3.2　等比数列

(1) **等比数列**

数列 $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ は初項 1 に次々に 2 をかけて得られます。すなわち，隣り合う 2 項の比は常に一定である。

一般に，数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ において，各項に一定の数 r をかけると次の項が得られるとき，この数列を等比数列といい，r をその公比といいます。このとき，すべての自然数 n について，次の関係が成り立ちます。

$$a_{n+1}=a_n r$$

特に，$a_n, r \fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r$ である。

初項が a，公比が r である等比数列 $\{a_n\}$ の各項は，

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=ar^3$$
$$\cdots$$

と表されるので，一般に次のことが成り立ちます。

等比数列の一般項
初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

例1
a, b, c を異なる実数とする．数列 $a, 6, b, c, 162$ に対して，この数列が等差数列ならば $a=$ ア $\boxed{}$, $b=$ イ $\boxed{}$, $c=$ ウ $\boxed{}$ である．また，この数列が等比数列ならば $a=$ エ $\boxed{}$, $b=$ オ $\boxed{}$, $c=$ カ $\boxed{}$ である．

解説

公差を d とすると

$$162=6+3d \qquad \therefore\ d=52$$

よって，$a=6-52=$ ア -46，$b=6+52=$ イ 58，$c=58+52=$ ウ 110

公比を r とすると

$$162=6r^3 \quad \therefore r^3=3^3$$

各項は実数であるから r も実数より，$r=3$

よって，$a=\dfrac{6}{3}=$ ${}^{エ}2$，$b=6\times3=$ ${}^{オ}18$，$c=18\times3=$ ${}^{カ}54$

例2

(1) 初項 2，公比 5 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は ${}^{ア}\boxed{}$ とかける。

(2) 第 4 項が -1，第 7 項が $\dfrac{1}{27}$ である等比数列の初項は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，$\dfrac{1}{243}$ は第 ${}^{イ}\boxed{}$ 項である．

(3) $a_1+a_3=-5$，$a_2+a_4=10$ である等比数列 $\{a_n\}$ の初項は ${}^{ア}\boxed{}$，公比は ${}^{イ}\boxed{}$ である．

解説

(1) 一般項 a_n は

$$a_n={}^{ア}2\cdot5^{n-1}$$

(2) 初項を a，公比を r とおくと，
条件より

$$ar^3=-1 \cdots ①\ ,\ ar^6=\frac{1}{27} \cdots ②$$

②／①より

$$r^3=-\frac{1}{27}$$

r は実数より，$r=-\dfrac{1}{3}$

このとき，$a\left(-\dfrac{1}{27}\right)=-1$ より，$a={}^{ア}27$

$27\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{243}$ のとき，$n-1=8 \quad \therefore n={}^{イ}9$

(3) 初項を a，公比を r とすると

$a_1+a_3=-5$ より

$$a+ar^2=-5 \quad \therefore a(1+r^2)=-5 \cdots ①$$

$a_2+a_4=10$ より

$$ar+ar^3=10 \quad \therefore\ ar(1+r^2)=10 \cdots ②$$

①，②より

$$-5r=10 \quad \therefore\ r=-2$$

①より，$a=-1$

よって，初項は -1，公比は -2

例3

公比 2，初項 1 の等比数列 $\{a_n\}$ に対し，和 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ を求めると $^{ア}\boxed{}$ であり，和 $\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_n$ を求めると $^{イ}\boxed{}$ である。

(解説)

一般項 a_n は

$$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

よって

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}={}^{ア}2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_n$$

$$=0+1+2+\cdots+(n-1)$$

$$={}^{イ}\frac{1}{2}n(n-1)$$

(2) 等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots ①$$

両辺に r をかけて

$$rS_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots ②$$

①−②より

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$\therefore (1-r)S_n = a(1-r^n)$$

$r \fallingdotseq 1$ のとき

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$r=1$ のとき

$$S_n = a + a + \cdots + a = na$$

よって，次の公式が成り立ちます。

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とするとき

1. $r \fallingdotseq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

2. $r=1$ のとき，$S_n = na$

例4

(1) 初項が 3，公比が 2 の等比数列 $\{a_n\}$ (n は自然数) の一般項は

$^{ア}\boxed{} \cdot {}^{イ}\boxed{}^{\,n-1}$ であり，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n

は $^{ウ}\boxed{} \cdot {}^{エ}\boxed{}^{\,n} - {}^{オ}\boxed{}$ である。また，S_n が 10^{10} を超える最

小の n の値は $^{カ}\boxed{}$ である。

ただし，$\log_{10}2$ は 0.301，$\log_{10}3$ は 0.477 としてよい。

(2) 第 3 項が 4，第 6 項が $-\dfrac{1}{2}$ である，公比が実数の等比数列の初項は

$^{ア}\boxed{}$，公比は $^{イ}\boxed{}$ である．また，この数列の第 11 項から第 20

項までの和は $\dfrac{2^{\,ウ\boxed{}}-1}{3\times 2^{\,エ\boxed{}}}$ となる．

(解説)

(1) 一般項 a_n は

$$a_n = {}^{ア}3 \cdot {}^{イ}2^{n-1}$$

このとき

$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = {}^{ウ}3 \cdot {}^{エ}2^n - {}^{オ}3$$

$S_n > 10^{10}$ のとき

$$3(2^n-1) > 10^{10}$$

$2^n > 2^n - 1$ であるから

$$3 \cdot 2^n > 10^{10}$$

であることが必要である

両辺常用対数をとって

$$\log_{10}3 + n\log_{10}2 > 10$$

$$0.301n > 10 - 0.477 = 9.523$$

$$n > 31.6\cdots$$

これを満たす最小の自然数 n は $n=32$

$n=32$ のとき，$3\cdot 2^{32}$ の 1 の位は 8 より

$3\cdot 2^{32}$ と $3(2^n-1) = 3\cdot 2^n - 3$ の桁数は変わらないから

求める最小の n の値は $n = {}^{カ}32$

(2) 初項を a，公比を r，第 n 項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，条件より

$$a_3=ar^2=4 \cdots ① \quad a_6=ar^5=-\frac{1}{2} \cdots ②$$

①，②より

$$4r^3=-\frac{1}{2} \quad \therefore r^3=-\frac{1}{8}$$

r は実数より，$r={}^{イ}-\dfrac{1}{2}$

①より，$a={}^{ア}16$

求める和 S は

$$S=\frac{a_{11}(1-r^{10})}{1-r}=\frac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r}=\frac{2}{3}\cdot 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

$$=\frac{2^{{}^{ウ}10}-1}{3\times 2^{{}^{エ}15}}$$

例5 $a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt[3]{6}$ である等比数列 $\{a_n\}$ の第 10 項を求めよ。また， $a_1+a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}$ の値を求めよ。

解説

公比を r とすると，$r=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$

$a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16}$ は公比が $r^3=\left(\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}\right)^3=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ の等比数列より

$$a_{10}=a_1(r^3)^3=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{27}{2}$$

$$a_1+a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}=\frac{\sqrt{2}\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^6-1\right\}}{\frac{3}{\sqrt{2}}-1}=\frac{2}{3-\sqrt{2}}\left(\frac{3^6}{8}-1\right)$$

$$=\frac{2(3+\sqrt{2})}{7}\cdot\frac{721}{8}=\frac{103\sqrt{2}+309}{4}$$

例6

(1) 第 3 項が 12，第 6 項が -96 である等比数列において，第 $^{ア}\boxed{}$ 項は 3072 であり，初項から第 $^{イ}\boxed{}$ 項までの和は 513 である。

(2) 初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_3=3$，$S_6=27$ であるとき，$a=^{ア}\boxed{}$，$r=^{イ}\boxed{}$ である。ただし，r は実数とする。

(3) 公比が正の数である等比数列について，初めの 3 項の和が 21 であり，次の 6 項の和が 1512 であるという。この数列の初項を求めよ。また，初めの 5 項の和を求めよ。

(4) 等比数列 $\{a_n\}$ について，$a_1+a_2+a_3=9$，$a_3+a_4+a_5=36$ が成り立っている．各項が整数であるように公比 r を定めると $r=^{ア}\boxed{}$ であり $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=^{イ}\boxed{}$ である．

解説

(1) この数列の初項を a，公比を r とすると，条件より

$ar^2=12$ …①，$ar^5=-96$ …②

①，②より，$12r^3=-96$　$\therefore r^3=-8$

r は実数より，$r=-2$

①より，$a=3$

よって，一般項 a_n は

$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

$a_n=3072$ のとき

$3\cdot(-2)^{n-1}=3072$　$\therefore n=11$

よって，第 11 項

この数列の初項から第 m 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=1-(-2)^n$$

$S_n=513$ のとき

$1-(-2)^n=513$　$\therefore n=9$

よって，第 9 項

(2) $r=1$ とすると，$S_3=3$ より，各項が 1 の定数列となるが，

これは $S_6=27$ に反する。よって， $r\fallingdotseq 1$

$S_3=3$ より， $\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=3\cdots$①

$S_6=27$ より， $\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=27\cdots$②

①，②より

$3(1+r^3)=27 \quad \therefore r^3=8$

r は実数より， $r=2$

①より， $a=\dfrac{3}{7}$

注 等比数列の和の公式を使うときは，公比 $r\fallingdotseq 1$ を示す必要があります。

(3) $r=1$ とすると， $S_3=21$ より，各項が 7 の定数列となるが，

これは $S_9-S_3=1512$ に反する。よって， $r\fallingdotseq 1$

この数列の初項を a , 公比を r , 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_3=21$ より， $\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=21\cdots$①

$S_9-S_3=1512$ より， $\dfrac{ar^3(1-r^6)}{1-r}=\dfrac{ar^3(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=1512\cdots$②

①，②より，

$21r^3(1+r^3)=1512$

$(r^3)^2+r^3-72=0$

$(r^3+9)(r^3-8)=0 \quad \therefore r^3=-9, 8$

r は正の数より， $r=2$

①より， $a=3$

また， $S_5=\dfrac{3(2^5-1)}{2-1}=93$

(4) 条件より， $r\fallingdotseq 1$ である

$a_1+a_2+a_3=9$ より， $\dfrac{a_1(1-r^3)}{1-r}=9\cdots$①

$a_3+a_4+a_5=36$ より， $\dfrac{a_1r^2(1-r^3)}{1-r}=36\cdots$②

①，②より， $r^2=4 \quad \therefore r=\pm 2$

$r=2$ のとき， $a_1=\dfrac{9}{7}$ 　各項は整数より不適

$r=-2$ のとき，$a_1=3$　各項は整数となるから適する
よって，

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{3\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=33$$

例7
実数 $r>0$ を公比とする等比数列 $a_n=ar^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ において，第 1 項から第 5 項までの和は 16 で，第 6 項から第 10 項までの和は 144 である。このとき，第 11項から第 20 項までの和を求めよ。

(解説)
条件より，$r\neq 1$ である
初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_5=\frac{a(1-r^5)}{1-r}$$

$$S_{10}-S_5=\frac{ar^5(1-r^5)}{1-r}=r^5S_5$$

$$S_{15}-S_{10}=\frac{ar^{10}(1-r^5)}{1-r}=r^5(S_{10}-S_5)\ \cdots$$

よって，初項から順に 5 項ずつの和は等比数列になっているから
$S_5=16, S_{10}-S_5=144$ より

$$S_{15}-S_{10}=144\cdot 9, S_{20}-S_{15}=144\cdot 9^2$$

よって，

$$S_{20}-S_{10}=144\cdot(9+9^2)=12960$$

別解 例5 のように普通に解いてもよい。

(3) 等差中項・等比中項

a, b, c がこの順に等差数列であるとき，等差数列は隣接する項の差が一定であるから，

$$b-a=c-b \quad \therefore 2b=a+c$$

が成り立ち，a, b, c がこの順に等比数列であるとき，等比数列は隣接する項の比が一定であるから，

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \quad \therefore b^2=ac$$

が成り立ちます。

等差中項・等比中項
a, b, c がこの順に
1. 等差数列であるとき，$2b=a+c$
2. 等比数列であるとき，$b^2=ac$

例8
(1) 3個の数 2，a，b はこの順に等差数列をなし，3個の数 a，b，9 はこの順に等比数列をなすとき，$a=$ ア$\boxed{}$，$b=$ イ$\boxed{}$ または $a=$ ウ$\boxed{}$，$b=$ エ$\boxed{}$ である.
(2) a を $a>0$ かつ $a\neq 1$ を満たす定数とする。
(ア) 実数 l，m，n を定数とする。a^l，a^m，a^n がこの順に等比数列をなすとき，l，m，n はこの順に等差数列をなす。これを証明せよ。
(イ) 正の定数 L，M，N に対し，$\log_a L$，$\log_a M$，$\log_a N$ がこの順に等差数列をなす
とき，L，M，N はこの順に等比数列をなす。これを証明せよ。

(解説)
(1) 2，a，b がこの順に等差数列より
$2a=2+b \quad \therefore b=2a-2 \cdots$①
a，b，9 がこの順に等比数列より
$b^2=9a \quad \cdots\cdots$ ②
①，②より
$4(a-1)^2=9a$
$4a^2-17a+4=0$
$(4a-1)(a-4)=0 \quad \therefore a=\dfrac{1}{4}，4$
$a=\dfrac{1}{4}$ のとき $b=-\dfrac{3}{2}$，$a=4$ のとき $b=6$
(2) (ア) a^l，a^m，a^n がこの順に等比数列であるとき
$(a^m)^2=a^l\cdot a^n \quad a^{2m}=a^{l+n}$
$\therefore 2m=l+n \quad \therefore n-m=m-l$
よって，l，m，n はこの順に等差数列をなす
(イ) $\log_a L$，$\log_a M$，$\log_a N$ がこの順に等差数列であるとき
$2\log_a M=\log_a L+\log_a N$

$\log_a M^2 = \log_a LN \quad \therefore M^2 = LN$

$L>0$，$M>0$ から $LM \fallingdotseq 0$ より，両辺を LM で割って

$$\frac{N}{M} = \frac{M}{L}$$

よって，L，M，N はこの順に等比数列をなす

(4) 等比数列の和の公式の応用

等比数列の和の公式を利用すると，次の因数分解の公式を導くことができます。

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$$

$x \fallingdotseq 1$ とすると，

$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}$ は初項が 1，公比が x の等比数列の和より

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

両辺に $x-1$ をかければ，最初に式が得られます。

これは $x=1$ のときも成り立ちます。

また，最初の式に $x = \frac{a}{b}$ $(a \fallingdotseq b)$ を代入すると

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right\}$$

両辺に b^n をかけて

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

が成り立ちます。この等式は

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

…

を一般化したものです。

また，等比数列の和の公式は複利計算等にも利用されます。

例9 年利率を r とする複利法により，毎年の初めに a 円ずつ n 年間積み立てるとき，第 n 年末における積立金の元利合計 S(円)を求める式を作れ. なお，複利法とは前年末の利子込み残高に対して (1＋利率) を掛けていく方法である.

(解説)

1 年目に積み立てた a 円は第 n 年末には $a(1+r)^n$ 円

2 年目に積み立てた a 円は第 n 年末には $a(1+r)^{n-1}$ 円

…

n 年目に積み立てた a 円は第 n 年末には $a(1+r)$ 円になる

第 n 年末における積立金の元利合計 S はこれらの和より

$$S=a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots+a(1+r)^n$$
$$=a(1+r)\cdot\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

例10

(1) 年利 5 % の 1 年ごとの複利で，毎年の初めに 20 万円ずつ積み立てるとき，元利合計は，1 万円未満を切り捨てると，2 年後には 43 万円となり，7 年後には $\boxed{}$ 万円となる。ただし，$(1.05)^7=1.4071$ とする。

(2) 100 万円を年 8% の複利で借り，年末に一定額 α 円を返済し，10 年ですべてを返済するようにしたい．α 円の千円未満を切り捨てした金額は $\boxed{}$ 千円である．ただし，$1.08^{10}=2.158925$ として計算すること．

(解説)

(1) 7 年後の元利合計 S は

$$S=200000\cdot1.05^7+200000\cdot1.05^6+\cdots\cdots+200000\cdot1.05$$
$$=200000(1.05+1.05^2+1.05^3+\cdots\cdots+1.05^7)$$
$$=200000\cdot\frac{1.05(1.05^7-1)}{1.05-1}$$
$$=200000\cdot\frac{1.05(1.4071-1)}{0.05}$$
$$=200000\cdot21\cdot0.4071=1709820$$

1 万円未満を切り捨てると，7 年後には 170 万円となる

(2) 返済分を無視すれば 10 年後の残債は $1000\cdot1.08^{10}$ 千円となるが

実際には毎年 a 千円ずつ返済していて，この $1000\cdot1.08^{10}$ 千円には

第 1 年末に返済した a 千円は第 10 年末には 1.08^9a 千円

第 2 年末に返済した a 千円は第 10 年末には 1.08^8a 千円

…

第 10 年末に返済した a 千円は第 10 年末には a 千円となるものが含まれていることに注意して

$$\alpha+1.08\alpha+1.08^2\alpha+\cdots+1.08^9\alpha=1000\cdot 1.08^{10}$$

$$(1+1.08+1.08^2+\cdots+1.08^9)\alpha=1000\cdot 1.08^{10}$$

$$\frac{1.08^{10}-1}{1.08-1}\alpha=1000\cdot 1.08^{10}$$

$$\therefore\ \alpha=80\cdot\frac{1.08^{10}}{1.08^{10}-1}=80\cdot\frac{2.158925}{1.158925}=149.\cdots$$

千円未満を切り捨てした金額は 149 千円

確認問題1

$\{a_n\}$ を初項 3，公比 3 の等比数列とし，$\{b_n\}$ を初項 5，公差 4 の等差数列とする。$\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=$ ア $\boxed{}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であり，$\{b_n\}$ の一般項は，$b_n=$ イ $\boxed{}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ である。また，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通して含まれる数を小さいものから順に並べた数列を $\{c_n\}$ とすると，$c_1=$ ウ $\boxed{}$ であり，$\{c_n\}$ の一般項は，$c_n=$ エ $\boxed{}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ である。

解説

$\{a_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列より，$a_n=3\cdot 3^{n-1}=$ ア 3^n

$\{b_n\}$ は初項 5，公差 4 の等差数列より，$b_n=5+4(n-1)=$ イ $4n+1$

$\{a_n\}$ ： 3，9，27，…，$\{b_n\}$ ： 5，9，13，… より，$c_1=$ ウ 9

$\{a_n\}$ の第 l 項が $\{b_n\}$ の第 m 項に等しいとすると

$$3^l=4m+1$$

このとき

$$a_{l+1}=3^{l+1}=3^l\cdot 3=(4m+1)\cdot 3=4\cdot 3m+3 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，a_{l+1} は $\{b_n\}$ の項に含まれない

$$a_{l+2}=3a_{l+1}=4\cdot 9m+9=4(9m+2)+1$$

よって，a_{l+2} は $\{b_n\}$ の項に含まれる

a_2 は $\{b_n\}$ の項に含まれるから

$$\{c_n\} ： a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots$$

よって

$$c_n=a_{2n}=\text{エ}\ 3^{2n}$$

別解

$$3^n=(4-1)^n={}_n\mathrm{C}_0\cdot 4^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 4^{n-1}\cdot(-1)+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot(-1)^n$$
$$=4N+(-1)^n\ (N は整数)$$

n が偶数のとき，$3^n=4N+1$

n が奇数のとき，$3^n=4N-1$

より，n が偶数のとき，a_n は $\{b_n\}$ の項に含まれる

確認問題2

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を T_n とすると，

$$T_n=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

と表される．数列 $\{T_n\}$ が初項 1，公差 2 の等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．また，数列 $\{T_n\}$ が初項 1，公比 2 の等比数列であるとき，一般項 a_n を求めよ．

解説

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=nT_n$ より

$n=1$ のとき， $a_1=T_1$

$n\geqq 2$ のとき， $a_n=nT_n-(n-1)T_{n-1}$，

数列 $\{T_n\}$ が初項 1，公差 2 の等差数列であるとき

$$T_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$$

$n=1$ のとき，$a_1=T_1=1$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=n(2n-1)-(n-1)\{2(n-1)-1\}=4n-3$$

$n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=4n-3\ (\ n\geqq 1\ )$$

数列 $\{T_n\}$ が初項 1，公比 2 の等比数列であるとき

$$T_n=2^{n-1}$$

$n=1$ のとき，$a_1=T_1=1$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=n2^{n-1}-(n-1)2^{n-2}=(n+1)2^{n-2}$$

$n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=(n+1)2^{n-2}\ (\ n\geqq 1\ )$$

確認問題3

三角形 ABC の 3 辺 BC，CA，AB の長さがこの順に等比数列をなすとき，∠B の最大値を求めよ．

(解説)

BC＝a，公比を r とおくと，CA＝ar，AB＝ar^2

余弦定理より

$$\cos B=\frac{(ar^2)^2+a^2-(ar)^2}{2\times ar^2\times a}=\frac{a^2r^4+a^2-a^2r^2}{2a^2r^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}-1\right)$$

相加相乗平均より

$$\geqq\frac{1}{2}\left(2\sqrt{r^2\times\frac{1}{r^2}}-1\right)=\frac{1}{2}$$

等号成立は $r^2=\dfrac{1}{r^2}$，すなわち $r=1$ のとき

このとき，三角形 ABC は正三角形となる (三角形になっているか確認)

$0°<B<180°$ で $\cos B$ は単調減少であるから

$\cos B$ が最小であるとき ∠B は最大となる

よって，$\cos B=\dfrac{1}{2}$ のとき ∠B は最大で

∠B の最大値は $60°$

確認問題4

r は 1 と異なる正の実数で 1，r^2，r^3 がこの順に等差数列になっているものとする。

(1)　r の値を求めよ。さらに，2，r，r^2 の大小関係を調べよ。

(2)　自然数 m に対し，1，r^m，r^{m+2} はこの順で等差数列にはならないことを示せ。

(3)　1，r^m，r^n がこの順に等差数列になるような自然数の組 $(m,\ n)$ は，$(m,\ n)=(2,\ 3)$ 以外には存在しないことを示せ。

(解説)

(1) 1，r^2，r^3 がこの順で等差数列より

$2r^2=r^3+1$

$r^3-2r^2+1=0$

$(r-1)(r^2-r-1)=0$

$r>0, r\neq 1$ より， $r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

また， $r^2=r+1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ より

$r<2<r^2$

(2) 1，r^m，r^{m+2} はこの順で等差数列になるとすると

$2r^m=r^{m+2}+1$

$r^m(r^2-2)=-1$

$r>0$ であり，(1)より， $r^2-2>0$ であるから矛盾

よって，1，r^m，r^{m+2} はこの順で等差数列にはならない

(3) 1，r^m，r^n がこの順で等差数列になるとき

$r>1$ から $r^m>1$ より， $r^n>r^m$ であるから $n>m$

$2r^m=r^n+1$

$r^m(r^{n-m}-2)=-1$

$r>1$ であるから， r^x は単調増加である

(2)より $n-m\geqq 2$ のとき $r^{n-m}>2$ となるから，この等式を満たす (m, n) は存在しない

存在するのであれば， $n-m=1$ のときである

このとき

$r^m(r-2)=-1$

$r-2=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $r^2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ であるから，

このとき， $r^m(r-2)=-1$

よって， $m=2$ のときこの等式は成り立ち， このとき $n=3$ である

r^m は単調増加であるから，これを満たす m はこの他には存在しない

したがって，題意は示された

確認問題5

年利率が 10 % の 1 年ごとの複利法による預金を考える。ここで，1 年ごとの複利法とは，1 年ごとに利息を元金に加えていく利息計算方法である。

(1)　100 万円を預金したとき，4 年後の元利合計を求めよ。

(2)　10 万円を預金し，1 年後に 10 万円を追加して預金し，2 年後に 10 万円を追加して預金し，…… ということを繰り返す。n 年後 (n は自然数) に預金した時点での元利合計を S_n とする。S_n を求めよ。

(3)　100 万円を預金したときの n 年後の元利合計を T_n とする。S_n が T_n より大きくなる最小の n を求めよ。ただし，$\log_{10}1.1=0.0414$ とする。

(解説)

(1) $1000000\times(1.1)^4=1464100$ 円

(2) $S_n=10\times(1.1)^n+10\times(1.1)^{n-1}+\cdots\cdots+10\times1.1+10$

$$=\frac{10\times\{(1.1)^{n+1}-1\}}{1.1-1}$$

$=100\times\{(1.1)^{n+1}-1\}$ 万円

(3) $T_n=100\times(1.1)^n$ 万円より

$100\times\{(1.1)^{n+1}-1\}>100\times(1.1)^n$

$(1.1)^n(1.1-1)>1$

$(1.1)^n>10$

両辺底 10>1 の対数をとって

$n\log_{10}1.1>1$

$$\therefore n>\frac{1}{\log_{10}1.1}=\frac{1}{0.0414}=24.15\cdots$$

よって，求める最小の n は $n=25$