1.4　加法定理の応用

(1) 2 倍角の公式

　正弦，余弦，正接の加法定理において，$\beta=\alpha$ とすると，次の **2 倍角の公式**が得られます。三角関数の範囲では公式がたくさん出てきますが，すべて加法定理から導かれるので，暗記しようとせず導き方を理解することが大切です。

2 倍角の公式
1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\qquad\quad=1-2\sin^2\alpha$
$\qquad\quad=2\cos^2\alpha-1$
3. $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1. $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)$

$$=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$

2. $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)$

$$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ であるから，

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ より，　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ より，　$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

3. $\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

$$=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

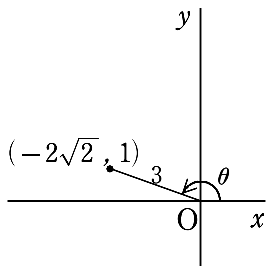
例1

(1) $90° < \theta < 180°$ で $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$, $\sin 2\theta$, $\tan 2\theta$ の値を求めよ．

(2) $\tan 2\theta = \dfrac{1}{2}$ $(0° < \theta < 45°)$ のとき，$\tan\theta = {}^{ア}\boxed{} + \sqrt{{}^{イ}\boxed{}}$ である．

解説

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$, $90° < \theta < 180°$ より



$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

別解

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) \div \frac{7}{9} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

(2) $\tan 2\theta = \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\tan^2\theta + 4\tan\theta - 1 = 0$$

$0° < \theta < 45°$ から，$0 < \tan\theta < 1$ より

$$\tan\theta = {}^{ア}-2 + \sqrt{{}^{イ}5}$$

例2

(1) $\sin 2\theta = \dfrac{3}{4}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき，$\cos\theta + \sin\theta = {}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\cos\theta - \sin\theta = {}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) $\cos\theta + \sin\theta = \dfrac{4}{3}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき，$\sin 2\theta = {}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\sin 4\theta = {}^{イ}\boxed{}$ である。

(3) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{2}{3}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta = {}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\cos 2\theta = {}^{イ}\boxed{}$ である。

(4) $3\sin\theta + \cos\theta = 3$ が成り立っているとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

解説

(1) $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 1 + \sin 2\theta = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\cos\theta + \sin\theta > 0$ より

$$\cos\theta + \sin\theta = {}^{ア}\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - \sin 2\theta = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき， $\cos\theta > \sin\theta$ であるから， $\cos\theta - \sin\theta > 0$ より

$$\cos\theta - \sin\theta = {}^{イ}\frac{1}{2}$$

(2) $\cos\theta + \sin\theta = \dfrac{4}{3}$

両辺を 2 乗して

$$\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = \frac{16}{9}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9}$$

$$2\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{9} \qquad \therefore\ \sin 2\theta=^{ア}\frac{7}{9}$$

$0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ から $\cos 2\theta>0$ より

$$\cos 2\theta=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

よって

$$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta\ =2\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=^{イ}\frac{56\sqrt{2}}{81}$$

(3) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{2}{3}$

両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{9}\right)=^{ア}\frac{5}{18}$$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)$

ここで

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{14}{9}$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ から $\sin\theta+\cos\theta>0$ より

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{3}$$

よって

$$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=^{イ}-\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

(4) $3\sin\theta+\cos\theta=3$ より，　$\cos\theta=3(1-\sin\theta)$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$5\sin^2\theta-9\sin\theta+4=0$$

$$(\sin\theta-1)(5\sin\theta-4)=0$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から $0<\sin\theta<1$ より，　$\sin\theta=\frac{4}{5}$

また $0<\cos\theta<1$ より

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{24}{25}$$

(2) **半角の公式**

2 倍角の公式より，次の**半角の公式**が得られます。

半角の公式
1. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
2. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
3. $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

1. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ より，

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$\alpha=\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと，

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

2. $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ より，

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$\alpha=\dfrac{\alpha}{2}$ とおけばよい。

3. $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

例3

(1) 実数 θ が $0<\theta<2\pi$，$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ を満たすとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値は $\boxed{}$ である。

(3) $\sin^2 37.5°$ の値を求めよ.

(解説)

(1) $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{9}{10}$

$0<\dfrac{\theta}{2}<\pi$ から $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ より

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ より

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\sin^2 37.5°=\dfrac{1-\cos 75°}{2}$

ここで

$$\begin{aligned}\cos 75° &= \cos(30°+45°)\\ &= \cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

よって

$$\sin^2 37.5°=\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$$

(3) 3 倍角の公式

加法定理と 2 倍角の公式より，次の 3 倍角の公式が得られます。

3 倍角の公式

1. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

1. $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$

$$
\begin{aligned}
&= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha
\end{aligned}
$$

2. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$

$$
\begin{aligned}
&= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}
$$

例4

(1) θ は第 2 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$ であるとする。このとき，3θ は第何象限の角か。

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。$n\theta > \dfrac{\pi}{2}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(解説)

(1) $\cos\theta = -\dfrac{3}{4}$, θ は第 2 象限の角より

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) - 4\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^3 > 0$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) > 0$$

より， 3θ は第 1 象限の角である

(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{2}, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{5}$

$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{5\sqrt{5}}>0$

$\cos4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-1=-\dfrac{7}{25}<0$

$0<\varphi<\pi$ で $\cos\varphi$ は単調減少より

$n\theta>\dfrac{\pi}{2}$ となる最小の自然数 n は $n=4$

例5

(1)　三角関数の加法定理を用いて，任意の角 θ に対し，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

(2)　$\theta=18°$ のとき，$\cos2\theta=\sin3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\sin18°$ の値を求めよ。

(解説)

(1) 省略

(2) $\theta=18°$ のとき，$5\theta=90°$

$\cos2\theta=\cos(5\theta-3\theta)=\cos(90°-3\theta)=\sin3\theta$

(3) $\theta=18°$ のとき，(2)より

$1-2\sin^2\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$4\sin^3\theta-2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$t=\sin\theta$ とおくと，$0<t<1$

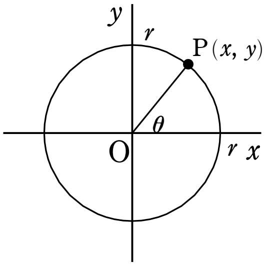
$4t^3-2t^2-3t+1=0$

$(t-1)(4t^2+2t-1)=0$

$0<t<1$ より

$t=\sin18°=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(4) 円の媒介変数表示



円周 $x^2+y^2=r^2$ 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，
動径 OP と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

と表すことができます。

例6
実数 x，y が $x^2+y^2=8$ を満たすとき，積 xy の最大値を求めよ。

解説

実数 x，y は $x^2+y^2=8$ を満たすから

$x=2\sqrt{2}\cos\theta$, $y=2\sqrt{2}\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

このとき

$xy=2\sqrt{2}\cos\theta\cdot2\sqrt{2}\sin\theta=8\sin\theta\cos\theta=4\sin2\theta$

$0\leqq2\theta<4\pi$ より

$\sin2\theta$ は $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ のとき最大値 1 をとる

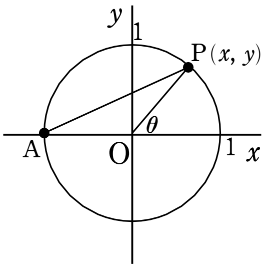
よって，xy の最大値は 4

(5) 三角関数の媒介変数表示

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，

$$\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \tan\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$$

と表すことができます。



$\mathrm{A}(-1,0)$ とし，A を通る直線と円周 $x^2+y^2=1$ との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とします。AP の傾きを t とし，動径 OP と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，AP と x 軸正の向きとのなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ であるから，

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$

このとき，Pは円周 $x^2+y^2=1$ とAP: $y=t(x+1)$ との交点より，

$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$
$$x^2-1+t^2(x+1)^2=0$$
$$(x+1)(x-1)+t^2(x+1)^2=0$$
$$(x+1)\{(x-1)+t^2(x+1)\}=0$$
$$(x+1)\{(1+t^2)x-(1-t^2)\}=0$$

$x\neq-1$ より，

$$(1+t^2)x-(1-t^2)=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$y=t(x+1)$ より

$$y=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$P(\cos\theta, \sin\theta)$ と表せるから，

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}, \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\tan\theta$ に関しては， tan の2倍角の公式や $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より得られます。

$\boxed{\text{別解}}$

$$\sin\theta=\sin 2\cdot\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\theta=\cos 2\cdot\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

例7

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin 2\theta$ の値は ア$\boxed{}$ であり，

$\cos 2\theta$ の値は イ$\boxed{}$ である。

解説

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{7}{25}$$

別解

$\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めてから，2 倍角の公式を利用しても解けます。

例8

実数 x は $-\pi<x<\pi$ の範囲を動くとする。このとき，関数

$f(x)=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ として，等式 $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ を示せ。

(2)　$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

解説

(1) 省略

(2) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$-\pi<x<\pi$ より t の値の範囲は実数全体

$$f(x)=\frac{1+\sin x}{3+\cos x}=\frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{3+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{t^2+2t+1}{2t^2+4}=k \text{ とおく}$$

$t^2+2t+1=k(2t^2+4)$

$(2k-1)t^2-2t+4k-1=0$

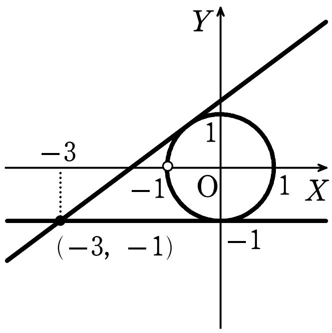
$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，$t=\dfrac{1}{2}$

$k \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ のとき，判別式を D とすると t は実数全体を動くから

$\dfrac{D}{4} \geqq 0$ より

$$1-(2k-1)(4k-1) \geqq 0$$
$$8k^2-6k \leqq 0$$
$$k(4k-3) \leqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq k < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < k \leqq \frac{3}{4}$$

よって，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{3}{4}$，最小値は 0



別解

$f(x) = \dfrac{\sin x-(-1)}{\cos x-(-3)}$

$f(x)$ は$(-3,\ -1)$ と $(\cos x,\ \sin x)$ を通る直線の傾きを表す

点 $(\cos x,\ \sin x)$ $(-\pi < x < \pi)$ は

円 $X^2+Y^2=1$ $(X \fallingdotseq -1)$ 上より，

定点 $(-3,\ -1)$ を通る直線 $Y=m(X+3)-1$，

すなわち $mX-Y+3m-1=0$ がこの円と共有点をもつときの

m の最大値と最小値が $f(x)$ の最大値と最小値になる。

これらが共有点をもつとき

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} \leqq 1$$
$$|3m-1| \leqq \sqrt{m^2+1}$$
$$9m^2-6m+1 \leqq m^2+1$$
$$8m^2-6m \leqq 0$$
$$m(4m-3) \leqq 0 \qquad \therefore\ 0 \leqq m \leqq \frac{3}{4}$$

よって，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{3}{4}$，最小値は 0

確認問題1

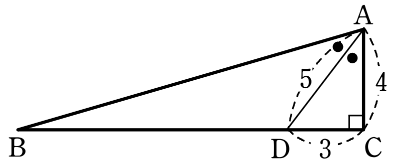
∠C を直角とする直角三角形 ABC に対して，∠A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD，DC，CA の長さはそれぞれ 5，3，4 とする。∠A$=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\theta<\frac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

(解説)

(1) 右図より



$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}=\frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{4}{5}$$

よって

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

(2)
$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$>\frac{1.41\times(1.73+1)}{4}=0.962\cdots>\sin\theta$$

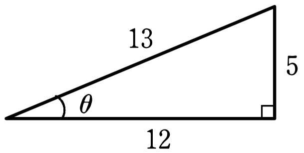
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において $\sin\theta$ は単調に増加するから

$$\theta<\frac{5}{12}\pi$$

確認問題2

3 辺の長さが 5，12，13 である三角形において，長さが 12，13 である 2 辺によって挟まれる角の大きさを θ とする。このとき，$n^\circ < \theta < (n+1)^\circ$ となる整数 n の値を求めよ。

解説

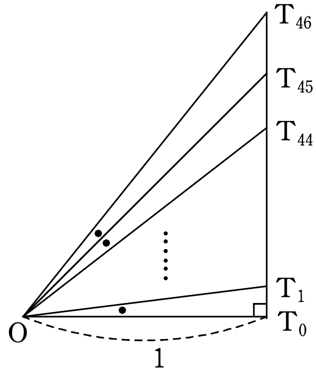


$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$ より

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

$$1 = \tan 45^\circ < \tan 2\theta = 1 + \frac{1}{119} \quad \cdots\cdots ①$$

k°（$k=0$，1，2，……，46）を表す動径と直線 $x=1$ の交点を T_k とすると



角の二等分線の定理より

$$\mathrm{T}_0\mathrm{T}_1 < \mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 < \cdots\cdots < \mathrm{T}_{45}\mathrm{T}_{46}$$

よって

$$\frac{1}{45} < \mathrm{T}_{44}\mathrm{T}_{45} < \mathrm{T}_{45}\mathrm{T}_{46}$$

$$1 + \frac{1}{45} < 1 + \mathrm{T}_{45}\mathrm{T}_{46} = \tan 46^\circ$$

したがって

$$\tan 45^\circ < \tan 2\theta < \tan 46^\circ$$

$\tan\varphi$ は $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ で単調増加より，

$$45^\circ < 2\theta < 46^\circ \quad \therefore\ 22.5^\circ < \theta < 23^\circ \quad \therefore\ n = 22$$

確認問題3

$\tan 1^\circ$ は有理数か。

解説

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ より

$\tan 2^\circ$，$\tan 4^\circ$，$\tan 8^\circ$，$\tan 16^\circ$，$\tan 32^\circ$，$\tan 64^\circ$

はすべて有理数となる

このとき，$\tan 60^\circ = \tan(64^\circ - 4^\circ) = \dfrac{\tan 64^\circ - \tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ \tan 4^\circ}$ であるから

$\tan 60^\circ$ は有理数となる

ところが $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ より，$\sqrt{3}$ は無理数であるから矛盾

よって，$\tan 1^\circ$ は有理数ではない

確認問題4

次の問いに答えよ。ただし，π は円周率を表す。

(1)　半径が 1 の円に外接する正十二角形の面積を求めよ。

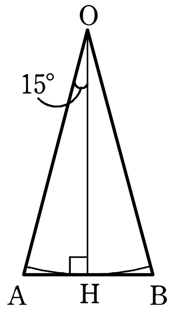
(2)　(1) の結果を用いて，$0<\alpha\leqq\sqrt{3}$ のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\pi<\frac{12}{\alpha+2}$$

(3)　$\pi<3.22$ を示せ。

(解説)

(1) 正十二角形の隣り合った 2 つの頂点を A，B とし，円の中心を O，円と辺 AB の接点を H とする



$$\angle\mathrm{AOH}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{12}=15^\circ$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}&=2\mathrm{OH}\tan 15^\circ\\&=2\tan(45^\circ-30^\circ)\\&=\frac{2(\tan 45^\circ-\tan 30^\circ)}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}\\&=4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=12\times\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{OH}=24-12\sqrt{3}$$

(2) $0<\alpha\leqq\sqrt{3}$ のとき，$\dfrac{12}{\alpha+2}$ は $\alpha=\sqrt{3}$ で最小となり，

その最小値は $\dfrac{12}{\sqrt{3}+2}=24-12\sqrt{3}$ より

$$S=24-12\sqrt{3}\leqq\frac{12}{\alpha+2}$$

また，半径 1 の円の面積 $\pi<S$ より

$$\pi<\frac{12}{\alpha+2}$$

(3) (2) より，$\pi<\dfrac{12}{\sqrt{3}+2}=24-12\sqrt{3}$

$1.732<\sqrt{3}$ であるから，$24-12\sqrt{3}<24-12\cdot1.732=3.216$ より

$$\pi<3.216<3.22$$

確認問題5

(1)　$\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ を用いて表せ。

(2)　$\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$ に着目して $\cos\frac{\pi}{5}$ と $\sin\frac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

(3)　積 $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

(解説)

(1) 省略

(2) $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{3\pi}{5}$ より

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=3\sin\frac{\pi}{5}-4\sin^3\frac{\pi}{5}$$

$\sin\frac{\pi}{5}\neq 0$ であるから，両辺 $\sin\frac{\pi}{5}$ で割って

$$2\cos\frac{\pi}{5}=3-4\sin^2\frac{\pi}{5}$$

$$2\cos\frac{\pi}{5}=3-4\left(1-\cos^2\frac{\pi}{5}\right)$$

$$4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$\cos\frac{\pi}{5}>0$ より，　$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{5}>0$ より

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

(3) $\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}$ より

$$\text{与式}=\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{2\pi}{5}=4\sin^4\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}$$

$$=4\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)^4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=4\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$=5\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=5\left\{\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{4^2}\right\}^2=\frac{5}{16}$$

確認問題6

(1)　$\tan\theta$ が有理数ならば，$\cos 2\theta$ も有理数であることを示せ．

(2)　$\tan\theta$ が有理数ならば，$\sin 2\theta$ も有理数であることを示せ．

(解説)

有理数の和，差，積，商は有理数である

(1) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} - 1 = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

よって，$\tan\theta$ が有理数ならば，$\cos 2\theta$ も有理数である

(2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$

$$= 2\tan\theta\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

よって，$\tan\theta$ が有理数ならば，$\sin 2\theta$ も有理数である

発展 チェビシェフ多項式

例1

x の整式 $f_n(x)\,(n=0,1,2,\cdots)$ を

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ f_1(x)=x, \\ f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)\,(n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

で定める．

(1) 方程式 $f_5(x)=0$ を解け．

(2) $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta\,(n=2,3,4,5)$ を示せ．

(3) $\cos\dfrac{\pi}{10},\ \cos\dfrac{3\pi}{10},\ \cos\dfrac{7\pi}{10},\ \cos\dfrac{9\pi}{10}$ の値を求めよ．

解説

(1) $f_2(x)=2xf_1(x)-f_0(x)=2x^2-1$

$f_3(x)=2xf_2(x)-f_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$

$f_4(x)=2xf_3(x)-f_2(x)=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$

$$\begin{aligned} f_5(x)=2xf_4(x)-f_3(x)&=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x) \\ &=16x^5-20x^3+5x \end{aligned}$$

$f_5(x)=0$ となるのは

$$16x^5-20x^3+5x=0$$

$$x(16x^4-20x^2+5)=0$$

$$x=0,\ x^2=\frac{10\pm2\sqrt{5}}{16} \qquad \therefore\ x=0,\ \pm\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \pm\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

(2) $n=0,1$ のとき成り立つ

$n=k-1,\ k\ (\ k=1,2,\cdots\ )$ のとき成り立つと仮定して

$$f_{k-1}(\cos\theta)=\cos(k-1)\theta\,,\ f_k(\cos\theta)=\cos k\theta$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned} f_{k+1}(\cos\theta)&=2\cos\theta\, f_k(\cos\theta)-f_{k-1}(\cos\theta) \\ &=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta \\ &=\{\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta\}-\cos(k-1)\theta \text{ (積和公式)} \\ &=\cos(k+1)\theta \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ

以上から数学的帰納法より，

$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta\,(n=0,1,2,\cdots)$ が成り立つ

注 $n=2,3,4,5$ のときだけ示せばよいから，加法定理を利用してゴリゴリ計算してもよい。

(3) (2)より，$f_5\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$ であるから，

$\cos\frac{\pi}{10}$ は $f_5(x)=0$ の解である

同様にして，$\cos\frac{3\pi}{10}, \cos\frac{5\pi}{10}, \cos\frac{7\pi}{10}, \cos\frac{9\pi}{10}$ も $f_5(x)=0$ の解であり，

$0<\varphi<\pi$ で $\cos\varphi$ は単調減少であるから，これらの 5 つの値はすべて異なり，$f_5(x)=0$ の解はこれらですべてである

よって，

$$\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \cos\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{10}=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \cos\frac{9\pi}{10}=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

本問のように，

$$f_n(\cos t)=\cos nt \ (n=0, 1, 2, \cdots)$$

によって定義される n 次の多項式 $f_n(x)$ (すなわち，cos の n 倍角の公式を $\cos t$ で表して，$x=\cos t$ と置き換えた多項式) を，(第 1 種)**チェビシェフ多項式**といいます。与えられた漸化式がどのようにして導かれたかだけ確認しておきます。$n=1, 2, 3, \cdots$ として

$$\cos(n+1)t+\cos(n-1)t=2\cos nt\cos t \ (\text{和積公式})$$

$$\cos(n+1)t=2\cos t\cos nt-\cos(n-1)t$$

$$\therefore f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)$$

この漸化式により，本問で示したように第 1 種チェビシェフ多項式 $f_n(x)$ の存在性が証明されます。

例2

$0<\theta<\pi$ とし，$t=\cos 2\theta$ とおく。$\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ と $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}$ をそれぞれ t を用いて表すと ア$\boxed{}$ と イ$\boxed{}$ となる。$\sin 5\theta=0$ となる θ のうち，$0<\theta<\pi$ において最小のものの値は ウ$\boxed{}$ である。したがって，$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の値は エ$\boxed{}$ である。

解説

(ア) $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\dfrac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta$

$$=3-4\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$=2\cos 2\theta+1=2t+1$$

(イ) $\sin 5\theta=\sin(4\theta+\theta)$

$$=\sin 4\theta\cos\theta+\cos 4\theta\sin\theta$$

$$=2\sin 2\theta\cos 2\theta\cdot\cos\theta+(2\cos^2 2\theta-1)\sin\theta$$

$$=4\sin\theta\cos^2\theta\cos 2\theta+(2\cos^2 2\theta-1)\sin\theta$$

$$=\sin\theta\{2(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta+(2\cos^2 2\theta-1)\}$$

$$=\sin\theta(4\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-1)$$

よって

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=4t^2+2t-1$$

(ウ) $\sin 5\theta=0$

$5\theta=n\pi$ (n は整数)　$\therefore\ \theta=\dfrac{n}{5}\pi$

$0<\theta<\pi$ において最小のものは $\theta=\dfrac{\pi}{5}$

(エ) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta}=0$ であるから

(イ) の結果より

$$4t^2+2t-1=0$$

$t=\cos\dfrac{2}{5}\pi>0$ より，$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　　$\therefore\ \cos\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$g_n(\cos t)=\dfrac{\sin nt}{\sin t}$ ($\sin nt=g_n(\cos t)\sin t$) ($n=1, 2, 3, \cdots$)

によって定義される $n-1$ 次の多項式 $g_n(x)$ を，(第 2 種)**チェビシェフ多項式**といいます。これも同様に漸化式を得ることができます。

$\sin 2t=2\sin t\cos t$ より

$g_1(x)=1, g_2(x)=2x$

$n=1, 2, 3, \cdots$ として

$\sin(n+2)t+\sin nt=2\sin(n+1)t\cos t$ (和積公式)

$\sin(n+2)t=2\sin(n+1)t\cos t-\sin nt$

$$\begin{aligned} g_{n+2}(\cos t)\sin t &= 2g_{n+1}(\cos t)\sin t\cos t-g_n(\cos t)\sin t \\ &=\{2g_{n+1}(\cos t)\cos t-g_n(\cos t)\}\sin t \end{aligned}$$

よって

$g_{n+2}(x)=2xg_{n+1}(x)-g_n(x)$

第 1 種チェビシェフ多項式と初項，第 2 項は異なりますが，同じ漸化式を得ることができます。

第 1 種チェビシェフ多項式と第 2 種チェビシェフ多項式と合わせて**チェビシェフ多項式**といいます。