}{2}N(N+1)(2N+1)+\frac{5}{2}N(N+1)-N$$

$$=\frac{1}{2}N\{(N+1)(2N+1)+5(N+1)-2\}$$

$=N(N^2+4N+2)=S(N)$ とおく

求める和は

$S(3n)-S(2n-1)$

$=(3n)^3-(2n-1)^3+4\{(3n)^2-(2n-1)^2\}+2\{(3n)-(2n-1)\}$

$=\{(3n)-(2n-1)\}\{(3n)^2+3n(2n-1)+(2n-1)^2\}$

$\qquad +4\{(3n)-(2n-1)\}\{(3n)+(2n-1)\}+2\{(3n)-(2n-1)\}$

$=(n+1)\{(19n^2-7n+1)+4(5n-1)+2\}$

$=(n+1)(19n^2+13n-1)$

例3
(1)　$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)$ の和を n で表せ．(n は自然数)
(2)　自然数 n に対し，$S(n)=1^2\cdot2+2^2\cdot3+3^2\cdot4+\cdots\cdots+n^2\cdot(n+1)$ とおく。$\dfrac{S(14)}{S(5)}=\boxed{}$ である。

(解説)

(1) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots+n(n+2)$

$=\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\}=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

(2) $S(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$

$=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2+\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\dfrac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}$

$=\dfrac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)=\dfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

よって

$\dfrac{S(14)}{S(5)}=\dfrac{14\cdot15\cdot16\cdot43}{5\cdot6\cdot7\cdot16}=43$

例4
(1) $S_n=2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2$ を求めよ．
(2) 数列 1^2，3^2，5^2，……，$(2n-1)^2$ の和を求めよ。
(3) 和 $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2$ を求めよ．

(解説)

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}4k^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

(2) 求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

別解

$S_n=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$ として計算してもよい。

(3) $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$

$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$$

$$=\frac{1}{6}\cdot2n(2n+1)(4n+1)-8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(2n+1)\{(4n+1)-4(n+1)\}=-n(2n+1)$$

別解

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$$

$$=-\{1+2+3+4+\cdots\cdots+(2n-1)+2n\}$$

$$=-\frac{2n(2n+1)}{2}=-n(2n+1)$$

例5

1 から 10 までの 10 個の整数から異なる 2 数を取り出し，それら 2 数の積を考える。考えられるすべての積 ($_{10}\mathrm{C}_2$ 個) の和はいくらか。

解説

まず，重複は無視して 1 から 10 までの数から 2 つの数を選び積を作り，それらのすべての和を考える

$$1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+\cdots+1\cdot10=1\cdot(1+2+3+\cdots+10)$$
$$2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2\cdot10=2\cdot(1+2+3+\cdots+10)$$
$$3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+\cdots+3\cdot10=3\cdot(1+2+3+\cdots+10)$$
$$\cdots$$
$$10\cdot1+10\cdot2+\cdots\cdots+10\cdot10=10\cdot(1+2+3+\cdots+10)$$

これらをすべて足すと

$$(1+2+3+\cdots+10)(1+2+3+\cdots+10)$$

異なる 2 数の積 $_{10}\mathrm{C}_2$ 個には同じ数の積はなく， $a\cdot b$ と $b\cdot a$ は同じものであるから，求める和 S は

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{10}k\right)^2-\sum_{k=1}^{10}k^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot10\cdot11\right)^2-\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21\right\}$$
$$=\frac{1}{12}\cdot10\cdot11\cdot(3\cdot5\cdot11-21)=1320$$

例6

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}l\right)$ を求めよ。

解説

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}l\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

例7

自然数 k，n に対して $f_k(n)=n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k-1)$ とする。このとき

$$f_{k+1}(n)-f_{k+1}(n-1)=\left({}^{ア}\boxed{}\right)f_k(n)\ \ (n\geqq 2)$$

よって $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} f_k(r)={}^{イ}\boxed{}f_{k+1}(n)$

これより $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)={}^{ウ}\boxed{}n(n+1)\left({}^{エ}\boxed{}\right)$

一般に，$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+k)={}^{オ}\boxed{}\frac{\left(n+{}^{カ}\boxed{}\right)!}{(n-1)!}$ となる。

(解説)

$f_{k+1}(n)=n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)(n+k)=(n+k)f_k(n)$ …①

$n\geqq 2$ のとき

$$f_{k+1}(n-1)=(n-1)n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)=(n-1)f_k(n)$$

よって

$$f_{k+1}(n)-f_{k+1}(n-1)=({}^{ア}k+1)f_k(n)$$

したがって

$$\begin{aligned}(k+1)\sum_{r=2}^{n} f_k(r)&=f_{k+1}(2)-f_{k+1}(1)+f_{k+1}(3)-f_{k+1}(2)\\&\qquad+\cdots+f_{k+1}(n-1)-f_{k+1}(n-2)+f_{k+1}(n)-f_{k+1}(n-1)\\&=-f_{k+1}(1)+f_{k+1}(n)\end{aligned}$$

① から $f_{k+1}(1)=(k+1)f_k(1)$ より

$$(k+1)\sum_{r=1}^{n} f_k(r)=f_{k+1}(n)$$

よって

$$\sum_{r=1}^{n} f_k(r)={}^{イ}\frac{1}{k+1}f_{k+1}(n)$$

したがって

$$\begin{aligned}1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots\cdots+n(n+1)&=\sum_{r=1}^{n} f_2(r)=\frac{1}{3}f_3(n)\\&={}^{ウ}\frac{1}{3}n(n+1)({}^{エ}n+2)\end{aligned}$$

同様に

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+k)=\sum_{r=1}^{n} f_{k+1}(r)=\frac{1}{k+2}f_{k+2}(n)$$

$$=\frac{1}{k+2}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+k+1)$$

$$={}^{オ}\frac{1}{k+2}\times\frac{(n+{}^{カ}k+1)!}{(n-1)!}$$

例8

和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{l=1}^{10}2(3k^2-l)\right)$ の値を求めよ。

(解説)

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{l=1}^{10}2(3k^2-l)\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(6k^2\sum_{l=1}^{10}1-2\sum_{l=1}^{10}l\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(6k^2\cdot 10-10\cdot 11)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(60k^2-110)=10\cdot 10\cdot 11\cdot 21-110\cdot 10=22000$$

例9

(1) $S_n=1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$ を求めよ.

(2) n を $n\geqq 2$ である自然数としたとき

$S_n=1\cdot(n-1)^2+2\cdot(n-2)^2+3\cdot(n-3)^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot 2^2+(n-1)\cdot 1^2$ と

おく。すると $S_n=\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}}n^4-\dfrac{{}^{ウ}\boxed{}}{{}^{エ}\boxed{}}n^2$ である。

(解説)

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\{n-(k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)^2=\sum_{k=1}^{n-1}(n^2k-2nk^2+k^3)$

$$=n^2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2n\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{4}(n-1)^2n^2$$

$$=\frac{1}{12}n^2(n-1)\{6n-4(2n-1)+3(n-1)\}$$

$$=\frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)=\frac{1}{12}n^2(n^2-1)=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}12}n^4-\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}12}n^2$$

例10
数列 $1+\frac{1}{2}$，$3+\frac{1}{4}$，$5+\frac{1}{8}$，$7+\frac{1}{16}$，…… の第 n 項までの和を求めよ。

(解説)

第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(2k-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{2k-1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=n^2+1-\frac{1}{2^n}$$

例11
(1) 数列 $1, \frac{1+2}{2}, \frac{1+2+3}{3}, \frac{1+2+3+4}{4}, \cdots\cdots$ の初項から第 25 項までの和は $\boxed{}$ である.
(2) 数列 2，2+6，2+6+18，2+6+18+54， …… の第 N 項までの和を求めよ.

(解説)

(1) この数列の第 k 項は

$$\frac{1+2+\cdots\cdots+k}{k}=\frac{k(k+1)}{2k}=\frac{1}{2}(k+1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{25}\frac{1}{2}(k+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{25\cdot 26}{2}+25\right)=175$$

(2) 一般項を a_k とすると

$$a_k = 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + \cdots\cdots + 2\cdot 3^{k-1}$$
$$= \frac{2(3^k - 1)}{3-1} = 3^k - 1$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} (3^k - 1) = \frac{3(3^N - 1)}{3-1} - N = \frac{3^{N+1}}{2} - N - \frac{3}{2}$$

例12

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 11,\ a_3 = 111,\ \cdots\cdots,\ a_n = \overbrace{111\cdots1}^{n\text{ 桁}},\ \cdots\cdots$$

このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$ を示せ。

(解説)

$$a_k = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$$
$$= \frac{10^k - 1}{10-1} = \frac{1}{9}(10^k - 1)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} (10^k - 1)$$
$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n - 1)}{10-1} - n\right\}$$
$$= \frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

確認問題1

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ が $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}m^2\right)$ と $b_n=\sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}k^2$ で定められるとき，$a_n=b_n$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ となることを示せ。

(解説)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}m^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right\}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)$$

$$=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{2\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}k^2=\sum_{k=1}^{n}\left\{(n+1)k^2-k^3\right\}$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{2(2n+1)-3n\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

よって

$a_n=b_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

確認問題2
n を 2 以上の自然数とする。n 個の数 1，2，……，n のうち異なる 2 つの数の積の総和を求めよ。ただし，$a\times b$ と $b\times a$ は同じものとする。

(解説)
例5 と同様にして，求める総和 S は

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

別解
求める総和を S とおくと，次の等式が成り立つ。

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+2S$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

確認問題3

数列 27, 2727, 272727, 27272727, …… について

[1]　第 n 項 a_n を求めよ.

[2]　第 n 項までの和 S_n を求めよ.

(解説)

[1] a_n は 27 が n 個並ぶ数で

$$a_n = 27 + 27\cdot 100 + 27\cdot 100^2 + \cdots\cdots + 27\cdot 100^{n-1}$$

$$= 27\cdot\frac{100^n - 1}{100-1} = \frac{3}{11}(10^{2n}-1)$$

[2] $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{11}(10^{2k}-1)$

$$= \frac{3}{11}\cdot\frac{10^2\{(10^2)^n - 1\}}{10^2-1} - \frac{3}{11}n$$

$$= \frac{100}{363}(10^{2n}-1) - \frac{3}{11}n$$