3.9　漸化式(3)

(1) a_n と S_n を含む漸化式

　a_n と S_n を含む漸化式から一般項 a_n を求めるには，

　$a_1=S_1$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ 等を利用して，S_n を消去して，その漸化式を解いて a_n を求めます。

例1
(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n=3a_n-1$ を満たしているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n+2a_n$ を満たしているとき，数列 $\{a_n\}$ の 一般項を求めよ。
(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+n^2$ で与えられるとき，a_n を n の式で表せ。

(解説)

(1) $n=1$ を代入して，$S_1=3a_1-1$

$a_1=S_1$ より

$$a_1=3a_1-1 \quad \therefore a_1=\frac{1}{2}$$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$$a_{n+1}=(3a_{n+1}-1)-(3a_n-1)$$

$$a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列より

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(2) $n=1$ を代入して，$S_1=1+2a_1$

$a_1=S_1$ より

$$a_1=1+2a_1 \quad \therefore a_1=-1$$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$$a_{n+1}=\{(n+1)+2a_{n+1}\}-(n+2a_n)$$

$$a_{n+1}=2a_n-1 \quad (\ x=2x-1 \quad \therefore x=1\ )$$

$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=-2$，公比 2 の等比数列より

$a_n-1=-2\cdot 2^{n-1}\quad \therefore\ a_n=-2^n+1$

(3) $n=1$ を代入して， $S_1=2a_1+1$

$a_1=S_1$ より

$a_1=2a_1+1\quad \therefore\ a_1=-1$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$a_{n+1}=\{2a_{n+1}+(n+1)^2\}-(2a_n+n^2)$

$a_{n+1}=2a_n-2n-1$

$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ と変形する。この式は

$a_{n+1}=2a_n-\alpha n+\alpha-\beta$

もとに式と比べて

$-\alpha=-2, \alpha-\beta=-1\quad \therefore\ \alpha=2, \beta=3$

よって

$a_{n+1}-\{2(n+1)+3\}=2\{a_n-(2n+3)\}$

数列 $\{a_n-(2n+3)\}$ は初項 $a_1-5=-6$，公比 2 の等比数列より

$a_n-(2n+3)=-6\cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n=-3\cdot 2^n+2n+3$

例2

S_n は数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和とする。第 n 項 a_n と S_n は

$$S_n+na_n=1\ (n=1，2，3，\cdots\cdots)$$

を満たしている。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_n と S_n を n を用いて表せ。

解説

(1) $n=1$ を代入すると， $S_1+a_1=1$

$S_1=a_1$ より

$2a_1=1\quad \therefore\ a_1=\dfrac{1}{2}$

$n=2$ を代入すると

$S_2+2a_2=1$

$(a_1+a_2)+2a_2=1$

$$3a_2=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ a_2=\frac{1}{6}$$

$n=3$ を代入すると

$$S_3+3a_3=1$$

$$(a_1+a_2+a_3)+3a_3=1$$

$$4a_3=\frac{1}{3}\qquad \therefore\ a_3=\frac{1}{12}$$

(2) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$$a_{n+1}=\{1-(n+1)a_{n+1}\}-(1-na_n)$$

$$(n+2)a_{n+1}=na_n$$

$$\therefore\ a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n$$

よって

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\cdots$$

これをくり返して

$$a_n=\frac{\cancel{n-1}}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}a_1=\frac{2\cdot 1}{(n+1)n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

また

$$S_n=1-na_n=1-n\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

例3

$a_1=3$，$\sum_{k=1}^{n+1}a_k=4a_n+1$ ($n=1$，2，3，……) で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，a_{n+1} を a_n，a_{n-1} で表せ。

(2)　$a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。

解説

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと，$S_{n+1}=4a_n+1$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$a_{n+1}=(4a_n+1)-(4a_{n-1}+1)$ ($n\geqq 2$)

$\therefore\ a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$

(2) $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ ($n\geqq 1$) ($x^2=4x-4\quad\therefore\ x=2$)

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

$S_2=4a_1+1$ より， $a_1+a_2=4a_1+1\quad\therefore\ a_2=3a_1+1=10$

数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=10-2\cdot 3=4$ ，公比 2 の等比数列より

$a_{n+1}-2a_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

(3) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$

両辺 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと， $b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$b_{n+1}=b_n+1$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{3}{2}$，公差 1 の等差数列より

$$b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\cdot 1=n+\frac{1}{2}$$

よって

$$a_n=2^n b_n=2^n\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

例4

数列 $\{a_n\}$ において，初項 $a_1=1$ から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。

$$a_{n+1}=9a_n-4S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つとき

(1) $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を示せ。

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) S_n を n を用いて表せ。

解説

(1) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}(9a_{n+1}-a_{n+2})-\frac{1}{4}(9a_n-a_{n+1})$$

$$\therefore\ a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$$

あとは 3 項間漸化式を解くだけです。

(2) $b_n=\frac{1}{9}(2n+1)$

(3) $a_n=3^{n-2}(2n+1)$

(4) $S_n=\frac{1}{4}(9a_n-a_{n+1})$より， $S_n=n\cdot 3^{n-1}$

例5

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が，$S_1=0$，$S_{n+1}-3S_n=n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす.

(1)　数列 $\{a_n\}$ が満たす漸化式を a_n と a_{n+1} の関係式で表せ.

(2)　一般項 a_n を求めよ.

解説

(1) $a_1=S_1=0$

$n\geqq 2$ のとき

$$S_{n+1}-3S_n=n^2 \cdots ①$$

$$S_n-3S_{n-1}=(n-1)^2 \cdots ②$$

①−②より

$$S_{n+1}-S_n-3(S_n-S_{n-1})=n^2-(n-1)^2$$

$$a_{n+1}-3a_n=2n-1$$

$$a_{n+1}=3a_n+2n-1$$

$S_2-3S_1=1$ より， $a_2=1$

よって， $n=1$ のときも成り立つ.

したがって

$$a_{n+1}=3a_n+2n-1\ (n\geqq 1)$$

(2) これを解いて

$$a_n=3^{n-1}-n$$

例6
数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると，2 以上の n に対し，$S_{n+1}-7S_n+12S_{n-1}=1$ が成り立ち，$a_1=0, a_2=1$ である．
(1)　$a_{n+1}-3a_n$ を n で表せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．
(2)　a_n, S_n を n で表せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(解説)
(1) $n\geqq 2$ のとき

$$S_{n+2}-7S_{n+1}+12S_n=1 \quad \cdots①$$

$$S_{n+1}-7S_n+12S_{n-1}=1 \quad \cdots②$$

①−②より

$$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$$

(①から，$S_3-7S_2+12S_1=1$ より，$1+a_3-7=1$　$\therefore a_3=7$
よって，$n=1$ のときも成り立つ)
あとはこれを解けばよい。

$$a_{n+1}-3a_n=4\cdot 4^{n-2}=4^{n-1}$$

(2) $a_n=4^{n-1}-3^{n-1}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(4^{k-1}-3^{k-1})=\frac{4^n-1}{4-1}-\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{4^n-1}{3}-\frac{3^n-1}{2}$$

$$=\frac{4^n}{3}-\frac{3^n}{2}+\frac{1}{6}$$

(2) 漸化式の応用

　漸化式を利用すると，場合の数や確率を求めることができる場合があります。ここでは，漸化式を利用して場合の数を求める方法について考えます。

例7

平面上の円に n 本の弦を次の条件で引く。

　①　どの 2 本の弦も円の内部 (円周上の点は含まない) で交わる。

　②　どの 3 本の弦も 1 点で交わることはない。

このとき，円の内部は n 本の弦によって A_n 個の部分に分割され，A_4 $=$ ア $\boxed{}$，$A_5=$ イ $\boxed{}$ となる。

次に，A_{n+1} を A_n を用いて表すと，関係式 $A_{n+1}=A_n+$ ウ $\boxed{}$ が成立する。したがって，A_n を n の式で表すと，$A_n=$ エ $\boxed{}$ となる。また，A_n 個の部分の中で多角形であるものは オ $\boxed{}$ 個ある。

(解説)

右の図より，　$A_4=$ ア11

4 本の弦が引かれている状態から 5 本目の弦を引くと，5 本目の弦はすでに引かれている 4 本の弦によって 5 本の線分に分けられる

5 本の線分により分割される部分が増えるから

$$A_5=A_4+5$$

よって，　$A_5=$ イ16

同様に，n 本の弦が引かれている状態から $(n+1)$ 本目の弦を引くと，$(n+1)$ 本の線分により分割される部分が増えるから

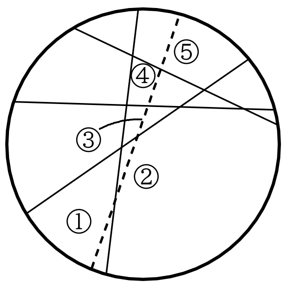
$$A_{n+1}=A_n+{}^{\text{ウ}}n+1。$$

$n \geqq 2$ のとき

$$A_n=A_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=2+\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$



4 本の弦が引かれている状態に，点線で 5 本目の弦を引いた場合の図

① ～ ⑤ によって分割される部分が増える

$n=1$ のときも成り立つから

$$A_n = {}^{エ}\frac{1}{2}(n^2+n+2)\ (\ n \geqq 1\ )$$

多角形でないものは円周の一部を含む

n 本の弦によって円周は $2n$ 個に分割されるから

円周の一部を含む部分は $2n$ 個ある。

よって，多角形であるものの個数は

$$A_n - 2n = \frac{1}{2}(n^2+n+2) - 2n$$

$$= \frac{1}{2}(n^2-3n+2) = {}^{オ}\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

例8

ある工場では，昼間にタンクの水を使用し，夜間に水を補給する。毎日，朝の水量のうち 10% が使用され，その日の夜に 200 リットルが補給される。操業 1 日目の朝の始業前には，タンクの水量が 8000 リットルであった。

(1)　3 日目の朝の始業前のタンクの水量を求めよ。

(2)　n 日目の朝の始業前のタンクの水量を a_n リットルとするとき，a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　朝の始業前のタンクの水量がはじめて 2400 リットル未満になるのは，何日目の朝か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解説

(1) 2 日目の朝の始業前のタンクの水量は

$$8000 - 8000 \times \frac{10}{100} + 200 = 7400\ (\text{リットル})$$

3 日目の朝の始業前のタンクの水量は

$$7400 - 7400 \times \frac{10}{100} + 200 = 6860\ (\text{リットル})$$

(2) (1) と同様にして

$$a_{n+1} = a_n - a_n \times \frac{10}{100} + 200$$

$$\therefore\ a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + 200$$

(3) $a_{n+1}=\dfrac{9}{10}a_n+200$ ($x=\dfrac{9}{10}x+200$ $\quad\therefore\ x=2000$)

$$a_{n+1}-2000=\frac{9}{10}(a_n-2000)$$

数列 $\{a_n-2000\}$ は，初項 $a_1-2000=6000$，公比 $\dfrac{9}{10}$ の等比数列より

$$a_n-2000=6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\quad\therefore\ a_n=6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}+2000$$

$a_n<2400$ となるのは

$$6000\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}+2000<2400$$

$$\therefore\left(\frac{9}{10}\right)^{n}<\frac{3}{50}$$

両辺常用対数をとると

$$n(2\log_{10}3-1)<\log_{10}(2\times3\div100)$$

$$n>\frac{\log_{10}2+\log_{10}3-2}{2\log_{10}3-1}=\frac{0.3010+0.4771-2}{2\cdot0.4771-1}=\frac{-1.2219}{-0.0458}=26.6\cdots$$

よって，朝の始業前のタンクの水量がはじめて 2400 リットル未満になるのは，27 日目の朝である

例9

数字 1, 2, 3 をn個並べてできる n 桁の数全体を考える．そのうち 1 が奇数回現れるものの個数を a_n, 1 が偶数回現れるかまったく現れないものの個数を b_n とする．

(1)　a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ．

(2)　a_n, b_n を求めよ．

解説

(1) $n+1$ 桁の数で，1が奇数回現れるものは

$$\underbrace{\overbrace{(\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc)}^{n\text{個}}}_{1\text{が奇数個}}\ \begin{matrix}2\\3\end{matrix}\qquad 2a_n\text{ 個}$$

$$\underbrace{\overbrace{(\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc)}^{n\text{個}}}_{1\text{が偶数個}}\ 1\qquad b_n\text{ 個}$$

よって，　$a_{n+1}=2a_n+b_n$ …①

同様に，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ …②

(2) $a_1=1, b_1=2$

①＋②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 $a_1+b_1=3$，公比 3 の等比数列より

$$a_n+b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n \quad \cdots③$$

①−②より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$$

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=-1$ の定数列より

$$a_n-b_n=-1 \quad \cdots④$$

③，④より

$$a_n=\frac{3^n-1}{2}, b_n=\frac{3^n+1}{2}$$

別解

a_n+b_n は 1, 2, 3 の重複順列であるから，$a_n+b_n=3^n$ であり，
これを用いてもよい.

> 例10
> 先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n\geqq2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

解説

n 両編成の列車の塗り方を a_n 通りとする

$n+2$ 個

R A○○……○

B R A○……○　　　R：赤，B：青，Y：黄，A：何でもよい

Y R A○……○

A からスタートする並べ方は，A は何色でもよいので，そこからスタートすると考えてもよいから，

$$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$$

また，$a_2=5, a_3=11$ であるから，これを解いて，

$$a_n=\frac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^n\}$$

例11
階段を上るとき，一度に上ることができる段数は 1 段または 2 段のみであるとする。
(1)　ちょうど 10 段上る方法は全部で何通りあるか答えよ。
(2)　n を正の整数とする。ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えよ。

解説
(1) ちょうど n 段上る方法の総数を a_n とすると，$a_1=1$，$a_2=2$
$n\geqq3$ のとき，ちょうど n 段上る方法は
　最初に 1 段上るとき，a_{n-1} 通り
　最初に 2 段上るとき，a_{n-2} 通り
よって
$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$
数列 $\{a_n\}$ は
$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\geqq1)$$
（フィボナッチ数列といいます。）
を満たすから，$\{a_n\}$ は
$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$$
よって，ちょうど 10 段上る方法は 89 通り

別解
$n\geqq3$ のとき，ちょうど n 段上る方法は
最後に 1 段上るとき，それまでの上り方は a_{n-1} 通り
最後に 2 段上るとき，それまでの登り方は a_{n-2} 通りより
$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$
としてもよい。
漸化式を立てるときは，初めの 1 手か最後の 1 手で考えるとうまくいくことが多い。
(2) $a_1=1$，$a_2=2$
$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n\geqq1)\quad \left(x^2=x+1 \qquad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)\text{とする}\right)$$
この式は
$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\ \cdots①$$
$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\ \cdots②$$
と変形できる

①より$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$は初項$a_2-\alpha a_1=2-\alpha$，公比βの等比数列より

$$a_{n+1}-\alpha a_n=(2-\alpha)\cdot\beta^{n-1}\ \cdots③$$

②より同様にして

$$a_{n+1}-\beta a_n=(2-\beta)\cdot\alpha^{n-1}\ \cdots④$$

③－④より

$$(\beta-\alpha)a_n=(2-\alpha)\cdot\beta^{n-1}-(2-\beta)\alpha^{n-1}$$

$$\sqrt{5}\,a_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

確認問題1

数列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… が，関係式 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - \frac{1}{n} a_n$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2)　$a_n = \frac{n}{n^2-1} a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ を満たすことを証明せよ。

(3)　一般項 a_n を求めよ。

(解説)

(1) $a_1 = 1 - a_1$ より，　$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} a_2$ より，　$a_2 = \frac{1}{3}$

$a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} a_3$ より，　$a_3 = \frac{1}{8}$

(2) $S_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$ とおくと，　$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 1 - \frac{1}{n} a_n \quad \cdots ①$$

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1} a_{n-1} \quad \cdots ②$$

①－②より

$$S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{n} a_n + \frac{1}{n-1} a_{n-1}$$

$$a_n = -\frac{1}{n} a_n + \frac{1}{n-1} a_{n-1}$$

$$\frac{n+1}{n} a_n = \frac{1}{n-1} a_{n-1} \qquad \therefore a_n = \frac{n}{n^2-1} a_{n-1}$$

(3) $a_n = \frac{n}{(n+1)(n-1)} a_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ より

$$a_n = \frac{n}{(n+1)(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n(n-2)} \cdot \frac{n-2}{(n-1)(n-3)} \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{3}{4\cdot 2} \cdot \frac{2}{3\cdot 1} a_1$$

$$= \frac{n}{(n+1)\cdot n \cdot (n-1) \cdot \cdots\cdots \cdot 4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{(n+1)!}$$

確認問題2

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} a_1=2,\ a_{n+1}-2=S_n+4T_n \\ b_1=1,\ b_{n+1}-1=5S_n+2T_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

を満たす。ただし，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} のそれぞれを a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　数列 $\{a_n+kb_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が等比数列となるような実数 k の値を求めよ。また，そのときの公比 r を求めよ。

(4)　$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

(1) $a_2=S_1+4T_1+2=a_1+4b_1+2=2+4\cdot1+2=8$

$b_2=5S_1+2T_1+1=5a_1+2b_1+1=5\cdot2+2\cdot1+1=13$

$a_3=S_2+4T_2+2=(a_1+a_2)+4(b_1+b_2)+2=68$

$b_3=5S_2+2T_2+1=5(a_1+a_2)+2(b_1+b_2)+1=79$

(2) $n\geqq2$ のとき

$a_{n+1}-2=S_n+4T_n$ …①

$a_n-2=S_{n-1}+4T_{n-1}$ …②

①−②より

$a_{n+1}-a_n=(S_n-S_{n-1})+4(T_n-T_{n-1})$

$a_{n+1}-a_n=a_n+4b_n \qquad \therefore\ a_{n+1}=2a_n+4b_n$

$b_{n+1}-1=5S_n+2T_n$ …③

$b_n-1=5S_{n-1}+2T_{n-1}$ …④

③−④より

$b_{n+1}-b_n=5(S_n-S_{n-1})+2(T_n-T_{n-1})$

$b_{n+1}-b_n=5a_n+2b_n \qquad \therefore\ b_{n+1}=5a_n+3b_n$

よって，

$a_{n+1}=2a_n+4b_n$，　$b_{n+1}=5a_n+3b_n$

これらは $n=1$ のときも成り立つ

(3) $a_{n+1}=2a_n+4b_n$ …⑤，　$b_{n+1}=5a_n+3b_n$ …⑥

⑤+⑥より

$a_{n+1}+b_{n+1}=7(a_n+b_n)$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は，初項 $a_1+b_1=3$ ，公比 7 の等比数列より

$$a_n+b_n=3\cdot 7^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=3\cdot 7^{n-1}-a_n$$

⑤より

$$a_{n+1}=2a_n+4(3\cdot 7^{n-1}-a_n)$$

$$a_{n+1}=-2a_n+12\cdot 7^{n-1}$$

両辺 7^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{7^{n+1}}=-\frac{2}{7}\cdot\frac{a_n}{7^n}+\frac{12}{49}$$

$c_n=\dfrac{a_n}{7^n}$ とおくと， $c_1=\dfrac{a_1}{7}=\dfrac{2}{7}$

$$c_{n+1}=-\frac{2}{7}c_n+\frac{12}{49} \qquad x=-\frac{2}{7}x+\frac{12}{49} \qquad \therefore\ x=\frac{4}{21}$$

$$c_{n+1}-\frac{4}{21}=-\frac{2}{7}\left(c_n-\frac{4}{21}\right)$$

数列 $\left\{c_n-\dfrac{4}{21}\right\}$ は初項 $c_1-\dfrac{4}{21}=\dfrac{2}{21}$ ，公比 $-\dfrac{2}{7}$ の等比数列より

$$c_n-\frac{4}{21}=\frac{2}{21}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ c_n=\frac{2}{21}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}+\frac{4}{21}$$

よって

$$a_n=7^n\cdot c_n=\frac{2\cdot(-2)^{n-1}+4\cdot 7^{n-1}}{3}=\frac{4\cdot 7^{n-1}-(-2)^n}{3}$$

$$b_n=3\cdot 7^{n-1}-a_n=\frac{5\cdot 7^{n-1}+(-2)^n}{3}$$

確認問題3

容器 A には 3 % の食塩水が 300 g，容器 B には 6 % の食塩水が 300 g 入れてある．A, B からそれぞれ 100 g の食塩水をとって A の分を B に，B の分を A に入れる．このような操作を n 回 $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ 繰り返して行った結果，A は a_n % の食塩水になった．

(1)　a_n と a_{n-1} $(n=2, 3, \cdots\cdots)$ の関係を示す式は $a_n = pa_{n-1}+q$ となる．p, q の値を求めよ．

(2)　a_n $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ は，$a_n = c - dr^{n-1}$ と表される．r, c, d の値を求めよ．

解説

(1) A が a %，B が b % のとき，操作を行うと次の表のようになる．

A　a %	300 g	食塩 $3a$ g	B　b %	300 g	食塩 $3b$ g
$\dfrac{2a+b}{3}$ %	300 g	$3a-a+b=2a+b$ g	$\dfrac{a+2b}{3}$ %	300 g	$3b-b+a=a+2b$ g

操作を n 回繰り返して行った結果，B は b_n % の食塩水になるとすると

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}b_n$$

また，$3a_n+3b_n=3a_0+3b_0=9+18$ より，$a_n+b_n=9$　$\therefore b_n=9-a_n$

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}(9-a_n)=\frac{1}{3}a_n+3 \qquad \therefore p=\frac{1}{3},\ q=3$$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+3$, $a_1=\dfrac{2}{3}a_0+\dfrac{1}{3}b_0=4$　$\left(x=\dfrac{1}{3}x+3 \quad \therefore x=\dfrac{9}{2} \right)$

$$a_{n+1}-\frac{9}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{9}{2}\right)$$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{9}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{1}{2}$ ，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列より

$$a_n-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \therefore r=\frac{1}{3},\ c=\frac{9}{2},\ d=\frac{1}{2}$$

確認問題4
3つの文字 a，b，c を繰り返しを許して，左から順に n 個並べる．ただし，a の次は必ず c であり，b の次も必ず c である．このような規則を満たす列の個数を x_n とする．例えば，$x_1=3$，$x_2=5$ である．
(1)　x_{n+2} を x_{n+1} と x_n で表せ．
(2)　$y_n=x_{n+1}+x_n$ とおく．y_n を求めよ．
(3)　x_n を求めよ．

解説

(1) $a, c, A, ○, ○, \cdots, ○$
$b, c, A, ○, ○, \cdots, ○$　　　　A は何でもよい
$c, A, ○, ○, ○, \cdots, ○$
$n+2$ 個

A からスタートする並べ方は，A は何でもよいので，そこからスタートすると考えてもよいから

$$x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$$

(2) $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$

$$x_{n+2}+x_{n+1}=2(x_{n+1}+x_n)$$

$y_n=x_{n+1}+x_n$ とおくと，$y_1=x_1+x_2=3+5=8$

$$y_{n+1}=2y_n$$

$\{y_n\}$ は，初項 $y_1=8$，公比 2 の等比数列より

$$y_n=8\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}$$

(3) (2)より

$$x_{n+1}=-x_n+2^{n+2}$$

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_n}{2^n}+2$$

$z_n=\dfrac{x_n}{2^n}$ とおくと，$z_1=\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$$z_{n+1}=-\frac{1}{2}z_n+2 \quad \left(x=-\frac{1}{2}x+2 \quad \therefore x=\frac{4}{3}\right)$$

$$z_{n+1}-\frac{4}{3}=-\frac{1}{2}\left(z_n-\frac{4}{3}\right) \text{ から}$$

数列 $\left\{z_n-\dfrac{4}{3}\right\}$ は，初項 $z_1-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$$z_n-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ z_n=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{4}{3}$$

よって

$$x_n=2^n z_n=\frac{2^{n+2}+(-1)^{n-1}}{3}$$