3.8　漸化式(2)

⑩ 分数型(一般型)

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $(r,\ ps-qr\fallingdotseq 0)$ から一般項を求める方法を考えます。

$b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$ $\left(\alpha\fallingdotseq\dfrac{p}{r},\ -\dfrac{s}{r}\right)$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-\alpha}=\frac{1}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}=\frac{ra_n+s}{(pa_n+q)-\alpha(ra_n+s)}$$

$$=\frac{ra_n+s}{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}=\frac{ra_n+s}{(p-r\alpha)\left(a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}\right)}$$

ここで，$\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ となるように α を定めると

$$=\frac{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s}{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}=\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}b_n+\frac{r}{p-r\alpha}$$

となり，$b_{n+1}=Ab_n+B$ (⑤型)という形で表せる。

これを利用して b_n を求めて，a_n を求めます。

ここで，$\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ を変形すると

$q-s\alpha=-\alpha(p-r\alpha)$

$\alpha(r\alpha+s)=p\alpha+q$

$\alpha=\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}$

と変形できて，α は $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解である。

この $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換えたもので，

これが $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の特性方程式，α が特性解である。

$x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は，$rx^2+(s-p)x-q=0$ であるから，ふつう解が 2 個出てくるが，α はそのうちのどちらでもよい。

例1

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=3,\ a_n=\dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2}$ $(n\geqq 2)$ により定められるものとする.

この数列は関係式

$$\frac{1}{a_n-\boxed{\text{ア}}}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{a_{n-1}-\boxed{\text{ウ}}}+\boxed{\text{エ}}\quad (n\geqq 2)$$ を満たす.

これより一般項を求めると

$$a_n=\frac{\boxed{\text{オ}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{\,n}+\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}^{\,n}-1}\quad (n\geqq 1)$$ となる.

空欄には自然数を入れよ.

解説

$$\frac{1}{a_n-\alpha}=\frac{1}{\dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2}-\alpha}=\frac{a_{n-1}+2}{3a_{n-1}+2-\alpha(a_{n-1}+2)}$$

$$\frac{a_{n-1}+2}{(3-\alpha)a_{n-1}+2-2\alpha}=\frac{a_{n-1}+2}{(3-\alpha)\left(a_{n-1}+\dfrac{2-2\alpha}{3-\alpha}\right)}$$

$\dfrac{2-2\alpha}{3-\alpha}=-\alpha$ となるように α を定めると

$2-2\alpha=-\alpha(3-\alpha)$

$\alpha^2-\alpha-2=0$

$(\alpha+1)(\alpha-2)=0 \qquad \therefore\ \alpha=-1,2$

空欄に条件に合わせると, $\alpha=2$ より

$$\frac{1}{a_n-2}=\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-2}=\frac{4}{a_{n-1}-2}+1$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ とおくと, $b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=1$

$b_n=4b_{n-1}+1\ (n\geqq 2)$

$b_{n+1}=4b_n+1\ (n\geqq 1)$ $\left(\ x=4x+1 \qquad x=-\dfrac{1}{3}\ \right)$

$$b_{n+1}+\frac{1}{3}=4\left(b_n+\frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n+\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$，公比 4 の等比数列より

$$b_n+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\cdot 4^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=\frac{4^n-1}{3}$$

よって

$$a_n=\frac{1}{b_n}+2=\frac{3+2(4^n-1)}{4^n-1}=\frac{2\cdot 4^n+1}{4^n-1}$$

次のようにしても解けます。

特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$，すなわち $rx^2+(s-p)x-q=0$ が異なる 2 実解をもつとき，2 実解を α, β として，

$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，$\{b_n\}$ は等比数列になります。

このとき，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta}=\frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{pa_n+q-\beta(ra_n+s)}$$

$$=\frac{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}{(p-r\beta)a_n+q-s\beta}=\frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}}$$

α, β は $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解であるから，$x=\alpha, \beta$ を代入して変形して

$$\frac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha,\ \frac{q-s\beta}{p-r\beta}=-\beta,$$

よって，

$$b_{n+1}=\frac{p-s\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\frac{p-s\alpha}{p-r\beta}b_n$$

したがって，$\{b_n\}$ は等比数列になります。

これを利用して a_n を求めます。

例2

条件 $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。漸化式の $a_{n+1},\ a_n$ を x とおくことによってできる方程式の 2 つの解を $\alpha,\beta\,(\alpha<\beta)$ とするとき， $\alpha=$ ア$\boxed{}$, $\beta=$ イ$\boxed{}$ となる。ここで $b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 ウ$\boxed{}$ ，公比 エ$\boxed{}$ の等比数列となるので，数列 $\{b_n\}$ の一般項は， $b_n=$ オ$\boxed{}$ になる。したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は， $a_n=$ カ$\boxed{}$ となる。

解説

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$ の $a_{n+1},\ a_n$ を x とおくと

$$x=\frac{2x+1}{x+2}$$

$$x(x+2)=2x+1$$

$$x^2-1=0$$

$$(x+1)(x-1)=0$$

$\alpha<\beta$ より， $\alpha=-1,\ \beta=1$

$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ とおくと， $b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-1}=3$

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}+1}{\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}-1}=\frac{(2a_n+1)+(a_n+2)}{(2a_n+1)-(a_n+2)}$$

$$=\frac{3(a_n+1)}{a_n-1}=3b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=3$ ，公比 3 の等比数列より

$$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n\ (\ b_n\neq 1\ )$$

$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ から $a_n=\dfrac{b_n+1}{b_n-1}$ より

$$a_n=\frac{3^n+1}{3^n-1}$$

特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が重解をもつときには，上の解法は使えません。

$x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が重解をもつときは重解を α として，

$b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha}$ とおくと，$\{b_n\}$ は等差数列になります。

このとき，はじめの方法より

$$b_{n+1}=\frac{ra_n+s}{(p-r\alpha)\left(a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}\right)}$$

$\alpha=\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}$ から $\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ より

$$=\frac{r(a_n-\alpha)+r\alpha+s}{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}=\frac{s+r\alpha}{p-r\alpha}b_n+\frac{r}{p-r\alpha}$$

ここで，α は $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ ，すなわち $rx^2+(s-p)x-q=0$ が重解より

$$\alpha=-\frac{s-p}{2r} \qquad 2r\alpha=p-s \qquad \therefore\ s+ra=p-r\alpha$$

よって

$$b_{n+1}=b_n+\frac{r}{p-r\alpha}$$

よって，$\{b_n\}$ は等差数列になります。

これを利用して a_n を求めます。

例3

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=7$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$，$n=1$，$2$，$3$，…… を満たす。

(1)　すべての自然数 n に対し，$a_n>3$ であることを示せ。

(2)　自然数 n に対し，$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおく。b_{n+1} と b_n との関係を求めよ。

(3)　a_n を n で表せ。

解説

(1)(ｉ) $n=1$ のとき

$a_1=7>3$　成り立つ

(ii) $n=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_k > 3$
$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$a_{k+1}-3=\frac{4a_k-9}{a_k-2}-3=\frac{a_k-3}{a_k-2}>0$$

$\therefore\ a_{k+1}>3$
よって，$n=k+1$ のときにも成り立つ
(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より
すべての自然数 n について成り立つ

(2) $$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{1}{\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}-3}=\frac{a_n-2}{4a_n-9-3(a_n-2)}$$

$$=\frac{a_n-2}{a_n-3}=\frac{(a_n-3)+1}{a_n-3}=\frac{1}{a_n-3}+1=b_n+1$$

(3) $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=\dfrac{1}{4}$，公差 1 の等差数列より

$$b_n=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot 1=n-\frac{3}{4}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ であるから $a_n=\dfrac{1}{b_n}+3$ より

$$a_n=\frac{1}{n-\dfrac{3}{4}}+3=\frac{12n-5}{4n-3}$$

(2) 3 項間漸化式

$p, q \fallingdotseq 0$ とするとき，漸化式 $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ は a_n, a_{n+1}, a_{n+2} の隣接する 3 項の間の漸化式なので，(隣接) 3 項間漸化式といいます。初めの 2 つの項とこの漸化式により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項の求め方について考えます。

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の p, q をうまく分けて
$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ …①
と変形すると，$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は初項 $a_2-\alpha a_1$，公比 β の等比数列となるので，これを利用して一般項を求めることができます。ここで，α, β の値が必要になりますが，①は
$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$
と変形でき，もとの式と比べて，

$p=-(\alpha+\beta),\ q=\alpha\beta \quad \therefore\ \alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$

よって，α,β は $t^2+pt+q=0$ の解です。

この $t^2+pt+q=0$ という方程式は，$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の a_{n+2} を t^2，a_{n+1} を t，a_n を 1 に置き換えたもので，この方程式が $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式であり，α,β が特性解です。

例4

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\ a_2=5,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=a_n+12a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$，および，$a_1=3$，$a_2=10$ を満たすとき，a_n を n の式で表せ.

解説

(1) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ ($t^2=3t-2 \quad \therefore\ t=1,2$)

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ …①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$ …②

①から数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=2$，公比 2 の等比数列より

$a_{n+1}-a_n=2\cdot 2^{n-1} \quad \therefore\ a_{n+1}-a_n=2^n$ …③

② から数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=-1$ の定数列より

$a_{n+1}-2a_n=-1$ …④

③−④より

$a_n=2^n+1$

別解

③より $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が求まるので，それを利用して a_n の一般項を求めることもできる。特性解の 1 つが 1 であるときは，階差数列の一般項を求めることができるので，階差数列を利用して a_n を求めることができる。

(2) $a_{n+1}=a_n+12a_{n-1}$ ($n\geqq 2$)

$a_{n+2}=a_{n+1}+12a_n$ ($n\geqq 1$) ($t^2=t+12 \quad \therefore\ t=4,\ -3$)

$a_{n+2}-4a_{n+1}=-3(a_{n+1}-4a_n)$ …①

$a_{n+2}+3a_{n+1}=4(a_{n+1}+3a_n)$ …②

①から数列 $\{a_{n+1}-4a_n\}$ は初項 $a_2-4a_1=-2$，公比 -3 の等比数列より

$a_{n+1}-4a_n=-2\cdot(-3)^{n-1}$ …③

②から数列 $\{a_{n+1}+3a_n\}$ は初項 $a_2+3a_1=19$ ，公比 4 の等比数列より

$a_{n+1}+3a_n=19\cdot 4^{n-1}$ …④

④−③より

$7a_n=19\cdot 4^{n-1}+2(-3)^{n-1}$　　$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{7}\{19\cdot 4^{n-1}+2(-3)^{n-1}\}$

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ の特性方程式 $t^2+pt+q=0$ が重解をもつときは，式が１つしか作れませんが，それを解いて，そこで得られる漸化式は階差型か⑦のタイプになるので，それを解いて一般項を求めます。

例5

数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとする。

$a_1=1,\ a_2=6,\ a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

(1) $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$　（$t^2=6t-9$　$\therefore\ t=3$ (重解)）

$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくと，$b_1=a_2-3a_1=3$

$b_{n+1}=3b_n$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=3$ ，公比 3 の等比数列より

$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

(2) $b_n=a_{n+1}-3a_n$ より

$a_{n+1}-3a_n=3^n$

$a_{n+1}=3a_n+3^n$

両辺 3^{n+1} で割って

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\frac{1}{3}$，公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列より

$$b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$$

$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ から $a_n=3^n\cdot b_n$ より

$$a_n=n\cdot 3^{n-1}$$

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=f(n)$ ($p, q\fallingdotseq 0$，　$f(x)$ は定数や多項式や指数関数)のタイプの問題は $f(n)$ は無視して $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n$ を例3，例4 と同様に変形して解きます。

例6

$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

解説

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$ (1 は無視して，　$t^2-2t+1=0$　　$\therefore t=1$)

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+1$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，　$b_1=a_2-a_1=1$

$$b_{n+1}=b_n+1$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$，公差 1 の等差数列より

$$b_n=1+(n-1)\cdot 1=n$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=1+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$a_n=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

(2) **連立漸化式**

$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}(n=1, 2, 3, \cdots)(ps-qr \fallingdotseq 0)$ で与えられる漸化式を**連立漸化式**といいます。初めの項と漸化式より定められる $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項の求め方について考えます。 $p=s, q=r$ のとき，係数対称型といい，このとき，$\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}$ は等比数列となり，これを利用して一般項を求めることができます。

例7
数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ で定められている。
このとき，数列 $\{a_n+b_n\}$ の一般項は ア$\boxed{}$，数列 $\{a_n-b_n\}$ の一般項は イ$\boxed{}$ である。したがって，$\{a_n\}$ の一般項は ウ$\boxed{}$，$\{b_n\}$ の一般項は エ$\boxed{}$ である。

解説

$a_{n+1}=2a_n+b_n$ …①

$b_{n+1}=a_n+2b_n$ …②

①+②より

$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=4$，公比 3 の等比数列より

$a_n+b_n=4\cdot 3^{n-1}$ …③

①−②より

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=-2$ の定数列より

$a_n-b_n=-2$ …④

③+④より

$2a_n=4\cdot 3^{n-1}-2 \quad \therefore a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

③−④より

$2b_n=4\cdot 3^{n-1}+2 \quad \therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n \end{cases}$ において， $p\fallingdotseq s$ または $q\fallingdotseq s$ のとき，
$\{a_n+b_n\}$ または $\{a_n-b_n\}$ が等比数列となるときは，それを解いて，その一般項を利用してもとの漸化式に代入し， a_n か b_n を消去して一般項を求めます。
$\{a_n+b_n\}$ も $\{a_n-b_n\}$ も等比数列にならないときは， $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるように k を定めて，一般項 a_n+kb_n を求めて，それを利用して， a_n, b_n を求めます。

例8
2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が
$a_1=2$，$b_1=2$，
$a_{n+1}=6a_n+2b_n$，$b_{n+1}=-2a_n+2b_n$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$
で定められるとき，次の問いに答えよ。
(1)　$c_n=a_n+b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説
(1) $a_{n+1}=6a_n+2b_n$ …①，$b_{n+1}=-2a_n+2b_n$ …②
①+②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$$

$c_n=a_n+b_n$ とおくと， $c_1=a_1+b_1=4$

$$c_{n+1}=4c_n$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=4$ ，公比 4 の等比数列より

$$c_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$$

(2) (1)より， $b_n=4^n-a_n$
①に代入して

$$a_{n+1}=6a_n+2(4^n-a_n)$$

$$a_{n+1}=4a_n+2\cdot 4^n$$

両辺 4^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{2}$$

$d_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと，$d_1=\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$$d_{n+1}=d_n+\frac{1}{2}$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $d_1=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列より

$$d_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$$

$d_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ から $a_n=4^n\cdot d_n$

$$a_n=2n\cdot 4^{n-1}$$

例9

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次のように定義されている。

$$a_1=1,\ b_1=0,$$
$$a_{n+1}=2a_n+6b_n,\ b_{n+1}=3a_n+5b_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるとき，k の値を求めよ。

(2)　(1) で求めた k の値を用いて，数列 $\{a_n+kb_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(解説)

(1) $a_{n+1}+kb_{n+1}=2a_n+6b_n+k(3a_n+5b_n)$

$$=(3k+2)a_n+(5k+6)b_n$$
$$=(3k+2)\left(a_n+\frac{5k+6}{3k+2}b_n\right)$$

数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるとき

$$k=\frac{5k+6}{3k+2}$$

$$k^2-k-2=0$$

$$(k+1)(k-2)=0 \qquad \therefore\ k=-1, 2$$

(2) $k=-1$ のとき

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=1$，公比 -1 の等比数列より

$$a_n-b_n=(-1)^{n-1} \cdots ①$$

$k=2$ のとき

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=8(a_n+2b_n)$$

数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=1$，公比 8 の等比数列より

$$a_n+2b_n=8^{n-1} \cdots ②$$

(4) 2×①+②より

$$3a_n=2\cdot(-1)^{n-1}+8^{n-1} \qquad \therefore\ a_n=\frac{2\cdot(-1)^{n-1}+8^{n-1}}{3}$$

②−①より

$$3b_n=8^{n-1}-(-1)^{n-1} \qquad \therefore\ a_n=\frac{8^{n-1}-(-1)^{n-1}}{3}$$

別解

$a_{n+1}=2a_n+6b_n \cdots ①$，$b_{n+1}=3a_n+5b_n \cdots ②$

①より，$b_n=\dfrac{1}{6}a_{n+1}-\dfrac{1}{3}a_n$

②に代入して

$$\frac{1}{6}a_{n+2}-\frac{1}{3}a_{n+1}=3a_n+5\left(\frac{1}{6}a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n\right)$$

$$a_{n+2}-7a_{n+1}-8a_n=0$$

として，この 3 項間漸化式を解いてもよい。

確認問題1

$a_1=7$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n+3}{a_n+5}$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$b_n=a_n-k$ とおくとき，$b_{n+1}=\dfrac{\alpha b_n}{b_n+\beta}$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ となるような定数 k，α，β を求めよ．ただし $k>0$ とする．

(2)　$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．更に，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解説

(1) $b_{n+1}=a_{n+1}-k=\dfrac{7a_n+3}{a_n+5}-k=\dfrac{7a_n+3-k(a_n+5)}{a_n+5}$

$$=\frac{(7-k)a_n+3-5k}{a_n+5}=\frac{(7-k)\left(a_n-\dfrac{5k-3}{7-k}\right)}{a_n+5}\ (k\neq 7)$$

ここで，$k=\dfrac{5k-3}{7-k}$ とおくと

$k(7-k)=5k-3$

$k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$

$k>0$ より，$k=3$

このとき，$\alpha=4, \beta=8$

(2) $b_{n+1}=\dfrac{4b_n}{b_n+8}$, $b_1=a_1-3=4$

$b_n=0$ とすると，$b_{n-1}=b_{n-2}=\cdots=b_1=0$ となり矛盾

よって，$b_n\neq 0\ (n=1,2,3,\cdots)$

両辺逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{b_n+8}{4b_n}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{b_n}+\frac{1}{4}$$

$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおくと，$c_1=\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{4}$

$$c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{4} \quad \left(x=2x+\frac{1}{4} \quad \therefore\ x=-\frac{1}{4}\right)$$

$$c_{n+1}+\frac{1}{4}=2\left(c_n+\frac{1}{4}\right)$$

$c_1+\frac{1}{4}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{a_1-k}+\frac{1}{4}=\frac{1}{7-3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ であるから，

数列 $\left\{c_n+\frac{1}{4}\right\}$ は初項 $c_1+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，公比 2 の等比数列より

$$c_n+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1} \quad \therefore\ c_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{4}=\frac{2^n-1}{4}$$

(3) (2)より

$$b_n=\frac{1}{c_n}=\frac{4}{2^n-1}$$

$$a_n=b_n+3=\frac{4}{2^n-1}+3=\frac{3\cdot 2^n+1}{2^n-1}$$

確認問題2
数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める.
(1)　$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つような定数 p，$q\,(p<q)$ の値を求めよ.
(2)　数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を $c_n=a_{n+1}-pa_n$，$d_n=a_{n+1}-qa_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定めたとき，一般項 c_n，d_n を n を用いて表せ.
(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ.

解説

(1) $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$
$a_{n+2}=(p+q)a_{n+1}-pqa_n$ より

$$p+q=2,\ pq=-1$$

となればよい
p，q は $x^2-2x-1=0$ の 2 つの解であるから
$p<q$ より，$p=1-\sqrt{2}$，$q=1+\sqrt{2}$
(2) (1)より

$$c_{n+1}=(1+\sqrt{2})c_n,\ c_1=a_2-(1-\sqrt{2})a_1=1+\sqrt{2}$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $1+\sqrt{2}$，公比 $1+\sqrt{2}$ の等比数列より

$$c_n=(1+\sqrt{2})^n$$

また，$a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$ であるから

$$d_{n+1}=(1-\sqrt{2})d_n,\ d_1=a_2-(1+\sqrt{2})a_1=1-\sqrt{2}$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $1-\sqrt{2}$，公比 $1-\sqrt{2}$ の等比数列より

$$d_n=(1-\sqrt{2})^n$$

(3) (2)より

$$a_{n+1}-(1-\sqrt{2})a_n=(1+\sqrt{2})^n\ \cdots①$$

$$a_{n+1}-(1+\sqrt{2})a_n=(1-\sqrt{2})^n\ \cdots②$$

①−②より

$$2\sqrt{2}\,a_n=(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n$$

$$\therefore\ a_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}$$

確認問題3

数列 $\{a_n\}$ は次を満たす。

$$a_1=1,\ a_2=7,\ na_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}+(n+2)a_n=0$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_3 と a_4 を求めよ。

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

(1) $a_3-4a_2+3a_1=0$ より， $a_3=4a_2-3a_1=25$

$2a_4-6a_3+4a_2=0$ より， $a_4=3a_3-2a_2=61$

(2) $na_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}+(n+2)a_n=0$ より

$$n(a_{n+2}-a_{n+1})=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと， $b_1=a_2-a_1=7-1=6$

$$nb_{n+1}=(n+2)b_n$$

$n\geqq1$ であるから，両辺を n で割ると

$$b_{n+1}=\frac{n+2}{n}b_n$$

$$b_n=\frac{n+1}{n-1}b_{n-1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}b_{n-2}\ (\,n\geqq2\,)$$

$$=\frac{n+1}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n}{\cancel{n-2}}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n-3}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{1}b_1$$

$$\therefore\ b_n=3n(n+1)$$

これは $n=1$ のときにも成り立つから

$$b_n=3n(n+1)\ (\,n\geqq1\,)$$

別解

$nb_{n+1}=(n+2)b_n$

両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{b_n}{n(n+1)}$$

よって

$$\frac{b_n}{n(n+1)}=\frac{b_{n-1}}{(n-1)n}=\cdots=\frac{b_1}{1\cdot2}=3$$

$$\therefore\ b_n=3n(n+1)$$

(3) $b_n = a_{n+1} - a_n$ より，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列である

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k(k+1) \ (\ n \geqq 2\ )$$

$$= 1 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 1 + 3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= n^3 - n + 1$$

これは $n=1$ のときにも成り立つから

$$a_n = n^3 - n + 1 \ (\ n \geqq 1\ )$$

確認問題4

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定められた正の数の数列とする。

$$a_1=4,\ b_1=2,\ a_{n+1}=a_n{}^2b_n,\ b_{n+1}=a_nb_n{}^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) α_n, β_n を $\alpha_n=\log_2 a_n$, $\beta_n=\log_2 b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めるとき，$\alpha_n+\beta_n$ を n の式で表せ。

(2) $1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n=\dfrac{2n-1}{4}3^{n+1}+\dfrac{3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\log_2(a_1a_2{}^2a_3{}^3\cdots\cdots a_n{}^n)$ を求めよ。

(解説)

(1) 2 を底として，$a_{n+1}=a_n{}^2b_n$ と $b_{n+1}=a_nb_n{}^2$ の両辺の対数をとると

$$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+\log_2 b_n$$

$$\log_2 b_{n+1}=\log_2 a_n+2\log_2 b_n$$

$\alpha_n=\log_2 a_n$，$\beta_n=\log_2 b_n$ とおくと， $\alpha_1=2, \beta_1=1$

$$\alpha_{n+1}=2\alpha_n+\beta_n \cdots①$$

$$\beta_{n+1}=\alpha_n+2\beta_n \cdots②$$

①+②より

$$\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}=3(\alpha_n+\beta_n)$$

数列 $\{\alpha_n+\beta_n\}$ は初項 $\alpha_1+\beta_1=3$ ，公比 3 の等比数列より

$$\alpha_n+\beta_n=3\cdot3^{n-1}=3^n \cdots③$$

(2) 等式の左辺を S とすると

$$S=1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots\cdots+n\cdot3^n \cdots④$$

$$3S=\qquad 1\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1} \cdots⑤$$

④−⑤より

$$-2S=3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}$$

$$=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\cdot3^{n+1}$$

$$=-\frac{2n-1}{2}3^{n+1}-\frac{3}{2}$$

$$\therefore S=\frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}$$

(3) ①−②より

$$\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}=\alpha_n-\beta_n$$

数列 $\{\alpha_n-\beta_n\}$ は初項 $\alpha_1-\beta_1=1$ の定数列より

$\alpha_n-\beta_n=1$ …⑥

③＋⑥より

$$\alpha_n=\frac{3^n+1}{2}$$

このとき

$$\log_2(a_1a_2{}^2a_3{}^3\cdot\cdots\cdots\cdot a_n{}^n)$$
$$=\log_2 a_1+2\log_2 a_2+3\log_2 a_3+\cdots+n\log_2 a_n$$
$$=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots\cdots+n\alpha_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{3^k+1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^k+k)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2n-1}{4}3^{n+1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{2n-1}{8}3^{n+1}+\frac{2n^2+2n+3}{8}$$

確認問題5
数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=a_n-4b_n+1, b_{n+1}=2a_n-5b_n-1$
$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義されている．ただし，$a_1=1, b_1=0$ とする．
(1)　a_n-b_n を求めよ．
(2)　a_n, b_n を求めよ．

解説

(1) $a_{n+1}=a_n-4b_n+1$ …①, $b_{n+1}=2a_n-5b_n-1$ …②
①−②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-a_n+b_n+2$$

$c_n=a_n-b_n$ とおくと，$c_1=a_1-b_1=1$

$$c_{n+1}=-c_n+2 \quad (x=-x+2 \quad \therefore x=1)$$

$$c_{n+1}-1=-(c_n-1)$$

数列 $\{c_n-1\}$ は初項 $c_1-1=0$，公比 -1 の等比数列より

$$c_n-1=0 \quad \therefore c_n=1$$

よって

$$a_n-b_n=1$$

(2) $b_n=a_n-1$ より

$$a_{n+1}=a_n-4(a_n-1)+1=-3a_n+5 \quad \left(x=-3x+5 \quad \therefore x=\frac{5}{4}\right)$$

$$a_{n+1}-\frac{5}{4}=-3\left(a_n-\frac{5}{4}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\frac{5}{4}\right\}$ は初項 $a_1-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}$，公比 -3 の等比数列より

$$a_n-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}\cdot(-3)^{n-1} \quad \therefore a_n=\frac{5-(-3)^{n-1}}{4}$$

$b_n=a_n-1$ より

$$b_n=\frac{1-(-3)^{n-1}}{4}$$