2.3　指数関数を含む関数

(1) 指数関数を含む関数

例1
関数 $y=4^x-2^{x+2}+1$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

(解説)

$y=4^x-2^{x+2}+1$

$2^x=t$ とおくと，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 8$

　$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

$t=8$ のとき最大

　最大値 33　このとき $x=3$

$t=2$ のとき最小

　最小値 -3　このとき $x=1$

例2
関数 $f(x)=4^x-6\cdot 2^x$ は $x=$ ア$\boxed{}$ のとき最小値 イ$\boxed{}$ をとる。また，a を定数とする方程式 $4^x-6\cdot 2^x=a$ がただ1つの解をもつのは $a=$ ウ$\boxed{}$ または $a\geqq$ エ$\boxed{}$ のときである。

(解説)

$f(x)=(2^x)^2-6\cdot 2^x$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$

　$g(t)=t^2-6t\ (t>0)$ とおく

　　$=(t-3)^2-9$

$t=3$ のとき最小

　最小値 -9

このとき

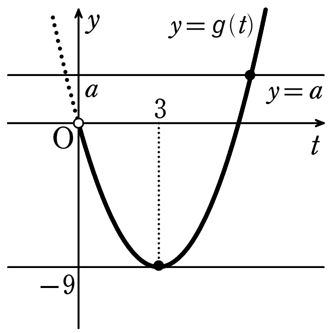
　$2^x=3$　$\therefore\ x=\log_2 3$

$4^x-6\cdot 2^x=a$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$

$\quad t^2-6t=a$

これを満たす t の個数は，$y=g(t)$ と $y=a$ の共有点の個数に等しい



$2^x=t$ において，2^x は単調増加であるから

1 つの t に対して 1 つの x が対応することに注意して

$f(x)=a$ がただ 1 つの解をもつとき，

$g(t)=a$ がただ 1 つの解をもてばよいから，グラフより

$\quad a={}^{ウ}-9$ または $a\geqq{}^{エ}0$

例3

実数 a に対して，x についての方程式 $4^x+a\cdot 2^{x+2}+3a+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(解説)

$4^x+a\cdot 2^{x+2}+3a+1=0$ …①

$2^x=t$ とおくと，$t>0$

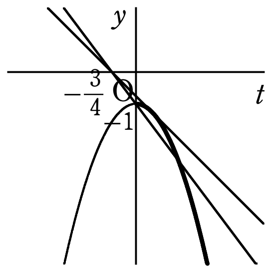
$\quad t^2+4at+3a+1=0$

$\quad -t^2-1=4a\left(t+\dfrac{3}{4}\right)$ …②

これを満たす t の個数は，

$y=-t^2-1\ (t>0)$ と $y=4a\left(t+\dfrac{3}{4}\right)$

の共有点の個数に等しい



$2^x=t$ において，1 つの t に対して

1 つの x が対応することに注意して

①が異なる 2 つの実数解をもつとき，

②が $t>0$ で異なる 2 つの実数解をもてばよい

ここで，$y=-t^2-1$ と $y=4a\left(t+\dfrac{3}{4}\right)$ が $t>0$ で接するとき，

$t^2+4at+3a+1=0$ が重解をもてばよいから，

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=0$ より

$\quad (2a)^2-(3a+1)=0$

$$4a^2-3a-1=0$$
$$(a-1)(4a+1)=0$$

$t=-2a>0$，すなわち $a<0$ より， $a=-\dfrac{1}{4}$

グラフより

$$-\frac{1}{3}<a<-\frac{1}{4}$$

例4

a を実数とし， $f(x)=4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2+a-6$ とおく。

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x が 2 つあるような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)=0$ を満たす実数 x が 1 つもないような a の値の範囲を求めよ。

解説

(1) $4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2+a-6=0$

$2^x=t$ とおくと， $t>0$

$$t^2-2at+a^2+a-6=0 \cdots ①$$

① の判別式を D， 2 解を α, β とすると

$2^x=t$ において， x の値は t の値と 1 対 1 に対応することに注意して，

$f(x)=0$ を満たす x が 2 つあるとき，

①を満たす t が $t>0$ に 2 つあればよいから

$$\frac{D}{4}>0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$$
$$a^2-(a^2+a-6)>0, 2a>0, a^2+a-6>0$$
$$a<6, a>0, (a<-3, a>2) \quad \therefore 2<a<6$$

(2) $f(x)=0$ を満たす実数 x が 1 つもないのは

(i) ① が実数解をもたない

(ii) ① が $t\leqq 0$ の範囲にのみ実数解をもつ

(i) $D<0 \quad \therefore a>6$

(ii) $D\geqq 0, \alpha+\beta\leqq 0, \alpha\beta\geqq 0$

$$a\leqq 6, a\leqq 0, (a\leqq -3, a\geqq 2) \quad \therefore a\leqq -3$$

(i), (ii)より， $a\leqq -3, a>6$

(2) a^x+a^{-x} を含む関数

例5

(1) x がすべての実数値をとって変化するとき，$7\cdot2^x+2^{3-x}$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(2) 実数 x，y が $2x+3y=3$ を満たすとき，4^x+8^y は，$x=$ ア $\boxed{}$，$y=$ イ $\boxed{}$ で最小値 ウ $\boxed{}$ をとる。

解説

(1) $7\cdot2^x+2^{3-x}=7\cdot2^x+8\cdot\dfrac{1}{2^x}$

$2^x>0$ から，相加相乗平均より

$$7\cdot2^x+2^{3-x}\geqq2\sqrt{7\cdot2^x\cdot8\cdot\frac{1}{2^x}}=4\sqrt{14}$$

等号成立は

$$7\cdot2^x=8\cdot\frac{1}{2^x}\qquad 2^{2x}=\frac{8}{7}\text{ のとき}$$

$2^{2x}>0$ より，これを満たす実数 x は存在し $\left(x=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{8}{7}\right)$,

最小値 $4\sqrt{14}$

(2) $4^x+8^y=2^{2x}+2^{3y}$

$3y=3-2x$ より

$$=2^{2x}+2^{3-2x}=2^{2x}+8\cdot\frac{1}{2^{2x}}$$

$2^{2x}>0$ から，相加相乗平均より

$$\geqq2\sqrt{2^{2x}\cdot8\cdot\frac{1}{2^{2x}}}=4\sqrt{2}$$

等号成立は

$$2^{2x}=8\cdot\frac{1}{2^{2x}}\qquad 2^{4x}=2^3\qquad\therefore\ x=\frac{3}{4},\ y=\frac{1}{2}\text{ のとき}$$

このとき，最小値をとり，

最小値は $4\sqrt{2}$

例6

方程式 $2(4^x+4^{-x})-9(2^x+2^{-x})+14=0$ …… ① について

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおき，① を t の方程式に直せ.

(2)　① を満たす x の値を求めよ.

(解説)

(1) $t=2^x+2^{-x}$ とおくと，　$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$ (等号成立は $x=0$ のとき)

　$t^2=(2^x+2^{-x})^2=4^x+2+4^{-x}$　　$\therefore 4^x+4^{-x}=t^2-2$

このとき，①は

　$2(t^2-2)-9t+14=0$

　$\therefore 2t^2-9t+10=0$

(2) $(2t-5)(t-2)=0$

$t \geqq 2$ より，　$t=\dfrac{5}{2}$，2

$t=\dfrac{5}{2}$ のとき

　$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$

　$2 \cdot (2^x)^2-5 \cdot 2^x+2=0$

　$(2 \cdot 2^x-1)(2^x-2)=0$　　$\therefore 2^x=\dfrac{1}{2}$，2　　$\therefore x=-1$，1

$t=2$ のとき

　$2^x+2^{-x}=2$

　$(2^x)^2-2 \cdot 2^x+1=0$

　$(2^x-1)^2=0$　$\therefore 2^x=1$　　$\therefore x=0$

よって，　$x=-1$，0，1

例7

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)=4^x-2(2^x+2^{-x})+4^{-x}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

(解説)

$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，　$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$ (等号成立は $x=0$ のとき)

　$t^2=(2^x+2^{-x})^2=4^x+2+4^{-x}$　　$\therefore 4^x+4^{-x}=t^2-2$

このとき

　$f(x)=t^2-2-2t=(t-1)^2-3\,(t \geqq 2)$

$t=2$ のとき最小

　最小値 -2

このとき，$x=0$

例8

実数 x に対して，$t=2^x+2^{-x}$，$y=4^x-6\cdot 2^x-6\cdot 2^{-x}+4^{-x}$ とおく．

(1)　x が実数全体を動くとき，t の最小値を求めよ．

(2)　y を t の式で表せ．

(3)　x が実数全体を動くとき，y の最小値を求めよ．

(4)　a を実数とするとき，$y=a$ となるような x の個数を求めよ．

解説

(1) $2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加相乗平均より

$$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

等号成立は $2^x=2^{-x}$，すなわち $x=0$ のとき

よって，t の最小値は 2

(2) $y=4^x+4^{-x}-6(2^x+2^{-x})$

$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，

$$t^2=4^x+4^{-x}+2 \quad \therefore\ 4^x+4^{-x}=t^2-2$$

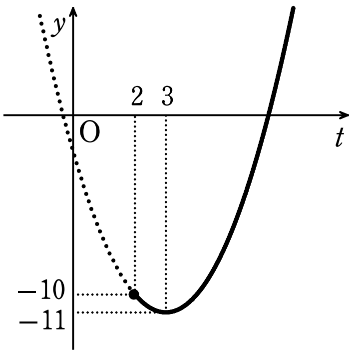
よって

$$y=(t^2-2)-6t=t^2-6t-2$$

(3) $y=t^2-6t-2=(t-3)^2-11\ (t\geqq 2)$

$t=3$ のとき最小で，最小値 -11

(4) $y=a$ を満たす t の個数は，



$y=t^2-6t-2\,(t\geqq 2)$ と $y=a$ の共有点の個数に等しい

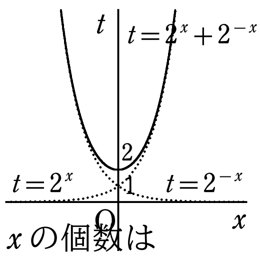
$t=2^x+2^{-x}$ において，

1 つの t に対して，

$t=2$ のときは 1 つの x

$t>2$ のときは 2 つの x

が対応することに注意



して $y=a$ となるような x の個数は

　$a<-11$ のとき　0 個　　$a=-11$ のとき　2 個

　$-11<a<-10$ のとき　4 個　　$a=-10$ のとき　3 個

　$a>-10$ のとき　2 個

例9

kを実数とする。xについての方程式$9^x-k(3^x+3^{-x})+9^{-x}+\dfrac{k^2}{4}+k-17=0$が実数解をもつとき，定数$k$の値の範囲を求めよ。

解説

$9^x-k(3^x+3^{-x})+9^{-x}+\dfrac{k^2}{4}+k-17=0$ …①

$3^x+3^{-x}=t$とおくと，$t\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$(等号成立は$x=0$のとき)

$t^2=9^x+9^x+2 \qquad \therefore 9^x+9^{-x}=t^2-2$

このとき

$t^2-kt+\dfrac{k^2}{4}+k-19=0$ …②

①が実数解をもつためには

②が$t\geqq 2$である実数解を少なくとも1つもてばよい

②の判別式をDとし，$f(t)=t^2-kt+\dfrac{k^2}{4}+k-19$とおく

②が$t\geqq 2$である実数解を少なくとも1つもつとき

(ⅰ) $t=2$を解にもつ

(ⅱ) $t>2$に2つの実数解をもつ

(ⅲ) $t<2$に1つの実数解をもち，$t>2$に1つの実数解をもつ

(ⅰ) $\dfrac{k^2}{4}-k-15=0$

$k^2-4k-60=0$

$(k+6)(k-10)=0 \qquad \therefore k=-6, 10$

(ⅱ) $D\geqq 0, \dfrac{k}{2}>2, f(2)>0$

$k^2-4\left(\dfrac{k^2}{4}+k-19\right)\geqq 0, k>4, \dfrac{k^2}{4}-k-15>0$

$k\leqq 19, k>4, (k<-6, k>10) \qquad \therefore 10<k\leqq 19$

(ⅲ) $f(2)<0$

$-6<k<10$

(ⅰ)～(ⅲ)より

$-6\leqq k\leqq 19$

確認問題1

a を定数とする。x についての方程式

$$4^{x+1}-2^{x+4}+5a+6=0$$

が異なる 2 つの正の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(解説)

$4^{x+1}-2^{x+4}+5a+6=0$ …①

$4\cdot(2^x)^2-16\cdot2^x+5a+6=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$　1 つの t に対して 1 つの x が対応する

$4t^2-16t+5a+6=0$

$-4t^2+16t-6=5a$ …②

①が異なる 2 つの正の実数解をもつとき，

②を満たす $t>1$ となる異なる 2 つの t が存在すればよい

②を満たす $t>1$ である t の個数は

$y=-4t^2+16t-6=-4(t-2)^2+10\ (t>1)$ と $y=5a$

の共有点の個数に等しいから，求める a の値の範囲は

$6<5a<10$

$\therefore \dfrac{6}{5}<a<2$

確認問題2

x についての方程式 $4^x-a^2\cdot 2^x+2a^2+4a-6=0$ が正の解と負の解をそれぞれ1つずつもつとき，定数 a の範囲を求めよ。

解説

$4^x-a^2\cdot 2^x+2a^2+4a-6=0$ …①

$(2^x)^2-a^2\cdot 2^x+2a^2+4a-6=0$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$　1つの t に対して1つの x が対応する

$t^2-a^2t+2a^2+4a-6=0$ …②

①が正の解と負の解をそれぞれ1つずつもつとき，

②を満たす $0<t<1, t>1$ となる t がそれぞれ1つずつ存在すればよい

このとき，$f(t)=t^2-a^2t+2a^2+4a-6$ とおくと

$f(0)>0$，$f(1)<0$

$f(0)>0$ より

$2a^2+4a-6>0$

$(a+3)(a-1)>0$　$\therefore\ a<-3$，$1<a$ …③

$f(1)<0$ より

$a^2+4a-5<0$

$(a+5)(a-1)<0$　$\therefore\ -5<a<1$ …④

③，④より

$-5<a<-3$

確認問題3
a，b を実数とする．x の方程式 $4^x+a\times 2^{x+1}+b=0$ について，次の問いに答えよ．
(1)　$a=-1$，$b=-3$ のときの解を求めよ．
(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもつような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を，座標平面上に図示せよ．

(解説)

(1) $4^x-2^{x+1}-3=0$

$(2^x)^2-2\cdot 2^x-3=0$

$(2^x-3)(2^x+1)=0$

$2^x>0$ より

$2^x=3$　　$\therefore\ x=\log_2 3$

(2) $4^x+a\times 2^{x+1}+b=0$ …①

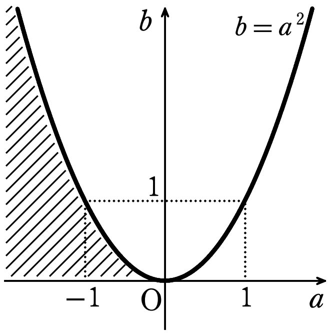
$2^x=t$ とおくと，$t>0$　1 つの t に対して 1 つの x が対応する

$t^2+2at+b=0$ …②

①が異なる 2 つの実数解をもつとき

②を満たす $t>0$ となる異なる 2 つの t が存在すればよい

このとき，②の 2 解を α,β，判別式を D とすると



$D>0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$

$D>0$ より

$\frac{D}{4}=a^2-b>0$　　$\therefore\ b<a^2$

$\alpha+\beta>0$ より

$-2a>0$　　$\therefore\ a<0$

$\alpha\beta>0$ より

$b>0$

求める集合は右図の斜線部

ただし，境界線は除く

確認問題4
方程式 $4^x+a\cdot 2^{x+1}+b=0$ がただ1つの実数解をもつような点 (a, b) の全体の集合を図示せよ．

解説

$4^x+a\cdot 2^{x+1}+b=0$ …①

$2^x=t$ とおくと， $t>0$　このとき，x と t は1対1に対応する

$t^2+2at+b=0$ …②

①がただ1つの解をもつとき

②を満たす $t>0$ となる t がただ1つ存在すればよい

(ⅰ) ②が $t=0$ を解にもつとき， $b=0$

このとき，②は

$t^2+2at=0$

$t(t+2a)=0$　　$t=0, -2a$

条件を満たすためには

$-2a>0$　　$\therefore a<0$

(ⅱ) ②が $t=0$ を解にもたないとき

$f(t)=t^2+2at+b$ とおく

(ア) ②が $t<0, t>0$ に1つずつ解をもつとき

$f(0)<0$　　$\therefore b<0$

(イ) ②が $t>0$ に重解をもつとき

②の判別式を D として

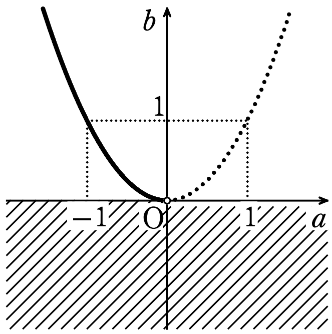
$D=0$, 軸 >0

$\therefore b=a^2, -a>0$

$\therefore b=a^2, a<0$

(ⅰ)，(ⅱ)より，求める集合は右図

ただし，境界は $b=0\,(a\geqq 0)$ は除く



確認問題5

不等式 $|3^x-3^{-x}|\leqq\dfrac{3}{2}$ を満たす実数 x に対して，次の問いに答えよ。

(1)　3^x+3^{-x} のとりうる値の範囲は，$^{ア}\boxed{}\leqq 3^x+3^{-x}\leqq{}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　$2\cdot9^x+2\cdot9^{-x}-3^{x+2}-3^{-x+2}$ のとりうる値の範囲は，

$-^{ウ}\boxed{}\leqq 2\cdot9^x+2\cdot9^{-x}-3^{x+2}-3^{-x+2}\leqq -^{エ}\boxed{}$ である。

解説

(1) $3^x>0$, $3^{-x}>0$ から，相加相乗平均より

$3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}=2$

等号成立は $3^x=3^{-x}$ すなわち $x=0$ のときで

これは $|3^x-3^{-x}|\leqq\dfrac{3}{2}$ を満たす

$|3^x-3^{-x}|\leqq\dfrac{3}{2}$ より

$(3^x-3^{-x})^2\leqq\dfrac{9}{4}$　　$(3^x+3^{-x})^2-4\leqq\dfrac{9}{4}$　　$\therefore (3^x+3^{-x})^2\leqq\dfrac{25}{4}$

よって

$^{ア}2\leqq 3^x+3^{-x}\leqq{}^{イ}\dfrac{5}{2}$

(2) $y=2\cdot9^x+2\cdot9^{-x}-3^{x+2}-3^{-x+2}$ とおくと

$=2(9^x+9^{-x})-9\cdot3^x-9\cdot3^{-x}$

$=2\{(3^x+3^{-x})^2-2\}-9(3^x+3^{-x})$

$=2(3^x+3^{-x})^2-9(3^x+3^{-x})-4$

$t=3^x+3^{-x}$ とおくと

$=2t^2-9t-4=2\left(t-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{113}{8}$　　$2\leqq t\leqq\dfrac{5}{2}$

$t=\dfrac{9}{4}$ で最小値 $-\dfrac{113}{8}$， $t=2$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 -14 をとるから

$-^{ウ}\dfrac{113}{8}\leqq 2\cdot9^x+2\cdot9^{-x}-3^{x+2}-3^{-x+2}\leqq -^{エ}14$