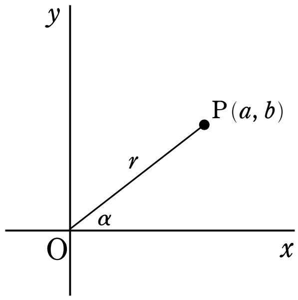
1.6　三角関数の合成(1)

(1) **三角関数の合成**

　加法定理を用いて，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することを考えます。



　座標が (a,b) である点を P とし，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とします。OP$=r$ とすると，

$$a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha$$

よって，

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta\\&=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=r\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

ここで，$r=\sqrt{a^2+b^2}$ です。
$a\sin\theta+b\cos\theta$ のこのような変形を**三角関数の合成**といいます。
右図には r や α の情報が集約されているので，座標平面上に (a,b) をとって r と θ が分かればすぐに変形できます。

三角関数の合成 1

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角である

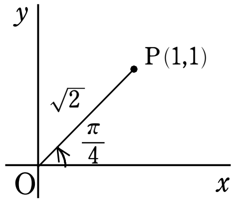
例1

(1) $\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形で表せ。

(2) $3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=$ ${}^{ア}\boxed{}\sin\left(\theta-{}^{イ}\boxed{}\right)$ が成り立つ。ただし，${}^{ア}\boxed{}>0$，$0\leqq{}^{イ}\boxed{}<2\pi$ とする。

(解説)

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$



(2) $3\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$a\cos\theta-b\sin\theta$ の形の式は $-b\sin\theta+a\cos\theta$ として sin で合成もできるが， cos で合成した方がよい。すなわち， $a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式は， sin でも cos でも合成することができます。
sin の合成と同様にして， $a=r\cos\alpha, b=r\sin\alpha$ より，

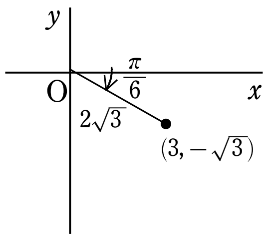
$$\begin{aligned}a\cos\theta-b\sin\theta&=r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta\\&=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\\&=r\cos(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

例2
次の三角関数の和を変形すると，

$3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=$ ア $\boxed{}$ $\cos\left(\theta-\right.$ イ $\boxed{}$ $\left.{}^\circ\right)$ となる。

(解説)

$$\begin{aligned}3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta&=3\cos\theta-(-\sqrt{3})\sin\theta\\&=2\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$



(2) $y=a\sin\theta+b\cos\theta$ **型の関数**

例3
(1) $0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ の範囲で $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ のとる最大値と最小値を求めよ.
(2) 関数 $y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta$ の最大値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。
(3) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$f(\theta)=3\sin\theta-2\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。
(4) $\sin x+a\cos x$ $(0\leqq x\leqq2\pi)$ の最大値が $\sqrt{10}$ になるのは a の値が $\boxed{}$ のときである。

(解説)

(1) $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とおく

$\quad=2\sin(\theta+60^\circ)$

$60^\circ\leqq\theta+60^\circ\leqq150^\circ$より， yは

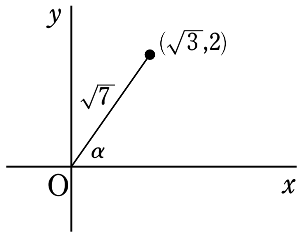
$\theta+60^\circ=90^\circ$，すなわち $\theta=30^\circ$ のとき最大

　最大値　$2\sin 90^\circ=2$,

$\theta+60^\circ=150^\circ$，すなわち $\theta=90^\circ$ のとき最小

　最小値　$2\sin 150^\circ=1$

(2) $y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta$



$\quad=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta$

$\quad=\sqrt{3}\sin\theta+2\cos\theta$

$\quad=\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)$

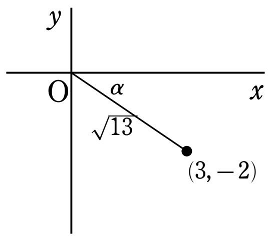
ただし， α は $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$， $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$， $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす角

$\alpha\leqq\theta+\alpha<2\pi+\alpha$ より，yは

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき最大　最大値 $\sqrt{7}$

(3) $f(\theta)=3\sin\theta-2\cos\theta$

$\qquad=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$



ただし， α は $\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$,

$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ を満たす角

$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ より，$f(\theta)$ は

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき最大

　最大値　$\sqrt{13}$,

$\theta+\alpha=\alpha$，すなわち $\theta=0$ のとき最小

　最小値 -2

(4) $y=\sin x+a\cos x$

$\quad=\sqrt{1+a^2}\sin(x+\alpha)$

ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす角

$\alpha \leqq x+\alpha \leqq 2\pi+\alpha$ より，yの最大値は $\sqrt{1+a^2}$

$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{10}$ より

$1+a^2=10 \quad \therefore a=-3,\ 3$

(3) $y=a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ **型の関数**

<table><tr><td>

例4

(1) 関数 $f(x)=\cos^2 x+\sin x\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ は $x=$ ア$\boxed{}$ のとき，最大値 イ$\boxed{}$ をとる。

(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ とするとき，$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ の最大値 M，最小値 m を求めると $(M,\ m)=\boxed{}$。

</td></tr></table>

解説

(1) $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$ より，$f(x)$ は

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=$ ア $\dfrac{\pi}{8}$ のとき最大

最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}=$ イ $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

(2) $y=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ とおく

$$=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\sin 2\theta+3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ で最大　最大値　$2+\sqrt{2}$，

$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，すなわち $\theta=0$，$\frac{\pi}{4}$ で最小　最小値　3

よって，$(M,\ m)=(2+\sqrt{2},\ 3)$

例5

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき，$\sqrt{3}x+y$ の最小値は $^{ア}\boxed{}$ であり，$x^2+2xy+3y^2$ の最大値は $^{イ}\boxed{}$ である。

解説

$\mathrm{P}(x,y)$ は原点O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上の点であるから

$x=\sqrt{2}\cos\theta$，$y=\sqrt{2}\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

とおける

$A=\sqrt{3}x+y$ とおくと

$=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ より，A は

$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$，すなわち $\theta=\frac{7}{6}\pi$ で最小

　最小値 $^{ア}-2\sqrt{2}$

$B=x^2+2xy+3y^2$ とおく

$=2\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+6\sin^2\theta$

$=2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+6\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+4$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+4$

$-\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{15}{4}\pi$ より，B は

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{2}\pi$，すなわち $\theta=\frac{3}{8}\pi$，$\frac{11}{8}\pi$ で最大

　最大値 $^{イ}4+2\sqrt{2}$

(4) $a\sin\theta+b\cos\theta$ を変数とする関数

例6

$f(\theta)=2\sin\theta+2\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta\ \ (0\leqq\theta<2\pi)$ を考える。

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおき，$f(\theta)$ を t の式で表すと ${}^{ア}\boxed{}$ となる。

$f(\theta)$ の最大値は，$\theta={}^{イ}\boxed{}$ のときで，その値は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

最小値は，$\theta={}^{エ}\boxed{}$ および ${}^{オ}\boxed{}$ のときで，その値は ${}^{カ}\boxed{}$ である。

解説

$t=\sin\theta+\cos\theta$

両辺を 2 乗して

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \qquad \therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$$

よって

$$f(\theta)=2(\sin\theta+\cos\theta)+2\sin\theta\cos\theta=2t+t^2-1={}^{ア}t^2+2t-1$$

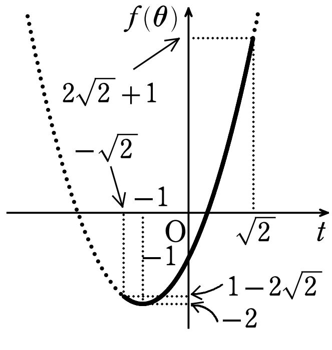
このとき

$$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ から $-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$g(t)=t^2+2t-1\ (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおく

$\quad=(t+1)^2-2$



$t=\sqrt{2}$ で最大

最大値 $2\sqrt{2}+1$，

このとき

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1 \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

$t=-1$ で最小

最小値 -2

このとき

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$

例7

点 $(a,\ b)$ は円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとする。

(1)　$t=a+b$ とおくとき，$a+ab+b$ を t の式で表せ。

(2)　$a+ab+b$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $t=a+b$ の値をそれぞれ求めよ。

解説

(1)は無視して解きます。

(2) $y=a+ab+b$ とおく

点 (a, b) は $x^2+y^2=1$ 上の点より

$$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおける

$y=\cos\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin\theta$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

よって

$$y=t+\frac{t^2-1}{2}\ (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$$

$t=\sqrt{2}$ のとき最大　最大値　$\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$

$t=-1$ のとき最小　最小値　-1

確認問題1

θ のとる値の範囲が $\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ である関数

$y = \dfrac{4}{1+\tan^2\theta} + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$ を考える。

(1)　y の最大値は $^{ア}\boxed{}$ となり，そのとき θ の値は $^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　y の最小値は $^{ウ}\boxed{}$ となり，そのとき θ の値は $^{エ}\boxed{}$ である。

解説

(1) $y = \dfrac{4}{1+\tan^2\theta} + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$= 4\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$= 4\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2} + \sqrt{3}\sin 2\theta$

$= \sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta + 3$

$= 2\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3$

$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より

$2\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大

最大値 $y = 2\cdot 1 + 3 = {}^{ア}5$

このとき，$\theta = {}^{イ}\dfrac{\pi}{6}$

(2) $2\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最小

最小値 $y = 2\cdot\dfrac{1}{2} + 3 = {}^{ウ}4$

このとき，$\theta = {}^{エ}\dfrac{\pi}{3}$

確認問題2

(1)　$\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ で表せ。

(2)　$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

(3)　関数 $y=-8\sin^3\theta+6\sin\theta-3\cos\theta+4\cos^3\theta+1$ の $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。

(解説)

(1) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

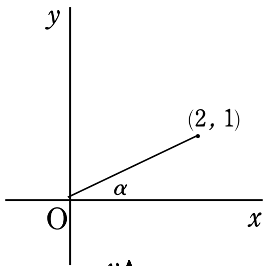
(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

(3) $y=-8\sin^3\theta+6\sin\theta-3\cos\theta+4\cos^3\theta+1$

$=2\sin 3\theta+\cos 3\theta+1$

$=\sqrt{5}\sin(3\theta+\alpha)+1$

ただし，α は図の角



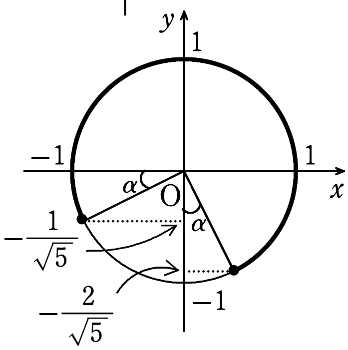
$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\leqq 3\theta+\alpha\leqq 3\pi+\alpha$

$3\theta+\alpha=\dfrac{5}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{5}{6}\pi-\dfrac{\alpha}{3}$ で最大

　最大値 $\sqrt{5}\cdot 1+1=\sqrt{5}+1$

$3\theta+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi+\alpha$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小

　最小値 $\sqrt{5}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)+1=-1$



確認問題3
$y=a(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$ とする．ただし，a は正の定数である．
(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて，y を t の式で表せ．
(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．
(3)　y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ．

(解説)

(1) $t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$ より

$\sin 2\theta=t^2-1$

よって

$y=at+(t^2-1)$

$\therefore\ y=t^2+at-1$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$

$-1\leqq\sin(\theta+45^\circ)\leqq 1$ より

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) $f(t)=t^2+at-1$ とおく

$=\left(t+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-1\ (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

軸は $t=-\dfrac{a}{2}$

最大値 $M=f(\sqrt{2})=\sqrt{2}a+1$

最小値

(ｉ) $-\sqrt{2}\leqq-\dfrac{a}{2}<0$ すなわち $0<a\leqq 2\sqrt{2}$ のとき

$m=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}-1$

(ii) $-\dfrac{a}{2}<-\sqrt{2}$ すなわち $2\sqrt{2}<a$ のとき

$m=f(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}a+1$

確認問題4

関数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ について

(1)　$\sin x-\sqrt{3}\cos x=t$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値を求めよ。

解説

(1) $t^2=(\sin x-\sqrt{3}\cos x)^2$

$=\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$

$=\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x+3\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$=-\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2$

$\therefore\ \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=-t^2+2$

よって

$y=(-t^2+2)+2t$

$=-t^2+2t+2$

(2) $t=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{3}$ から $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3}$

$y=-(t-1)^2+3\ (-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3})$

$t=1$ で最大

最大値　3

$t=-\sqrt{3}$ で最小

最小値　$-1-2\sqrt{3}$