

1.6 対数方程式・不等式

(1) 対数方程式

例1

(1) 方程式 $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$ を解け。

(2) 方程式 $\log_2(x+1) - \log_4(x+4) = 1$ の解は $x = \boxed{\quad}$ である。

(3) x の方程式 $\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = 1$ を解け。

(4) 方程式 $\log_{\sqrt{2}}(2-x) + \log_2(x+1) = 1$ の解をすべて求めると、 $x = \boxed{\quad}$ である。

(5) a を 1 と異なる正の数とする。 $\log_a(x+2) + \log_{a^2}(x-1) = \log_a 4$ を解くと、 $x = \boxed{\quad}$ である。

解説

(1) 真数条件より

$$x+1 > 0, x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$$

$$\log_2(x+1)(x-2) = 2$$

$$\therefore (x+1)(x-2) = 2^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

①より、 $x = 3$

(2) 真数条件より

$$x+1 > 0, x+4 > 0 \quad \therefore x > -1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+1) - \log_4(x+4) = 1$$

$$\log_2(x+1) - \frac{\log_2(x+4)}{2} = 1$$

$$2\log_2(x+1) = \log_2(x+4) + 2$$

$$\log_2(x+1)^2 = \log_2 4(x+4)$$

$$\therefore (x+1)^2 = 4(x+4)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x+3)(x-5) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } x=5$$

$$(3) \text{ 真数条件より}$$

$$x-1>0, x-4>0 \quad \therefore x>4 \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = 1$$

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-4) = 1$$

$$\log_2(x-1)(x-4) = 1$$

$$\therefore (x-1)(x-4) = 2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

$$(4) \text{ 真数条件より}$$

$$2-x>0, x+1>0 \quad \therefore -1<x<2 \dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\sqrt{2}}(2-x) + \log_2(x+1) = 1$$

$$2\log_2(2-x) + \log_2(x+1) = 1$$

$$\log_2(2-x)^2(x+1) = 1$$

$$\therefore (2-x^2)(x+1) = 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$-1<x<2 \text{ より, } x=1, 1-\sqrt{3}$$

$$(5) \text{ 真数条件より}$$

$$x+2>0, x-1>0 \quad \therefore x>1 \dots \textcircled{1}$$

$$\log_a(x+2) + \log_{a^2}(x-1) = \log_a 4$$

$$\log_a(x+2) + \frac{\log_a(x-1)}{2} = \log_a 4$$

$$2\log_a(x+2) + \log_a(x-1) = 2\log_a 4$$

$$\log_a(x+2)^2(x-1) = \log_a 16$$

$$\therefore (x+2)^2(x-1) = 16$$

$$x^3 + 3x^2 - 20 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 5x + 10) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } x=2$$

(2) 対数不等式

例2

(1) $\log_5(x-3) < 1$ を解け.

(2) 不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > 2$ を満たす x の範囲は である。

(3) $\log_3(x-1) + \log_3(x+2) \leq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(4) 不等式 $\log_{0.1}(2x^2 - x + 1) < 2\log_{0.1}(x+3)$ を解け。

(5) 不等式 $\log_2(x-1) \geq \log_4(5x-9)$ を満たす x の値の範囲は となる。

(6) 不等式 $\log_2(5-2x) + 2\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq 0$ を満たす x の範囲は である。

(7) 不等式 $\log_2\{\log_3(x-1) + \log_3(x+7)\} < 1$ を満たす x の値の範囲は,
 $\sqrt{\text{ }} < x < \sqrt{\text{ }}$ である。

解説

(1) 真数条件より

$$x-3 > 0 \quad \therefore x > 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_5(x-3) < 1$$

底 $5 > 1$ より

$$x-3 < 5 \quad \therefore x < 8$$

①より, $3 < x < 8$

(2) 真数条件より

$$x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > 2$$

$0 < \text{底 } \frac{1}{3} < 1$ より

$$x-2 < \frac{1}{9} \quad \therefore x < \frac{19}{9}$$

①より, $2 < x < \frac{19}{9}$

(3) 真数条件より

$$x-1 > 0, \quad x+2 > 0 \quad \therefore x > 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_3(x-1) + \log_3(x+2) \leq 2$$

$$\log_3(x-1)(x+2) \leq \log_3 9$$

底 $3 > 1$ より

$$(x-1)(x+2) \leq 9$$

$$x^2 + x - 11 \leq 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } 1 < x \leq \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}$$

(4) 真数条件より

$$2x^2 - x + 1 > 0, \quad x + 3 > 0 \quad \therefore x > -3 \dots \textcircled{1}$$

$$\log_{0.1}(2x^2 - x + 1) < 2\log_{0.1}(x + 3)$$

$$\log_{0.1}(2x^2 - x + 1) < \log_{0.1}(x + 3)^2$$

$0 < \text{底} 0.1 < 1$ より

$$2x^2 - x + 1 > (x + 3)^2$$

$$x^2 - 7x - 8 > 0$$

$$(x + 1)(x - 8) > 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } -3 < x < -1, \quad 8 < x$$

(5) 真数条件より

$$x - 1 > 0, \quad 5x - 9 > 0 \quad \therefore x > \frac{9}{5} \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x - 1) \geq \log_4(5x - 9)$$

$$\log_2(x - 1) \geq \frac{\log_2(5x - 9)}{2}$$

$$2\log_2(x - 1) \geq \log_2(5x - 9)$$

$$\log_2(x - 1)^2 \geq \log_2(5x - 9)$$

底 $2 > 1$ より

$$(x - 1)^2 \geq 5x - 9$$

$$x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

$$(x - 2)(x - 5) \geq 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } \frac{9}{5} < x \leq 2, \quad 5 \leq x$$

(6) 真数条件より

$$5 - 2x > 0, \quad x + 2 > 0 \quad \therefore -2 < x < \frac{5}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(5-2x) + 2\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq 0$$

$$\log_2(5-2x) - 2\log_2(x+2) \leq 0$$

$$\log_2(5-2x) \leq \log_2(x+2)^2$$

底 $2 > 1$ より

$$5-2x \leq (x+2)^2$$

$$x^2 + 6x - 1 \geq 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } -3 + \sqrt{10} \leq x < \frac{5}{2}$$

(7) 真数条件より

$$x-1 > 0, x+7 > 0, \log_3(x-1) + \log_3(x+7) > 0$$

ここで

$$\log_3(x-1) + \log_3(x+7) > 0$$

$$\log_3\{(x-1)(x+7)\} > \log_3 1$$

底 $3 > 1$ より

$$(x-1)(x+7) > 1$$

$$x^2 + 6x - 8 > 0 \quad \therefore x < -3 - \sqrt{17}, -3 + \sqrt{17} < x$$

$$\text{よって, } -3 + \sqrt{17} < x \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2\{\log_3(x-1) + \log_3(x+7)\} < 1$$

$$\log_2\{\log_3(x-1)(x+7)\} < 1$$

$$\text{底}2 > 1 \text{ より, } \log_3\{(x-1)(x+7)\} < 2$$

底 $3 > 1$ より

$$(x-1)(x+7) < 9$$

$$x^2 + 6x - 16 < 0$$

$$(x+8)(x-2) < 0$$

$$\textcircled{1} \text{より, } -3 + \sqrt{17} < x < 2$$

例3

(1) $a > 0, a \neq 1$ とする. このとき, x の不等式

$$\log_a(x+2) \geq \log_{a^2}(3x+16) \text{ を解け.}$$

(2) a は正の定数で $a \neq 1$ とする. x に関する不等式

$$\log_a(2a^2 - x^2) \geq \log_a(2ax - a^2) \text{ を解け.}$$

(3) x を 1 でない正数とするととき, 不等式 $\log_x(2x^2 + 5x - 6) > 3$ を解け.

解説

(1) 真数条件より

$$x+2>0, \quad 3x+16>0 \quad \therefore x>-2$$

$$\log_a(x+2) \geq \log_{a^2}(3x+16)$$

$$\log_a(x+2) \geq \frac{\log_a(3x+16)}{2}$$

$$2\log_a(x+2) \geq \log_a(3x+16)$$

$$\log_a(x+2)^2 \geq \log_a(3x+16)$$

(i) $0 < a < 1$ のとき

$$(x+2)^2 \leq 3x+16$$

$$x^2+x-12 \leq 0$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0$$

$$x > -2 \text{ より, } -2 < x \leq 3$$

(ii) $a > 1$ のとき

$$(x+2)^2 \geq 3x+16$$

$$(x+4)(x-3) \geq 0$$

$$x > -2 \text{ より, } x \geq 3$$

(2) 真数条件より

$$2a^2 - x^2 > 0, \quad 2ax - a^2 > 0$$

$$\therefore -\sqrt{2}a < x < \sqrt{2}a, \quad x > \frac{a}{2} \quad \therefore \frac{a}{2} < x < \sqrt{2}a \dots \textcircled{1}$$

$$\log_a(2a^2 - x^2) \geq \log_a(2ax - a^2)$$

(i) $0 < a < 1$ のとき

$$2a^2 - x^2 \leq 2ax - a^2$$

$$x^2 + 2ax - 3a^2 \geq 0$$

$$(x+3a)(x-a) \geq 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } a \leq x < \sqrt{2}a$$

(ii) $a > 1$ のとき

$$2a^2 - x^2 \geq 2ax - a^2$$

$$(x+3a)(x-a) \leq 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \frac{a}{2} < x \leq a$$

(3) 底の条件, 真数条件より

$$x > 0, 2x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \therefore \frac{-5 + \sqrt{73}}{4} < x < 1, x > 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_x(2x^2 + 5x - 6) > 3$$

(i) $x > 1$ のとき

$$2x^2 + 5x - 6 > x^3$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0$$

$$(x-1)(x^2 - x - 6) < 0$$

$$(x-1)(x+2)(x-3) < 0$$

$x > 1$ より

$$x-3 < 0 \quad \therefore 1 < x < 3 \quad \text{これは } \textcircled{1} \text{ を満たす}$$

(ii) $0 < x < 1$ のとき

$$2x^2 + 5x - 6 < x^3 \text{ から } (x-1)(x+2)(x-3) > 0$$

$0 < x < 1$ でこの不等式は常に成立, すなわち $0 < x < 1$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \frac{-5 + \sqrt{73}}{4} < x < 1$$

(i), (ii) より

$$\frac{-5 + \sqrt{73}}{4} < x < 1, 1 < x < 3$$

例4

不等式 $1 < \log_x y < 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ について考える。

(1) 不等式 $\textcircled{1}$ を満たす実数の組 (x, y) の例を $0 < x < 1$ および $x > 1$ の範囲で1組ずつあげ, それらが不等式を満たしていることを示せ。

(2) 不等式 $\textcircled{1}$ を満たす点 (x, y) の領域を図示せよ。

解説

(1) $\textcircled{1}$ より

$$\log_x x < \log_x y < \log_x x^2$$

(i) $0 < x < 1$ のとき

$$x^2 < y < x$$

これを満たすものの1つは, $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \frac{\log_2 \frac{1}{3}}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{-\log_2 3}{-1} = \log_2 3, 1 < \log_2 3 < 2 \text{ より}$$

$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ は ① を満たす

(ii) $x > 1$ のとき

$$x < y < x^2$$

これを満たすものの 1 つは, $(x, y) = (2, 3)$

$1 < \log_2 3 < 2$ より

$(x, y) = (2, 3)$ は ① を満たす

(2) 底の条件, 真数条件より

$$x > 0, x \neq 1, y > 0$$

$$1 < \log_x y < 2$$

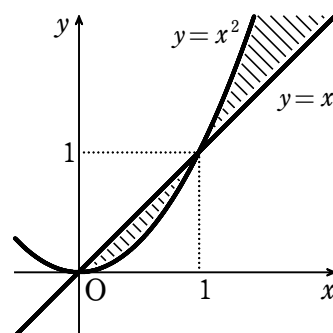
(i) $0 < x < 1$ のとき, $x^2 < y < x$,

(ii) $x > 1$ のとき, $x < y < x^2$

(i), (ii) より

求める領域は右図の斜線部分

ただし, 境界線は除く



(3) $\log$ を未知数とする方程式・不等式

例5

(1) 方程式 $2(\log_2 x)^2 - 5(\log_2 x) - 7 = 0$ の解は, $x = \boxed{}$, $\boxed{}$ である。

(2) 方程式 $(\log_9 x)^2 - 2\log_3 x + 4 = 0$ を解け。

(3) 方程式 $\log_2 x^2 - \log_x 4 + 3 = 0$ を解け。

(4) 方程式 $\log_x 8 - \log_2 \frac{x}{4} = 0$ を解け。ただし, $x > 0$, $x \neq 1$ とする。

解説

(1) $2(\log_2 x)^2 - 5(\log_2 x) - 7 = 0$ (真数条件より, $x > 0$)

$$(\log_2 x + 1)(2\log_2 x - 7) = 0$$

$$\therefore \log_2 x = -1, \frac{7}{2} \quad \therefore x = 2^{-1}, 2^{\frac{7}{2}} \quad \therefore x = \frac{1}{2}, 8\sqrt{2}$$

$$(2) (\log_9 x)^2 - 2\log_3 x + 4 = 0 \quad (x > 0)$$

$$\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^2 - 2\log_3 x + 4 = 0$$

$$(\log_3 x)^2 - 8\log_3 x + 16 = 0$$

$$(\log_3 x - 4)^2 = 0$$

$$\therefore \log_3 x = 4 \quad \therefore x = 3^4 = 81$$

$$(3) \log_2 x^2 - \log_x 4 + 3 = 0 \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$2\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} + 3 = 0$$

$$2(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 2 = 0$$

$$(\log_2 x + 2)(2\log_2 x - 1) = 0$$

$$\therefore \log_2 x = -2, \frac{1}{2} \quad \therefore x = 2^{-2}, 2^{\frac{1}{2}} \quad \therefore x = \frac{1}{4}, \sqrt{2}$$

$$(4) \log_x 8 - \log_2 \frac{x}{4} = 0$$

$$\frac{\log_2 8}{\log_2 x} - (\log_2 x - 2) = 0$$

$$\frac{3}{\log_2 x} - \log_2 x + 2 = 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 = 0$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 3) = 0$$

$$\therefore \log_2 x = -1, 3 \quad \therefore x = 2^{-1}, 2^3 \quad \therefore x = \frac{1}{2}, 8$$

例6

(1) $(\log_2 x)^2 - \log_2 4x > 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $4(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 2 \leq 0$ を解け。

(3) 不等式 $\log_{\sqrt{x}} 4 + \log_8 x > \frac{8}{3}$ を解け。

(4) a は $0 < a < 1$ を満たす定数とする。このとき、不等式

$$2\log_a x + 9\log_x a \geq 9 \quad (x > 0, x \neq 1)$$

を解け。

解説

$$(1) (\log_2 x)^2 - \log_2 4x > 0 \quad (x > 0)$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 > 0$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 2) > 0$$

$$\therefore \log_2 x < -1, \log_2 x > 2$$

底 $2 > 1$ より

$$0 < x < \frac{1}{2}, x > 4$$

$$(2) 4(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 2 \leq 0 \quad (x > 0)$$

$$4(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 2 \leq 0$$

$$2(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x - 1 \leq 0$$

$$(2\log_{\frac{1}{3}} x + 1)(\log_{\frac{1}{3}} x - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$$

$0 < \text{底} \frac{1}{3} < 1$ より

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$(3) \log_{\sqrt{x}} 4 + \log_8 x > \frac{8}{3} \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$2 \cdot \frac{2}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{3} > \frac{8}{3}$$

両辺 $(\log_2 x)^2 > 0$ をかけて

$$(\log_2 x)^3 - 8(\log_2 x)^2 + 12\log_2 x > 0$$

$$\log_2 x (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 6) > 0$$

$$\therefore 0 < \log_2 x < 2, \log_2 x > 6$$

底 $2 > 1$ より

$$1 < x < 4, x > 64$$

$$(4) 2\log_a x + 9\log_x a \geq 9$$

$$2\log_a x + 9 \cdot \frac{1}{\log_a x} - 9 \geq 0$$

両辺 $(\log_a x)^2 (> 0)$ をかけて

$$2(\log_a x)^3 + 9\log_a x - 9(\log_a x)^2 \geq 0$$

$$(\log_a x)(2\log_a x - 3)(\log_a x - 3) \geq 0$$

$$\therefore 0 < \log_a x \leq \frac{3}{2}, \quad 3 \leq \log_a x \quad (x \neq 1 \text{ より } \log_a x \neq 0)$$

$0 < \text{底 } a < 1$ より

$$a^{\frac{3}{2}} \leq x < 1, \quad 0 < x \leq a^3$$

$$\therefore 0 < x \leq a^3, \quad a\sqrt{a} \leq x < 1$$

例7

(1) $x^{\log_5 x} = 25x$ を満たす x を求めよ。

(2) $x^{\log_{10} x} = \frac{x^3}{100}$ を解くと $x = \boxed{\quad}$ である。

(3) 方程式 $2^{x \log_4 x} = x\sqrt{x}$ を解け。

(4) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ となる正の数 x を求めよ。

解説

(1) 真数条件より $x > 0$ であるから, $x^{\log_5 x} > 0, 25x > 0$
両辺底が 5 の対数をとると

$$\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 25x$$

$$(\log_5 x)^2 = 2 + \log_5 x$$

$$(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 = 0$$

$$(\log_5 x + 1)(\log_5 x - 2) = 0$$

$$\therefore \log_5 x = -1, 2 \quad \therefore x = 5^{-1}, 5^2 \quad \therefore x = \frac{1}{5}, 25$$

(2) 真数条件より $x > 0$ であるから, 両辺ともに正
両辺底が 10 の対数をとると

$$\log_{10} x^{\log_{10} x} = \log_{10} \frac{x^3}{100}$$

$$(\log_{10} x)^2 - 3\log_{10} x + 2 = 0$$

$$(\log_{10} x - 1)(\log_{10} x - 2) = 0$$

$$\therefore \log_{10} x = 1, 2 \quad \therefore x = 10, 100$$

(3) 真数条件より $x > 0$ であるから、両辺ともに正
両辺底が 2 の対数をとると

$$x \log_4 x = \log_2 x \sqrt{x}$$

$$x \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{3}{2} \log_2 x$$

$$(x-3) \log_2 x = 0$$

$$\therefore x=3, \log_2 x=0 \quad \therefore x=1, 3$$

(4) $x > 0$ より、両辺ともに正
両辺底が 2 の対数をとると (底は何でもよい)

$$\sqrt{x} \log_2 x = x \log_2 \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} \log_{10} x = \frac{1}{2} x \log_{10} x$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) \log_{10} x = 0$$

$x > 0$ より

$$\sqrt{x}=2, \log_{10} x=0 \quad \therefore x=1, 4$$

例8

(1) 不等式 $2^{x \log_{0.5} x} \geq x^{-0.5}$ を解け。

(2) $t^{\log_a t} < a^3 t^2$ を t について解け。ただし、 $a > 1$ とする。

(3) $0 < a < 1$ のとき、 $a^{x^2} > 3^{x-2} a^{2x}$ を満たす x の範囲を求めよ。

解説

(1) 真数条件より $x > 0$ であるから、両辺ともに正
両辺底が 2 の対数をとると

$$x \log_{0.5} x \geq -0.5 \log_2 x$$

$$-x \log_2 x \geq -0.5 \log_2 x$$

$$(x-0.5) \log_2 x \leq 0$$

(i) $0 < x < 0.5$ のとき

$$\log_2 x \geq 0 \quad \text{解なし}$$

(ii) $x = 0.5$ は等号を満たす

(iii) $x > 0.5$ のとき

$$\log_2 x \leq 0 \quad 0.5 < x \leq 1$$

(i) ~ (iii) より

$$0.5 \leq x \leq 1$$

(2) 真数条件より $t > 0$ であるから, 両辺ともに正
両辺底が a の対数をとると

$$\log_a t^{\log_a t} < \log_a a^3 t^2$$

$$(\log_a t)^2 < 3 + 2\log_a t$$

$$(\log_a t)^2 - 2\log_a t - 3 < 0$$

$$(\log_a t + 1)(\log_a t - 3) < 0$$

$$\therefore -1 < \log_a t < 3$$

底 $a > 1$ より

$$a^{-1} < t < a^3 \quad \therefore \frac{1}{a} < t < a^3$$

(3) 両辺ともに正より,
両辺底 a の対数をとると

$$\log_a a^{x^2} < \log_a (3^{x-2} a^{2x})$$

$$x^2 < (x-2)\log_a 3 + 2x$$

$$x^2 - (\log_a 3 + 2)x + 2\log_a 3 < 0$$

$$(x - \log_a 3)(x - 2) < 0$$

$0 < a < 1$ から $\log_a 3 < 0$ より

$$\log_a 3 < x < 2$$

確認問題1

(1) ~ (3) の 3 つの場合に対して、次の不等式を解け。ただし、 a は定数である。

$$\log_{10}(6-x) + \log_{10}(x+1) \leq \log_{10}(x-a)$$

(1) $6 \leq a$ の場合

(2) $-1 \leq a < 6$ の場合

(3) $-10 < a < -1$ の場合

(解説)

真数条件より

$$6-x > 0, \quad x+1 > 0, \quad x-a > 0$$

$$-1 < x < 6 \quad \text{かつ} \quad a < x$$

$$\log_{10}(6-x) + \log_{10}(x+1) \leq \log_{10}(x-a)$$

$$\log_{10}(6-x)(x+1) \leq \log_{10}(x-a)$$

底 $10 > 1$ より

$$(6-x)(x+1) \leq x-a \quad \text{かつ} \quad -1 < x < 6$$

$$(-1 < x < 6 \text{ であれば, } (6-x)(x+1) > 0 \text{ より } x-a > 0)$$

$$x^2 - 4x - a - 6 \geq 0$$

$x^2 - 4x - a - 6 = 0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (-a-6) = a+10$$

(1), (2), (3) のいずれの場合も $D > 0$ となるので

$$x \leq 2 - \sqrt{a+10}, \quad 2 + \sqrt{a+10} \leq x$$

(1) $6 \leq a$ の場合

解なし

(2) $-1 \leq a < 6$ の場合

$$2 - \sqrt{a+10} \leq -1, \quad 2 + \sqrt{a+10} < 6 \text{ より}$$

$$2 + \sqrt{a+10} \leq x < 6$$

(3) $-10 < a < -1$ の場合

$$-1 < 2 - \sqrt{a+10} < 2 + \sqrt{a+10} < 6 \text{ より}$$

$$-1 < x \leq 2 - \sqrt{a+10}, \quad 2 + \sqrt{a+10} \leq x < 6$$

確認問題2

(1) 不等式 $\log_x y + 2\log_y x < 3$ を満たす点 (x, y) の存在する範囲を図示せよ。

(2) 不等式 $\log_x y < 2 + 3\log_y x$ の表す領域を座標平面上に図示せよ。

解説

(1) 底の条件, 真数条件より

$$0 < x < 1, 1 < x, 0 < y < 1, 1 < y$$

$$\log_x y + 2\log_y x < 3$$

$$\log_x y + 2 \cdot \frac{1}{\log_x y} < 3$$

両辺 $(\log_x y)^2 > 0$ をかけて

$$(\log_x y)^3 - 3(\log_x y)^2 + 2\log_x y < 0$$

$$\log_x y (\log_x y - 1)(\log_x y - 2) < 0$$

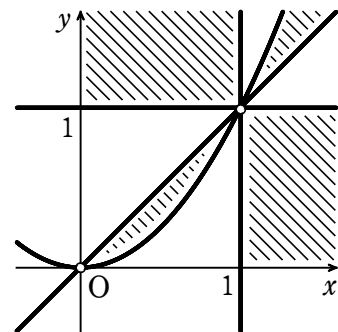
$$\therefore \log_x y < 0, 1 < \log_x y < 2$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき, } y > 1, x > y > x^2$$

$$x > 1 \text{ のとき, } 0 < y < 1, x < y < x^2$$

求める領域は, 右図の斜線部

ただし, 境界線は除く



(2) 底の条件, 真数条件より

$$0 < x < 1, 1 < x, 0 < y < 1, 1 < y$$

$$\log_x y < 2 + 3\log_y x$$

$$\log_x y - 2 - \frac{3}{\log_x y} < 0$$

両辺 $(\log_x y)^2 > 0$ をかけて

$$(\log_x y)^3 - 2(\log_x y)^2 - 3\log_x y < 0$$

$$\log_x y (\log_x y + 1)(\log_x y - 3) < 0$$

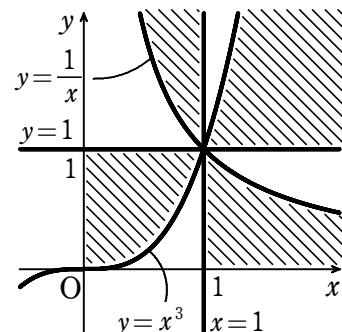
$$\therefore \log_x y < -1, 0 < \log_x y < 3$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき, } y > \frac{1}{x}, 1 > y > x^3$$

$$x > 1 \text{ のとき, } 0 < y < \frac{1}{x}, 1 < y < x^3$$

求める領域は図の斜線部

ただし, 境界線は除く



確認問題3

(1) $(\log_2(\log_3 x))^2 - \log_2(\log_3 x)^5 + 6 = 0$ の解は $x = {}^7\boxed{}, {}^1\boxed{}$ である。

(2) 不等式 $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) < 2$ を解け。

(解説)

(1) 真数条件より

$$x > 0, \log_3 x > 0 \quad \therefore x > 1$$

$$(\log_2(\log_3 x))^2 - \log_2(\log_3 x)^5 + 6 = 0$$

$$\{\log_2(\log_3 x)\}^2 - 5\log_2(\log_3 x) + 6 = 0$$

$$\log_2(\log_3 x) = t \text{ とおくと}$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 2, 3$$

よって

$$\log_2(\log_3 x) = 2, 3 \quad \therefore \log_3 x = 4, 8 \quad \therefore x = {}^781, {}^16561$$

(2) 真数条件より

$$x > 0, \log_4 x > 0, \log_2 x > 0 \quad \therefore x > 1$$

$$\begin{aligned} \log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) &= \log_2\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) + \frac{\log_2(\log_2 x)}{\log_2 4} \\ &= \log_2(\log_2 x) - \log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) \\ &= \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) - 1 \text{ より} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) - 1 < 2$$

$$\log_2(\log_2 x) < 2$$

底 $2 > 1$ より

$$\log_2 x < 2^2 = 4$$

$$x < 2^4 = 16$$

$$x > 1 \text{ より, } 1 < x < 16$$

確認問題4

(1) 連立方程式 $\log_8 x + \log_2 y = 1, 2\log_4 x + \log_4 y = -2$ の解を $x = \alpha, y = \beta$ とするとき、積 $\alpha\beta$ の値を求めよ。

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 4(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} y = 1 \\ x^2 y = 10 \end{cases}$ を解け。

(3) 次の連立方程式

$$\begin{cases} \log_x y + 2\log_y x = 3 \\ \log_x (y^2 + xy) = 2 \end{cases}$$

の解を求めよ。

(4) 連立方程式 $\begin{cases} \log_{2x} y + \log_x 2y = 1 \\ \log_2 xy = 1 \end{cases}$ を解け。

(5) 連立方程式 $\begin{cases} 8 \cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2 (x+1) - \log_2 (y+3) = -1 \end{cases}$ を解け。

解説

(1) 与えられた連立方程式を整理すると

$$\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 3 & \dots \textcircled{1} \\ 2\log_2 x + \log_2 y = -4 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②より

$$\log_2 x = -3, \log_2 y = 2 \quad \therefore \alpha = 2^{-3}, \beta = 2^2$$

よって

$$\alpha\beta = 2^{-3} \cdot 2^2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

(2) $\begin{cases} 4(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} y = 1 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 y = 10 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ とする

真数条件より, $x > 0, y > 0$

$$\textcircled{2} \text{より, } y = \frac{10}{x^2}$$

①より

$$4(\log_{10} x)^2 + 2\log_{10} \frac{10}{x^2} = 1 \quad 4(\log_{10} x)^2 - 4\log_{10} x + 1 = 0$$

$$(2\log_{10} x - 1)^2 = 0 \quad \therefore \log_{10} x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{10}, y = 1$$

別解 ②の両辺を底が 10 の対数をとって考えてもよい。

$$(3) \begin{cases} \log_x y + 2\log_y x = 3 & \dots \textcircled{1} \\ \log_x (y^2 + xy) = 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

底の条件，真数条件より

$$x \neq 1, y \neq 1, x > 0, y > 0$$

$$\textcircled{2} \text{より}, y^2 + xy = x^2 \dots \textcircled{3}$$

①より

$$\log_x y + \frac{2}{\log_x y} = 3$$

$$(\log_x y)^2 - 3\log_x y + 2 = 0$$

$$(\log_x y - 1)(\log_x y - 2) = 0$$

$$\therefore \log_x y = 1, 2 \quad \therefore y = x, x^2$$

$y = x$ のとき，③より

$$x^2 + x^2 = x^2 \quad x = 0 \text{ となり不適}$$

$y = x^2$ のとき，③より

$$x^4 + x^3 = x^2$$

$x \neq 0$ より

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x > 0 \text{ より}, x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, y = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

(4) 底の条件，真数条件より

$$x > 0, 2x \neq 1, x \neq 1, y > 0, xy > 0$$

$$\therefore x > 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1, y > 0$$

与えられた連立方程式を整理すると

$$\begin{cases} \frac{\log_2 y}{1 + \log_2 x} + \frac{1 + \log_2 y}{\log_2 x} = 1 \dots \textcircled{1} \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{より}, \log_2 y = 1 - \log_2 x$$

①より

$$\frac{1 - \log_2 x}{1 + \log_2 x} + \frac{2 - \log_2 x}{\log_2 x} = 1$$

$$\log_2 x (1 - \log_2 x) + (1 + \log_2 x)(2 - \log_2 x) = (1 + \log_2 x) \log_2 x$$

$$3(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

$$(\log_2 x - 1)(3\log_2 x + 2) = 0 \quad \therefore \log_2 x = 1, -\frac{2}{3} \quad \therefore x = 2, 2^{-\frac{2}{3}}$$

よって

$$(x, y) = (2, 1), \left(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{\frac{5}{3}}\right)$$

$$(5) \begin{cases} 8 \cdot 3^x - 3^y = -27 \cdots \textcircled{1} \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{とおく}$$

真数条件より

$$x+1 > 0, y+3 > 0 \quad \therefore x > -1, y > -3$$

②より

$$\log_2(x+1) + 1 = \log_2(y+3)$$

$$\log_2 2(x+1) = \log_2(y+3)$$

$$2(x+1) = y+3 \quad \therefore y = 2x-1$$

①に代入して

$$8 \cdot 3^x - 3^{2x-1} = -27$$

$$(3^x)^2 - 24 \cdot 3^x - 81 = 0$$

$$(3^x + 3)(3^x - 27) = 0$$

$3^x > 0$ より

$$3^x = 27 \quad \therefore x = 3, y = 5$$

確認問題5

2つの不等式

$$a^{2x-4}-1 < a^{x+1}-a^{x-5}, \quad 2\log_a(x-2) \geq \log_a(x-2) + \log_a 5$$

を満たす x の値の範囲を求めよ. ただし, a は正の定数で, $a \neq 1$ とする.

解説

$$a^{2x-4}-1 < a^{x+1}-a^{x-5} \dots \textcircled{1}$$

$$2\log_a(x-2) \geq \log_a(x-2) + \log_a 5 \dots \textcircled{2}$$

真数条件より, $x > 2$

①より

$$a^{2x} - (a^5 - a^{-1})a^x - a^4 < 0$$

$$(a^x + a^{-1})(a^x - a^5) < 0 \quad \therefore 0 < a^x < a^5 \quad (a^x > 0)$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき, } x > 5 \quad \therefore x > 5 \dots \textcircled{3}$$

$$a > 1 \text{ のとき, } x < 5 \quad \therefore 2 < x < 5 \dots \textcircled{4}$$

②より

$$\log_a(x-2)^2 \geq \log_a 5(x-2)$$

(i) $0 < a < 1$ のとき

$$(x-2)^2 \leq 5(x-2)$$

$$(x-2)(x-7) \leq 0$$

③より

$$5 < x \leq 7$$

(ii) $a > 1$ のとき

$$(x-2)(x-7) \geq 0$$

④より, 解なし