3.4　階差数列

(1) 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差

$b_n = a_{n+1} - a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**といいます。例えば，

数列 $1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots$ の階差数列は，$3, 5, 7, 9, 11, \cdots$ となり，

初項 3，公差 2 の等差数列である。

階差数列を用いて，もとの数列の一般項を表すことを考えます。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき

$a_2 - a_1 = b_1$

$a_3 - a_2 = b_2$

$a_4 - a_3 = b_3$

$\cdots$

$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$

これらをすべて加えると，$n \geqq 2$ のとき

$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$

$\therefore \ a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

よって，数列 $\{a_n\}$ とその階差数列 $\{b_n\}$ について，次のことが成り立ちます。

階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

例1

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=5$，$a_2=7$，$a_3=11$ を満たすとする。数列 $\{a_n\}$ の階差数列が等差数列であるとき $a_n=$ ア $\boxed{}$ である。また，数列 $\{a_n\}$ の階差数列が等比数列であるとき $a_n=$ イ $\boxed{}$ である。

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_1=a_2-a_1=2$，$b_2=a_3-a_2=4$

$\{b_n\}$ が等差数列のとき，公差は $b_2-b_1=2$ より

$b_k=2+2(k-1)=2k$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2k=5+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+5 \cdots ①$$

$n=1$ のとき $1^2-1+5=5$ より，① は $n=1$ のときも成り立つ

したがって

$a_n={}^{ア}n^2-n+5 \ (n \geqq 1)$

$\{b_n\}$ が等比数列のとき，公比は $\dfrac{b_2}{b_1}=2$ より

$b_k=2\cdot 2^{k-1}=2^k$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^n+3 \cdots ②$$

$n=1$ のとき $2^1+3=5$ より，② は $n=1$ のときも成り立つ

したがって

$a_n={}^{イ}2^n+3 \ (n \geqq 1)$

例2

数列 -2, ${}^{ア}\boxed{}$, 0, 4, 10, 18, ${}^{イ}\boxed{}$, 40, …… の第 ${}^{ウ}\boxed{}$ 項は 108 である．また，最初の 20 項の和は ${}^{エ}\boxed{}$ である．

解説

$-2, a_2, 0, 4, 10, 18, a_7, 40, \cdots$ を $\{a_n\}$ とし，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

$b_1, b_2, 4, 6, 8, b_6, b_7, \cdots$

より，$b_n=2(n-1)$ と考えられる

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-2+\sum_{k=1}^{n-1}2(k-1)$$

$$=-2+2\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)=n(n-3)$$

この a_n は $a_1=-2$ も満たす.

よって, $a_2=$ ア -2, $a_7=$ イ 28

$a_n=108$ のとき

$n(n-3)=108$

$n^2-3n-108=0$

$(n+9)(n-12)=0$

n は自然数より, $n=12$

したがって, 108 は第 ウ12 項である

$$S_{20}=\sum_{k=1}^{20}k(k-3)=\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41-3\cdot\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=\text{エ}2240$$

例3

3 つの数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ があり, その各項の間に

$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

$c_n=b_{n+1}-b_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

なる関係があるものとする.

(1) 数列 $\{c_n\}$ が, 初項 20, 公差 -6 の等差数列であり, 更に $a_1=2, b_1=8$ であるときに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(2) a_n の最大値およびそのときの n の値を求めよ.

解説

(1) $c_k=20+(k-1)\cdot(-6)=-6k+26$

$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=8+\sum_{k=1}^{n-1}(-6k+26)$$

$$=-3(n-1)n+26(n-1)+8=-3n^2+29n-18$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

また, $n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(-3k^2+29k-18)$$

$$=2-\frac{1}{2}(n-1)n(2n-1)+\frac{29}{2}(n-1)n-18(n-1)$$

$$=-n^3+16n^2-33n+20$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

(2) $a_{n+1}-a_n=b_n=-3n^2+29n-18$

$$=-(3n^2-29n+18)=-(n-9)(3n-2)$$

$3n-2>0$ より

$n<9$ のとき $a_{n+1}-a_n>0$ より，$a_{n+1}>a_n$,

$n=9$ のとき $a_{n+1}=a_n$

$n>9$ のとき $a_{n+1}<a_n$

よって

$$a_1<a_2<\cdots\cdots<a_8<a_9=a_{10}>a_{11}>a_{12}>\cdots\cdots$$

したがって，$n=9, 10$ のとき最大で

最大値 290

注 $\{b_n\}$ を第 1 階差数列，$\{c_n\}$ を第 2 階差数列といいます。

例4

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求めよ．

1，2，4，10，23，46，82，134，……

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする．b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 を求めよ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の階差数列は等差数列である．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　(2) の結果を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解説

a_n：1　2　4　10　23　46　82　134

b_n：　1　2　6　13　23　36　52

　　　　1　4　7　10　13　16

(1) $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=6$, $b_4=13$, $b_5=23$

(2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とおくと，$\{c_n\}$ は等差数列より

$c_n=1+3(n-1)=3n-2$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n} c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$$

$$=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{1}{2}(3n^2-7n+6)$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

よって， $b_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-7n+6)\ (\ n\geqq 1\ )$

(3) $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(3k^2-7k+6)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+\frac{1}{2}(n-1)n(2n-1)-\frac{7}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

よって， $a_n=\dfrac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)\ (\ n\geqq 1\ )$

(2) 数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n と初項から第 n 項までの和 S_n との関係を調べます。$n\geqq 2$ のとき，

$$S_n=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})+a_n$$

$$S_n=S_{n-1}+a_n\quad\therefore\ a_n=S_n-S_{n-1}$$

また， $S_1=a_1$

よって，次のことが成り立ちます。

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき

$a_1=S_1$

$n\geqq 2$ のとき， $a_n=S_n-S_{n-1}$

例5

(1) 数列 $\{a_n\}$ について， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$ であるとき， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$ を求めよ.

(2) 初めの n 項の和 S_n が $S_n=n^2-2n+3$ で与えられる数列 $\{\ a_n\ \}$ ($n=1$，2，……) がある．この数列の一般項 a_n を求めよ.

(3) 初項から第 n 項までの和が 4^n である数列において，第 1 項，第 3 項，第 5 項，…… と順次 1 つおきにとって新たに定められた数列の第 n 項 ($n\geqq 2$) を求めよ.

(解説)

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$ とおく

$$a_1=S_1=1$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=2n-1\ (n\geqq 1)$$

このとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n\\&=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}\\&=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)\end{aligned}$$

(2) $a_1=S_1=1-2+3=2$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}=n^2-2n+3-\{(n-1)^2-2(n-1)+3\}\\&=n^2-2n+3-(n^2-4n+6)=2n-3\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときは満たさないので

$$a_n=\begin{cases}2\ (n=1)\\2n-3\ (n\geqq 2)\end{cases}$$

(3) 最初に与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$a_1=S_1=4$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=4^n-4^{n-1}=3\cdot 4^{n-1}$$

これは $n=1$ のときは満たさない

$a_1, a_3, a_5, \cdots\cdots, a_{2n-1}, \cdots$ を $\{b_n\}$ とすると

$b_1=4$，$n\geqq 2$ のとき，$b_n=a_{2n-1}=3\cdot 4^{2n-2}$

$$\therefore\ b_n=\begin{cases}4\ (n=1)\\3\cdot 4^{2n-2}\ (n\geqq 2)\end{cases}$$

例6

数列 $\{a_n\}$ について，すべての自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

が成り立っている。

(1)　$a_1=$ ア $\boxed{}$，$a_2=$ イ $\boxed{}$ である。

(2)　$a_n=$ ウ $\boxed{}$ である。

(3)　$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$S_n=$ エ $\boxed{}$ である。

解説

(1) $a_1=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

$a_1+2a_2=2\cdot3\cdot4\cdot5$　　$\therefore\ a_2=\dfrac{1}{2}(120-24)=48$

(2) $b_n=na_n$ とおくと，$\sum_{k=1}^{n} ka_k=\sum_{k=1}^{n} b_k$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k=n(n+1)(n+2)(n+3)$ とおくと，

$b_1=S_1=24$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= S_n-S_{n-1} \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)\{(n+3)-(n-1)\}=4n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも満たす

$b_n=na_n$ より

$na_n=4n(n+1)(n+2)$　　$\therefore\ a_n=4(n+1)(n+2)$

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n} 4(k+1)(k+2)=4\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)$

$$=4\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\right\}$$

$$= {}^{エ}\ \frac{4}{3}n(n^2+6n+11)$$

確認問題1

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次の条件を満たしている。

$$a_1=-15,\ a_3=-33,\ a_5=-35$$

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列

$\{b_n\}$ は等差数列

また，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

(1) 一般項 a_n，b_n を求めよ。

(2) S_n を求めよ。

(3) S_n が最小となるときの n を求めよ。

(解説)

(1) 数列 $\{b_n\}$ の初項を b_1，公差を d とすると

$$b_n=b_1+(n-1)d$$

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列より

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k\ (n\geqq 2)$$

$$=-15+\sum_{k=1}^{n-1}\{b_1+(k-1)d\}$$

$$=-15+(n-1)b_1+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)d$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$a_3=-33$，$a_5=-35$ より

$$2b_1+d=-18,\ 2b_1+3d=-10$$

$$\therefore\ b_1=-11, d=4$$

よって，

$$b_n=-11+4(n-1)=4n-15$$

$$a_n=-15-11(n-1)+2(n-2)(n-1)=2n^2-17n$$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-17k)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-17\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-51\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-49)$$

(3) $a_n=n(2n-17)$ より

$1\leqq n\leqq 8$ のとき $a_n<0$，$n\geqq 9$ のとき $a_n>0$ より

S_n が最小となるときの n は $n=8$

確認問題2
3 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は，次の 4 つの条件を満たすとする。

(a)　$x_1=a$，$x_2=b$，$x_3=c$，$x_4=4$，$y_1=c$，$y_2=a$，$y_3=b$

(b)　$\{y_n\}$ は $\{x_n\}$ の階差数列である。

(c)　$\{z_n\}$ は $\{y_n\}$ の階差数列である。

(d)　$\{z_n\}$ は等差数列である。

このとき，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

(a)，(b)より

$$c=b-a,\quad a=c-b,\quad b=4-c \qquad \therefore a=0,\ b=2,\ c=2$$

(c) より，$z_1=a-c=0-2=-2$, $z_2=b-a=2-0=2$

$\{z_n\}$ は等差数列で，初項 $z_1=-2$，公差 $z_2-z_1=2-(-2)=4$ より

$$z_n=-2+(n-1)\cdot 4=4n-6$$

$$y_n=y_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-6)\ (\ n\geqq 2\ )$$

$$=2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-6(n-1)$$

$$=2+2n(n-1)-6(n-1)=2(n-2)^2$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ

よって，$y_n=2(n-2)^2\ (\ n\geqq 1\ )$

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-8k+8)\ (\ n\geqq 2\ )$$

$$=0+2\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+8(n-1)$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)(2n^2-n-12n+24)$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)(2n^2-13n+24)$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ

よって，$x_n=\dfrac{1}{3}(n-1)(2n^2-13n+24)\ (\ n\geqq 1\ )$

確認問題3 初項から第 n 項までの和が，$S_n=-n^3+14n^2-41n$ である数列 $\{a_n\}$ の中で，$a_n>0$ を満たす項の総和を求めよ。

解説

$a_1=S_1=-1^3+14\cdot1^2-41\cdot1=-28$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=-n^3+14n^2-41n-\{-(n-1)^3+14(n-1)^2-41(n-1)\}$$
$$=-3n^2+31n-56$$

$a_n>0$ となるとき

$$-n^2+31n-56>0$$
$$3n^2-31n+56<0$$
$$(n-8)(3n-7)<0 \qquad \therefore\ n=3, 4, 5, 6, 7$$

よって求める和 S は

$$S=S_7-S_2=(7^3-41\cdot7)-(-8+56-82)$$
$$=56+34=90$$

確認問題4

初項から第 n 項 $(n \geqq 1)$ までの和 S_n が n に関する 3 次の整式 $S_n = n^3 + pn^2 + qn + r$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある.

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ が等差数列になるための定数 p, q, r に関する条件を求め,また，そのときの等差数列 $\{b_n\}$ の初項と公差を求めよ.

(解説)

(1) $a_1 = S_1 = 1 + p + q + r$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 + pn^2 + qn + r - (n-1)^3 - p(n-1)^2 - q(n-1) - r \\ &= 3n^2 - 3n + 1 + p(2n-1) + q \\ &= 3n^2 + (2p-3)n - p + q + 1 \end{aligned}$$

(2) $b_1 = a_2 - a_1 = (7 + 3p + q) - (1 + p + q + r) = 2p - r + 6$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 + p(2n+1) + q - 3n^2 + 3n - 1 - p(2n-1) - q \\ &= 6n + 2p \end{aligned}$$

$\{b_n\}$ が等差数列になる条件は

$n \geqq 2$ のときは等差数列なので

$n = 1$ のとき，$6n + 2p = 2p - r + 6$ が成り立てばよいから

$$6 + 2p = 2p - r + 6 \qquad \therefore\ r = 0$$

このとき,

初項 $b_1 = 2p + 6$，公差 6

確認問題5

数列 $\{a_n\}$ は，数列 $\{p^n a_n\}$ の初項 pa_1 から第 n 項 $p^n a_n$ までの和が q^n に等しいものとする。ただし，$p \fallingdotseq 0$ とする。

(1)　a_n を求めよ。

(2)　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ を求めよ。

(解説)

(1) $n=1$ のとき，　$pa_1 = q$　　$\therefore a_1 = \dfrac{q}{p}$

$n \geqq 2$ のとき

$$pa_1 + p^2 a_2 + \cdots\cdots + p^{n-1}a_{n-1} + p^n a_n = q^n \cdots ①$$
$$pa_1 + p^2 a_2 + \cdots\cdots + p^{n-1}a_{n-1} = q^{n-1} \cdots ②$$

①−②より

$$p^n a_n = q^n - q^{n-1} = (q-1)q^{n-1}$$
$$\therefore a_n = \frac{(q-1)q^{n-1}}{p^n} = \frac{q-1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}$$

(2)(i) $\dfrac{q}{p} = 1$ すなわち $p=q$ のとき

$$a_1 = 1,\ a_n = \frac{p-1}{p}\ (n \geqq 2)$$

$S_1 = a_1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 1 + \frac{p-1}{p}(n-1) = \frac{(p-1)n+1}{p}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つから

$$S_n = \frac{(p-1)n+1}{p}\ (\ n \geqq 1\ )$$

(ii) $\dfrac{q}{p} \fallingdotseq 1$ すなわち $p \fallingdotseq q$ のとき

$S_1 = a_1 = \dfrac{q}{p}$

$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = \frac{q}{p} + \sum_{k=2}^{n} \frac{q-1}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} = \frac{q}{p} + \frac{(q-1)q}{p^2} \times \frac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{q}{p}}$$

$$=\frac{q}{p}+\frac{(q-1)q}{p(p-q)}\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{q}{p(p-q)}\left\{p-1-(q-1)\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}$$

これは $n=1$ のときにも成り立つから

$$S_n=\frac{q}{p(p-q)}\left\{p-1-(q-1)\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right\}\ (\,n\geqq 1\,)$$