3.6　いろいろな数列(2)

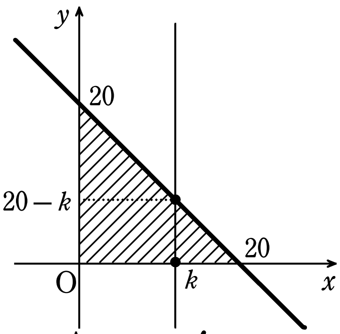
(1) 格子点の個数

　座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 (x,y) を**格子点**といいます。ここでは領域内の格子点の個数を数える問題について考えます。

> **例1**
> 座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点 (x,y) を格子点という．
> (1)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 (x,y) の個数を求めよ．
> (2)　$y \geqq 0$, $y \leqq 2x$, $x+2y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 (x,y) の個数を求めよ．

(解説)

(1) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq 20$ を満たす領域は図の斜線部。ただし，境界は含む



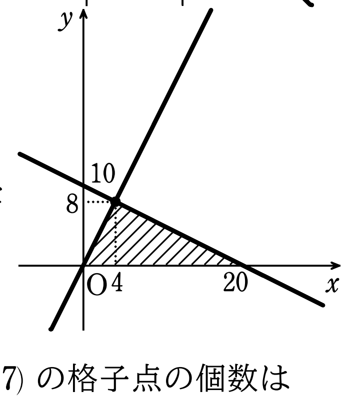
この領域における $x=k$ $(0 \leqq k \leqq 20)$ の格子点の個数は

$$(20-k)+1=21-k$$

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{20}(21-k)=\sum_{i=1}^{21} i=\frac{21 \cdot 22}{2}=231 \text{ 個}$$

(2) $y \geqq 0$，$y \leqq 2x$，$x+2y \leqq 20$ を満たす領域は図の斜線部。ただし，境界は含む



この領域を 3 点 (0，0)，(4，0)，(4，8) を頂点とする三角形と 3 点 (4，0)，(4，8)，(20，0) を頂点とする三角形に分けて考えて

領域内の $x=m$ $(0 \leqq m \leqq 4)$ の格子点の個数は

$$2m+1$$

領域内の $5 \leqq x \leqq 20$ において，$y=n$ $(0 \leqq n \leqq 7)$ の格子点の個数は

$$(20-2n)-4=16-2n$$

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{m=0}^{4}(2m+1)+\sum_{n=0}^{7}(16-2n)=2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2}+5+16 \cdot 8-2 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2}=97 \text{ 個}$$

別解

(1) $x \leqq 20$，$y \leqq 20$，$x+y \geqq 20$ という領域を考え，
この領域と合わせると，
$0 \leqq x \leqq 20, 0 \leqq y \leqq 20$ という正方形の領域になる
この正方形の領域内の格子点の個数は

$21 \cdot 21 = 441$ 個

このとき，$x+y=20$ 上にある格子点は 1 回しか数えていないので，
$x+y=20$ 上にある格子点を 1 回分足して，求める格子点の個数は

$\frac{1}{2} \cdot (441+21) = 231$ 個

(2) 同様に

$\frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 9 + 5) + \frac{1}{2} \cdot (17 \cdot 9 + 9) - 9 = 25 + 81 - 9 = 97$ 個

(引いた 9 は，$x=4$ 上の格子点を 2 回数えてしまったので 1 回分引く)

領域内の格子点の個数を数える問題は，まず $x=k$ か $y=l$ (k, l は整数) における格子点の個数を数え，領域内に格子点が存在する k, l の範囲でそれらを足し合わせれば求めることができます。

例2

1 以上の整数 m に対して，直線 $y=mx$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域を D_m とする．ただし，D_m は境界を含む．また，領域 D_m に含まれる格子点の個数を d_m とおく．ここで，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数になる点のことである．

(1) d_1，d_2，d_3 を求めよ．

(2) $0 \leqq k \leqq m$ である整数 k に対して，直線 $x=k$ 上の格子点で領域 D_m に含まれるものの個数を m と k の式で表せ．

(3) d_m を m の式で表せ．

解説

(1) D_1 に含まれる格子点は

$(0, 0)$，$(1, 1)$

よって，$d_1 = 2$

D_2 に含まれる格子点は

　(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 4)

よって, $d_2=4$

D_3 に含まれる格子点は

　(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 9)

よって, $d_3=8$

(2) 直線 $x=k$ と放物線 $y=x^2$ の交点の座標は $(k,\ k^2)$

直線 $x=k$ と直線 $y=mx$ の交点の座標は $(k,\ mk)$ より

求める格子点の個数は, $mk-k^2+1$

(3) $$d_m=\sum_{k=0}^{m}(mk-k^2+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(mk-k^2+1)+1=m\sum_{k=1}^{m}k-\sum_{k=1}^{m}k^2+m+1$$
$$=m\cdot\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+m+1$$
$$=\frac{(m+1)(m^2-m+6)}{6}$$

例3 条件 $0\leqq m\leqq 500$, $0\leqq n\leqq\sqrt{m}$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ はいくつあるか.

(解説)

条件より, (m, n) は

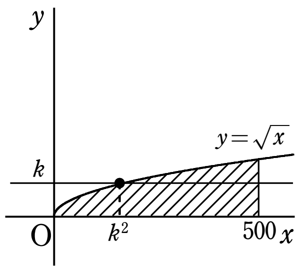
領域 $0\leqq x\leqq 500, 0\leqq y\leqq\sqrt{x}$ 内の格子点である

$0\leqq y\leqq\sqrt{x}$ より, $y^2\leqq x$

$y=k$ における領域内の格子点の個数は

$22^2=484$, $23^2=529$ より $0\leqq k\leqq 22$ において

　$500-k^2+1=501-k^2$



よって, (m, n) の個数は

$$\sum_{k=0}^{22}(501-k^2)=501\cdot 23-\sum_{k=1}^{22}k^2$$
$$=501\cdot 23-\frac{1}{6}\cdot 22\cdot 23\cdot 45=23\cdot(501-165)=7728 \text{ 個}$$

例4

xy 平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに整数の点を格子点という。

(1)　領域 $\{(x,\ y)|1\leqq x$ かつ $2^x\leqq y\leqq 2^2\}$ に含まれるすべての格子点の座標を求めよ。更に，これらの格子点を xy 平面上に図示せよ。

(2)　領域 $\{(x,\ y)|1\leqq x$ かつ $2^x\leqq y\leqq 2^3\}$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

(3)　領域 $\{(x,\ y)|1\leqq x$ かつ $2^x\leqq y\leqq 2^n\}$ に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，n は自然数である。

解説

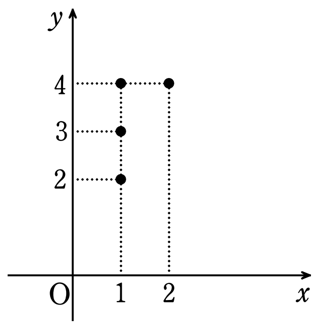
(1) $x=1$ のとき，$2\leqq y\leqq 4$

$x=2$ のとき，$y=4$

よって，求める格子点の座標は

$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 4)$

これらの格子点を図示したものは右図



(2) 同様にして

$7+5+1=13$ (個)

(3) 領域は図の斜線部。ただし，境界は含む

$x=k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ における格子点の個数は

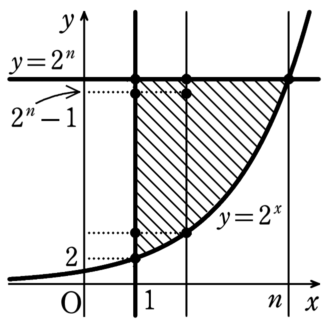
2^n-2^k+1 個

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^n-2^k+1)=(2^n+1)n-\sum_{k=1}^{n}2^k$$

$$=(2^n+1)n-\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$

$$=(2^n+1)n-2^{n+1}+2\ \text{(個)}$$



例5

座標平面上で，曲線 $y=\log_2 x$，直線 $x=2^8+1$ および x 軸で囲まれた図形を S とする。S 内の x 座標，y 座標がともに整数となる点の個数は $\boxed{}$ である。ただし，S の境界線上にある点は含めないとする。

解説

図形 S は図の斜線部

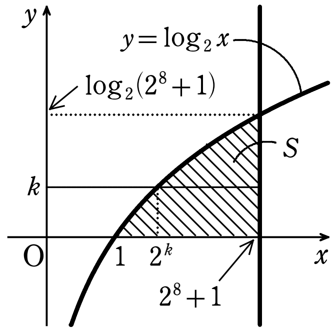
$2^8<2^8+1<2^9$ より，　$8<\log_2(2^8+1)<9$

$y=k\ (k=1, 2, \cdots, 8)$ における格子点の個数は

　(2^8-2^k) 個

よって，求める点の個数は

$$\sum_{k=1}^{8}(2^8-2^k)=8\cdot 2^8-\frac{2(2^8-1)}{2-1}$$
$$=6\cdot 2^8+2=1538 \text{ 個}$$



例6

(1)　$x+y\leqq n,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ．

(2)　$x+y+z\leqq n,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ を満たす整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ．

解説

(1) $x+y\leqq n,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を満たす領域内の

$x=k\ (k=0, 1, 2, \cdots, n)$ における格子点の個数は

　$n-k+1$ 個

よって，求める整数の組 (x, y) の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)=\sum_{l=1}^{n+1}l=\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \text{ 個}$$

別解

$x+y\geqq n,\ x\leqq n,\ y\leqq n$ を満たす領域を合わせて考えて，

求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(n+1)+(n+1)\}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(2) $x+y+z\leqq n,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ を満たす領域内の

$z=m\ (m=0, 1, 2, \cdots, n)$ における格子点の個数は

$z=m$ のとき

　$x+y\leqq n-m,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

を満たす領域内の格子点の個数であるから

(1)より

$$\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)=\frac{1}{2}\{m-(n+1)\}\{m-(n+2)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{m^2-(2m+3)m+(n+1)(n+2)\}$$

よって，求める整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2}\{m^2-(2m+3)m+(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{m=0}^{n}m^2-(2n+3)\sum_{k=0}^{n}m+(n+1)(n+2)\sum_{k=0}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)^2(n+2)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)\{n(2n+1)-3n(2n+3)+6(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)(2n^2+10n+12)=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)\text{ 個}$$

参考

$x+y+z=n$ は座標空間内において，3 点 $(n,0,0)$, $(0,n,0)$, $(0,0,n)$ を通る平面を表します。したがって， $x+y+z\leqq n$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$ の表す空間内の領域は， $x+y+z=n$ と xy 平面， yz 平面， zx 平面とで囲まれた部分の領域となります。

(2) **群数列**

ある数列を一定の規則に従って群に分けたものを**群数列**といいます。群数列には

1. 数列全体に一定の規則があり，それをある規則に従って群に分けたもの
2. 群ごとに規則があり，それらが集まって数列全体を成しているもの

の 2 種類あります。

例7
自然数の列を次のように群に分け，第 n 群には連続する n 個の自然数が入るようにする。

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10 \mid 11,\ \cdots\cdots$$

(1)　自然数 29 は第何群に入るか。
(2)　第 n 群に入る最小の自然数と最大の自然数を n を用いて表せ。
(3)　自然数 2017 は第何群に入るか。

解説

(1) 第 n 群の最後の項は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{第 } \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 項}$$

自然数 29 は第 29 項であるから，第 n 群 ($n \geqq 2$) に入るとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<29 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \quad \therefore (n-1)n<58 \leqq n(n+1)$$

$7 \cdot 8=56$，$8 \cdot 9=72$ より，　$n=8$
よって，29 は第 8 群に入る (第 8 群の第 1 番目)

(2) $n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の最後の項は $\frac{1}{2}(n-1)n$ である
第 n 群に入る最小の自然数は第 n 群の最初の項であるから

$$\frac{1}{2}(n-1)n+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。
第 n 群に入る最大の自然数は，第 n 群の最後の項であるから

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

(3) 2017 が第 n 群 ($n \geqq 2$) に入るとすると，

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 2017 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \qquad \therefore (n-1)n < 4034 \leqq n(n+1)$$

$63 \cdot 64 = 4032$，$64 \cdot 65 = 4160$ より， $n = 64$

よって，2017 は第 64 群に入る (第 64 群の第 1 番目)

例8 数列の項が，次のように第 m 群は m 個の数からなるように分けられている。 1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，23，25，27，29 | 31，…… (1)　第 17 群の最後の数を求めよ。 (2)　第 17 群の 17 個の数の和を求めよ。

(解説)

(1) この数列の一般項 a_n は

$$a_n = 2n-1$$

第 17 群の最後の項は

$$1+2+3+\cdots+17 = \frac{1}{2}\cdot 17 \cdot 18 = 153 \quad \text{第 153 項}$$

よって，第 17 群の最後の数は

$$a_{153} = 305$$

(2) 第 17 群の最初の項は第 137 項で， $a_{137} = 273$

よって，第 17 群の 17 個の数の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 17 \cdot (273+305) = 4913$$

例9 次の数列の第 n 項を a_n とする。 1，1，2，1，2，3，1，2，3，4，1，2，3，4，5，1，…… このとき，$a_{450} = {}^{ア}\boxed{}$ である。また，自然数 m に対して，$a_n = m$ となる最小の自然数 n を m を用いて表すと $n = {}^{イ}\boxed{}$ である。

(解説)

1 | 1，2 | 1，2，3 | 1，2，3，4 | 1，…

のように区切り，初めの群から第 1 群，第 2 群，… とすると

第 n 群には1から n までの n 個の項が含まれている
第 n 群の最後の項は

$$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad 第\ \frac{1}{2}n(n+1)\ 項$$

第450項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<450\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$\frac{1}{2}\cdot29\cdot30=435$，$\frac{1}{2}\cdot30\cdot31=465$ より，　$n=30$
よって，第450項は第30群の $450-435=15$ 番目の数より

$$a_{450}={}^{ア}15$$

また，m が初めて現れるのは第 m 群の最後の項であるから

$$n={}^{イ}\frac{1}{2}m(m+1)$$

例10
正の整数 k に対して，a_k を $\sqrt{k}$ の整数部分とする。例えば，$a_2=1$，$a_4=2$，$a_8=2$ である。

(1)　$\sum_{k=1}^{15}a_k$ の値を求めよ。

(2)　m を正の整数とするとき，$a_k=m$ となる k の個数を m を用いて表せ。

(3)　$\sum_{k=1}^{1000}a_k$ の値を求めよ。

(解説)
(1) $a_k=m$ (m は正の整数) となるような k の範囲は
$m\leqq\sqrt{k}<m+1$ より，　$m^2\leqq k<(m+1)^2$
$1\leqq k\leqq3$ のとき，　$a_k=1$
$4\leqq k\leqq8$ のとき，　$a_k=2$
$9\leqq k\leqq15$ のとき，　$a_k=3$
よって

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=3\cdot1+5\cdot2+7\cdot3=34$$

(2) $a_k=m$ となるような正の整数 k の値の個数は

$(m^2+2m)-m^2+1=2m+1$ (個)

(3) 数列 $\{a_n\}$ において，数字が変わるところで区切り，

初めの群から第 1 群，第 2 群，… とする

第 m 群には m が $2m+1$ 個並んでいる

第 m 群の最後の項は

$$\sum_{i=1}^{m}(2i+1)=m(m+1)+m=m(m+2) \quad \text{第 } m(m+2) \text{ 項}$$

$30\cdot 32=960,\ 31\cdot 33=1023$ から $30\cdot 32<1000\leqq 31\cdot 33$ より

a_{1000} は第 31 群の第 40 番目の項である

第 m 群の項の和は，$m(2m+1)$

$$\sum_{k=1}^{1000}a_k=\sum_{j=1}^{30}j(2j+1)+31\cdot 40$$

$$=2\sum_{j=1}^{30}j^2+\sum_{j=1}^{30}j+31\cdot 40$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot 30\cdot 31\cdot 61+\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 31+31\cdot 40$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 31\cdot(20\cdot 61+30+80)=31\cdot 665=20615$$

別解

$1\leqq x\leqq 1000,\ 0<y\leqq\sqrt{x}$ 内の格子点の個数として考えてもよい。

例11

有理数列

$$(*)\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots\cdots$$

について，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $(*)$ の $\dfrac{37}{50}$ は第何項になるか。

(2) 数列 $(*)$ の第 1000 項の数を求めよ。

(3) 初項から第 1000 項までの和を求めよ。

解説

分母が等しいものを群として，区切って考える

(1) 第 n 群は $\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{2}{n+1},\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1}$ となる

$\dfrac{37}{50}$ は第 49 群の 37 番目の項である

第 48 群の最後の項は

$$1+2+\cdots\cdots+48=\frac{1}{2}\cdot 48\cdot 49=1176 \quad \text{第 } 1176 \text{ 項}$$

よって，$\dfrac{37}{50}$ は

$$1176+37=1213 \quad \text{第 } 1213 \text{ 項}$$

(2) 第 n 群の最後の項は

$$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{第 } \frac{1}{2}n(n+1) \text{ 項}$$

よって，第 1000 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<1000\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$\dfrac{1}{2}\cdot 44\cdot 45=990$，$\dfrac{1}{2}\cdot 45\cdot 46=1035$ より，$n=45$

したがって，第 1000 項は第 45 群の $1000-990=10$ 番目の数より

$$\frac{10}{46}$$

(3) 第 n 群の項の和は

$$\frac{1}{n+1}(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n}{2}$$

よって，初項から第 1000 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{44}\frac{k}{2}+\frac{1}{46}(1+2+\cdots\cdots+10)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 44\cdot 45+\frac{1}{46}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11$$

$$=495+\frac{55}{46}=\frac{22825}{46}$$

例12

自然数を右の図のように並べる．

(1)　n が偶数のとき，1番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ．

(2)　n が奇数のとき，1番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ．

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか．

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

(解説)

(1) 1| 2, 3| 4, 5, 6| 7, 8, 9, 10| 11, … というように区切って考えて，
初めの群から第 1 群，第 2 群，… とする
n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数は
第 n 群の最後の数より，

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad 第\ \frac{1}{2}n(n+1)\ 項$$

よって，求める数は $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項

(2) n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数は
第 n 群の最初の数より

$$\frac{1}{2}(n-1)n+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

(3) $\frac{1}{2}\cdot 44\cdot 45=990, \frac{1}{2}\cdot 45\cdot 46=1035$ より
1000 は第 45 群の第 10 番目である
45 は奇数であるから
第 45 群の最初の数 991 は左から 45 番目の上から 1 段目にある
第 45 群の数は 1 増えるにつれて左下に 1 つずつ配置されるから
1000 は左から $45-9=36$ 番目の上から 10 段目にある

確認問題1

(1)　k を 0 以上の整数とするとき，

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k$$

を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする。a_k を k の式で表せ。

(2)　n を 0 以上の整数とするとき，

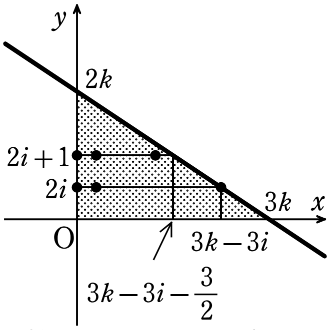
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z\leqq n$$

を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を b_n とする。b_n を n の式で表せ。

解説

(1) 不等式の表す領域は図の斜線部

ただし，境界を含む



$$a_k=\frac{1}{2}\{(3k+1)(2k+1)+(k+1)\}$$

(直線上は y 座標が偶数のときのみ格子点)

$$=\frac{1}{2}(6k^2+6k+2)=3k^2+3k+1$$

(2) $x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$，$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z\leqq n$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ について，$0\leqq z\leqq n$ である

$z=j$ $(j=0,1,2,\cdots,n)$ のとき，x，y は

$$x\geqq0,\ y\geqq0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq n-j$$

を満たすから，組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は (1) より

$$3(n-j)^2+3(n-j)+1$$

よって

$$b_n=\sum_{j=0}^{n}\{3(n-j)^2+3(n-j)+1\}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(3l^2+3l+1)\quad (n-j=l)$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{n(2n+1)+3n+2\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+4n+2)=(n+1)^3$$

確認問題2

n を自然数とする．

(1)　$|x|+|y| \leqq n$ となる2つの整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．

(2)　$|x|+|y|+|z| \leqq n$ となる3つの整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．

解説

(1) $x=k\ (0 \leqq k \leqq n)$ のとき

$|y| \leqq n-k$

$-n+k \leqq y \leqq n-k$

これを満たす整数 y の個数は

$n-k-(-n+k)+1=2(n-k)+1$

よって，求める個数は，線対称性より

$$(2n+1)+2\sum_{k=1}^{n}\{2(n-k)+1\}$$

$$=2n+1+4\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)-2n=1+4\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=2n^2+2n+1$$

(2) $z=k\ (0 \leqq k \leqq n)$ のとき

$|x|+|y| \leqq n-k$

これを満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数は，(1)より

$2(n-k)^2+2(n-k)+1$

よって，求める個数は，面対称性より

$$(2n^2+2n+1)+2\sum_{k=1}^{n}\{2(n-k)^2+2(n-k)+1\}$$

$$=2n^2+2n+1+4\sum_{i=1}^{n}i^2-4\sum_{i=1}^{n}i+2n$$

$$=\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2+2n+3)$$

確認問題3
正の整数 k に対して，a_k を $\sqrt{k}$ にもっとも近い整数とする．
例えば $a_5=2$，$a_8=3$，$a_{20}=4$ である．
(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{12}$ を求めよ．
(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1998} a_k = a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{1998}$ を求めよ．

解説

$a_k=n$ (n は自然数) のとき

$$n-\frac{1}{2}<\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$$

$$\therefore n^2-n+\frac{1}{4}<k<n^2+n+\frac{1}{4}$$

n，k は自然数より

$$n^2-n+1\leqq k\leqq n^2+n$$

よって，$a_k=n$ となる k の値は

$$(n^2+n)-(n^2-n+1)+1=2n \text{ (個)}$$

ある

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} a_k=1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 6=28$

(2) $n^2-n+1\leqq 1998\leqq n^2+n$ のとき
$n(n-1)\leqq 1997$，$n(n+1)\geqq 1998$ となればよいから
$45\times 44=1980$，$45\times 46=2070$ より $n=45$
また， $a_k=44$ となる最後の項は第 $44^2+44=1980$ 項
よって

$$\sum_{k=1}^{1998} a_k=\sum_{i=1}^{44} i\times 2i+45\times(1998-1980)$$

$$=2\times\frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 89+45\times 18=58740+810=59550$$

確認問題4

自然数 1，2，3，…… を，右図のように並べていく．

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

(1)　左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ．

(2)　90 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか．

(3)　自然数 n を $n=k^2+l$ (k は負でない整数，$1 \leqq l \leqq 2k+1$) と表すとき，n は左から何番目，上から何番目の位置にあるか，k，l を用いて表せ．

解説

(1) $1|\ 2, 3, 4|\ 5, 6, 7, 8, 9|\ 10, 11, \cdots$ というように区切って考えて，

初めの群から第 1 群，第 2 群，… とする

左から m 番目，上から m 番目の項は

第 m 群の第 m 番目であるから

$$(m-1)^2+m=m^2-m+1$$

(2) 第 m 群の最後の数は

$$1+3+5+\cdots+(2m-1)=m^2$$

$9^2=81, 10^2=100$ より

90 は第 10 群の第 $90-81=9$ 番目の数である

よって，90 は左から 10 番目，上から 9 番目にある

(3) $n=k^2+l$ は第 $k+1$ 群の l 番目の数である

(ｉ) $1 \leqq l \leqq k+1$ のとき

n は左から $k+1$ 番目，上から l 番目にある

(ii) $k+2 \leqq l \leqq 2k+1$ のとき

n は左から $2k+1-l+1=2k-l+2$ 番目，上から $k+1$ 番目にある