3.7　漸化式(1)

(1) 漸化式

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について考えます。 $a_1=1$ をもとにして， $a_{n+1}=2a_n+3$ において $n=1, 2, 3, \cdots$ とすると

$a_2=2a_1+3=2\cdot1+3=5$

$a_3=2a_2+3=2\cdot5+3=13$

$a_4=2a_3+3=2\cdot13+3=29$

$\cdots$

となり，順次 $a_2, a_3, a_4, \cdots$ の値がただ 1 通りに定まります。
よって，数列 $\{a_n\}$ は

① 数列の初めの値

② 前の項から次の項をただ 1 通りに定める規則

によって定められます。②を示す関係式を**漸化式**といい，このような方法で数列を定めることを，数列を**帰納的に定義する**(**数列の帰納的定義**)といいます。

(2) 漸化式で定められる数列の一般項

初項と漸化式で定められる数列の一般項の求め方について考えます。

① $a_{n+1}=a_n+d$ 型

$\{a_n\}$ は公差 d の等差数列である。例えば,

$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

のとき， $\{a_n\}$ は初項 $a_1=1$ ，公差 2 の等差数列より，一般項 a_n は

$a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$

② $a_{n+1}=ra_n$ 型

$\{a_n\}$ は公比 r の等比数列である。例えば,

$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$

のとき， $\{a_n\}$ は初項 $a_1=3$ ，公比 2 の等比数列より，一般項 a_n は

$a_n=3\cdot2^{n-1}$

③ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型 (階差型)

漸化式が $a_{n+1}=a_n+f(n)$ の形のとき，階差数列を利用して一般項を求められることがあります。

例1

(1) 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=(n+1)(n+2)\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(3) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=a_n+4^n\quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(4) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n-2n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義される数列の一般項 a_n を求めよ。

解説

(1) 漸化式より，$a_{n+1}-a_n=2n-1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列である

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=1+2\sum_{k=1}^{n-1} k-\sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=n^2-2n+2$$

$n=1$ のときにも成り立つから

$$a_n=n^2-2n+2\ (n \geqq 1)$$

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(k+2)=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+3k+2)$$

$$=2+\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}n\{(n-1)(2n-1)+9(n-1)+12\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+6n+4)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(3) 漸化式より，$a_{n+1}-a_n=4^n$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}4^k$$

$$=3+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}=\frac{1}{3}(4^n+5)$$

$n=1$ のときにも成り立つから

$$a_n=\frac{1}{3}(4^n+5)$$

(4) 漸化式より， $a_{n+1}-a_n=2^n-2n$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと， $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-2k)$$

$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=1+2^n-2-(n^2-n)$$

$$=2^n-n^2+n-1$$

$n=1$ のときにも成り立つから

$$a_n=2^n-n^2+n-1$$

④ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 型 (階比型)

> 例2
>
> (1) $a_1=1$， $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)a_n$ $(n\geqq 1)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。
>
> (2) $a_1=1$， $na_{n+1}=2(n+1)a_n$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ で定められている数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解説)

(1) (解1)

$a_{n+1}=\left(1+\dfrac{2}{n}\right)a_n=\dfrac{n+2}{n}a_n$ より

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}a_{n-2}\ (n\geqq 2)$$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}a_1$$

$a_n=\frac{(n+1)n}{2\cdot 1}\cdot 1$　　$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ($n\geqq 1$) ($n=1, 2, 3$ のときもOK)

(解2)

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n$ より

$\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n}$　　$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{a_n}{(n+1)n}$

$b_n=\frac{a_n}{(n+1)n}$ とおくと，　$b_1=\frac{a_1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2}$

$b_{n+1}=b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\frac{1}{2}$ の定数列より

$$b_n=\frac{1}{2}$$

$b_n=\frac{a_n}{(n+1)n}$ から $a_n=(n+1)nb_n$ より

$$a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) $na_{n+1}=2(n+1)a_n$ から $a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$ より

$$a_n=\frac{2n}{n-1}a_{n-1}=\frac{2n}{n-1}\cdot\frac{2(n-1)}{n-2}a_{n-2}$$

これを繰り返して

$$a_n=\frac{2n}{n-1}\cdot\frac{2(n-1)}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 2}{1}a_1$$
$$=n\cdot 2^{n-1}a_1=n\cdot 2^{n-1}$$

⑤ $a_{n+1}=pa_n+q\,(p\fallingdotseq 0, 1, q\fallingdotseq 0)$ 型

初めの項と漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q\,(p\fallingdotseq 0, 1, q\fallingdotseq 0)$ において定められる数列 $\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもなく，階差数列を利用して一般項を求めるタイプのものでもないので，一般項を求めるのに工夫が必要になります。このタイプのものは，qをうまく分けることにより

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ …①

と変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となるので，これを利用して一般項を求めることができます。
ここで，α の値が必要になりますが，①は

$$a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$$

と変形でき，もとの式と比べて，

$$q=-p\alpha+\alpha \quad \therefore \alpha=p\alpha+q$$

よって，α は $x=px+q$ の解です。
この $x=px+q$ という方程式は，$a_{n+1}=pa_n+q$ の a_{n+1} と a_n を x に置き換えたものです。この方程式を**特性方程式**といい，その解 α を**特性解**といいます。

例3
(1) 初項 $a_1=2$，漸化式 $a_{n+1}=3a_n-2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義される数列の一般項 a_n を求めよ。
(2) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たすとき，この数列の一般項を求めよ。

解説

(1) $a_{n+1}=3a_n-2$ 　$(x=3x-2 \quad \therefore x=1)$

$$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$$

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=1$，公比 3 の等比数列より

$$a_n-1=3^{n-1}$$

$$\therefore a_n=3^{n-1}+1$$

(2) $2a_{n+1}=a_n+2$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1 \quad \left(x=\frac{1}{2}x+1 \quad \therefore x=2\right)$$

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$$

数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=-1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より

$$a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$$

⑥ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ ($p\fallingdotseq 0,1$ ， $f(x)$ は 1 次以上の多項式)型
例えば， $f(x)$ が 1 次式，すなわち $a_{n+1}=pa_n+qn+r$ のとき，
(解1) $a_{n+1}=pa_n+q$ 型と同様に， $qn+r$ をうまく分けて

$$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$$

と変形すると， $\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ は初項 $a_1-(\alpha n+\beta)$ ，公比 p の等比数列となるので，これを利用する。
(解2) 階差法
$n\geqq 2$ において

$$a_{n+1}=pa_n+qn+r \cdots ①$$

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+q(n+1)+r \cdots ②$$

②−①より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+q$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=pb_n+q$$

これは $a_{n+1}=pa_n+q$ 型であるからこれを解いて，
$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であるから，それを利用して一般項 a_n を求める。
$f(x)$ が 2 次以上でも同様にして解けます。

例4
(1) 条件 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n$ ($n=1$，2，3，……) によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n^2+n$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定義されている．数列$\{a_n-f(n)\}$ が公比 2 の等比数列になるように n の 2 次式 $f(n)$ を定め，a_n を n で表せ.

解説
(1) (解1)
$a_{n+1}=2a_n+n$ を
$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$
と変形する。この式は

$$a_{n+1}=2a_n-\alpha n+\alpha-\beta$$

もとの式と比べて

$$-\alpha=1, \alpha-\beta=0 \quad \therefore \alpha=-1, \beta=-1$$

よって，

$$a_{n+1}+\{(n+1)+1\}=2\{a_n+(n+1)\}$$

数列 $\{a_n+n+1\}$ は初項 $a_1+1+1=3$，公比 2 の等比数列より

$$a_n+n+1=3\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$$

(解2) 階差法

$a_{n+1}=2a_n+n$ …①

$a_{n+2}=2a_{n+1}+n+1$ …②

②−①より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_1=a_2-a_1=3-1=2$

$$b_{n+1}=2b_n+1$$

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2+1=3$，公比 2 の等比数列より

$$b_n+1=3\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3\cdot 2^{k-1}-1)=1+3\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=1+\frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)=3\cdot 2^{n-1}-n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$$

(2) $a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$ とおくと

$$a_{n+1}=2a_n+f(n+1)-2f(n)$$

$$f(n+1)-2f(n)=-n^2+n$$

$f(n)=an^2+bn+c$ とおくと

$$f(n+1)-2f(n)=\{a(n+1)^2+b(n+1)+c\}-2(an^2+bn+c)$$

$$=-an^2+(2a-b)n+a+b-c=-n^2+n$$

よって

$$a=1,\ b=1,\ c=2 \qquad \therefore\ f(n)=n^2+n+2$$

数列 $\{a_n-f(n)\}$ は初項 $a_1-4=-1$，公比 2 の等比数列より

$$a_n-f(n)=-2^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=n^2+n+2-2^{n-1}$$

⑦ $a_{n+1}=pa_n+q^n$ ($p, q\fallingdotseq 0, 1$)型

(解1) 両辺 q^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{p^n}+\frac{1}{q}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{q^n}$ とおくと， $b_{n+1}=\dfrac{p}{q}b_n+\dfrac{1}{q}$ となり，

$p=q$ のときは等差型， $p\fallingdotseq q$ のときは⑤型

(解2) 両辺 p^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とおくと， $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{p}\cdot\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ となり，

$p=q$ のときは等差型， $p\fallingdotseq q$ のときは階差型

例5
(1) 次の漸化式で定義される数列の一般項 a_n を求めよ．
$a_1=1$， $a_{n+1}=3a_n+2^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$
(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{1}{2}, 2a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ を満たしているとする．このとき，一般項 a_n を求めよ．

解説

(1) (解1)

$a_{n+1}=3a_n+2^n$

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと， $b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

数列$\{b_n+1\}$は初項 $b_1+1=\dfrac{3}{2}$ ，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列より

$$b_n+1=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \qquad \therefore\ b_n=\frac{3^n}{2^n}-1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ から $a_n=2^n\cdot b_n$ より

$$a_n=3^n-2^n$$

(解2)

$a_{n+1}=3a_n+2^n$

両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと, $b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$b_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ から $a_n=3^n\cdot b_n$ より

$$a_n=3^n-2^n$$

(2) $2a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2^n}$

両辺 2^n をかけて

$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+1$

$b_n=2^na_n$ とおくと, $b_1=2a_1=1$

$$b_{n+1}=b_n+1$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$，公差 1 の等差数列より

$b_n=n$

$b_n=2^n a_n$ から $a_n=\dfrac{b_n}{2^n}$ より

$a_n=\dfrac{n}{2^n}$

⑧ $a_{n+1}=pa_n{}^q$ 型

両辺対数をとる。

例6

(1) 数列 $\{a_n\}$ が条件 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n{}^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。このとき，a_n を n を用いて表せ。

(2) n を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{25}{a_n{}^2}$ を満たす。このとき，一般項を n の式で表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ が $b_1=1$ と漸化式 $b_{n+1}=5\sqrt{b_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義されているとき，一般項 b_n を n の式で表せ.

解説

(1) $a_1=1$，漸化式より，すべての自然数 n に対して $a_n>0$

$a_{n+1}=2a_n{}^2$

両辺 2 を底とする対数をとって

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2a_n{}^2$

$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+1$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと，$b_1=\log_2 a_1=\log_2 1=0$

$b_{n+1}=2b_n+1$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列より

$b_n+1=2^{n-1}$　　$\therefore\ b_n=2^{n-1}-1$

$b_n=\log_2 a_n$ から $a_n=2^{b_n}$ より

$a_n=2^{2^{n-1}-1}$

(2) $a_1>0$，漸化式より，すべての自然数 n に対して $a_n>0$

$a_{n+1}=\dfrac{25}{a_n{}^2}$

両辺 5 を底とする対数をとって

$\log_5 a_{n+1}=\log_5\dfrac{25}{a_n{}^2}=2-2\log_5 a_n$

$b_n=\log_5 a_n$ とおくと，$b_1=\log_5 a_1=\log_5 5=1$

$$b_{n+1}=2-2b_n$$

$$b_{n+1}-\frac{2}{3}=-2\left(b_n-\frac{2}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $b_1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，公比 -2 の等比数列より

$$b_n-\frac{2}{3}=\frac{(-2)^{n-1}}{3}\qquad\therefore\ b_n=\frac{(-2)^{n-1}+2}{3}$$

$b_n=\log_5 a_n$ から $a_n=5^{b_n}$ より

$$a_n=5^{\frac{(-2)^{n-1}+2}{3}}$$

(3) $b_1=1>0$，漸化式より，すべての自然数 n に対して $b_n>0$

$b_{n+1}=5\sqrt{b_n}$

両辺 5 を底とする対数をとって

$$\log_5 b_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_5 b_n$$

$c_n=\log_5 b_n$ とおくと，$c_1=\log_5 b_1=\log_5 1=0$

$$c_{n+1}=1+\frac{1}{2}c_n$$

$$c_{n+1}-2=\frac{1}{2}(c_n-2)$$

数列 $\{c_n-2\}$ は初項 $c_1-2=0-2=-2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$$c_n-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\therefore\ c_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$c_n=\log_5 b_n$ から $b_n=5^{c_n}$ より

$$b_n=5^{c_n}=5^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$

⑨ $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型

逆数をとる。

例7

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}+1$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ で定義されているとき，一般項は $a_n=\boxed{}$ である。

(2) 次の条件により定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=\frac{1}{3}，\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2-a_n}\ (n=1，2，3，\cdots\cdots)$$

解説

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

$b_{n+1}=2b_n+1$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=1+1=2$，公比 2 の等比数列より

$b_n+1=2\cdot2^{n-1}$ $\quad\therefore b_n=2^n-1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ から $a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より

$a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$

(2) $n\geqq2$ となる n に対し，$a_n=0$ と仮定すると，漸化式より $a_{n-1}=0$ となり，これを繰り返し行うと，$a_1=0$ となるので矛盾

よって，すべての自然数 a_n に対して $a_n\fallingdotseq0$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-a_n}$

両辺逆数をとって

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2-a_n}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2}{a_n}-1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=3$

$b_{n+1}=2b_n-1$

$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=3-1=2$，公比 2 の等比数列より

$b_n-1=2\cdot 2^{n-1}\qquad \therefore\ b_n=2^n+1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ から $a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より

$$a_n=\frac{1}{2^n+1}$$

例8

$a_1=1$，$2a_na_{n+1}+3a_{n+1}-a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n>0$ であることを数学的帰納法で証明せよ．

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ．

解説

(1) (ｉ) $n=1$ のとき

$a_1=1>0$　よって，$n=1$ のとき成り立つ．

(ii) $n=k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_k>0$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$2a_ka_{k+1}+3a_{k+1}-a_k=0$ より

$(2a_k+3)a_{k+1}=a_k$

$2a_k+3>0$ より

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{2a_k+3}>0$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(ｉ), (ii)から，数学的帰納法より

すべての自然数 n について $a_n>0$ が成り立つ

(2) $2a_n a_{n+1}+3a_{n+1}-a_n=0$
両辺 $a_n a_{n+1}$ で割って

$$2+\frac{3}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=0 \qquad \therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$

$$b_{n+1}=3b_n+2$$

$$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=1+1=2$，公比 3 の等比数列より

$$b_n+1=2\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$$

($b_n=\dfrac{1}{a_n}$ であるから，$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より

$$a_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}$$)

別解

$2a_n a_{n+1}+3a_{n+1}-a_n=0$ より

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$$

と変形して例7 のように解いてもよい。

(3) (2)より

$$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot 3^{k-1}-1)$$

$$=\frac{2(3^n-1)}{3-1}-n=3^n-n-1$$

確認問題1

次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は　$a_1=1$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ $(n\geqq 2)$　を満たしている。

　$\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ は　$b_1=1$，$b_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}b_{n-1}$ $(n\geqq 2)$　を満たしている。

　$\{b_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。

(3)　数列 $\{c_n\}$ は　$c_1=1$，$c_n=\dfrac{n^3-1}{n^3+1}c_{n-1}$ $(n\geqq 2)$　を満たしている。

　$\{c_n\}$ の一般項を n を用いて表せ。

(4)　上の (3) の数列 $\{c_n\}$ に対し，$S_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ を n を用いて表せ。

解説

(1) 条件より

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2}=\cdots\ (\ n\geqq 2\ )$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}a_1$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\ (\ n\geqq 4\ )$$

これは $n=1, 2, 3$ のときも成り立つ

別解

$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ の両辺に $n(n+1)$ をかけて

$$n(n+1)a_n=(n-1)na_{n-1}$$

よって

$$n(n+1)a_n=(n-1)na_{n-1}=\cdots=1\cdot 2a_1=2$$

$$\therefore\ a_n=\frac{2}{n(n+1)}$$

(2) 条件より

$$b_n=\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}b_{n-1}=\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}\cdot\frac{n(n-1)+1}{(n-1)(n-2)+1}b_{n-2}\ (\ n\geqq 2\ )$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n-1)+1}\cdot\frac{n(n-1)+1}{(n-1)(n-2)+1}\cdot\cdots\cdot\frac{13}{7}\cdot\frac{7}{3}b_1$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{3}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

別解

$b_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}b_{n-1}$ より

$$\frac{b_n}{n^2+n+1}=\frac{b_{n-1}}{n^2-n+1}$$

$$\therefore \frac{b_n}{n(n+1)+1}=\frac{b_{n-1}}{(n-1)n+1}$$

よって

$$\frac{b_n}{n(n+1)+1}=\frac{b_{n-1}}{(n-1)n+1}=\cdots\cdots=\frac{b_1}{1\cdot 2+1}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore b_n=\frac{n(n+1)+1}{3}$$

(3) (1), (2)より

$$a_nb_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}\ a_{n-1}b_{n-1}\ (n\geqq 2)$$

$d_n=a_nb_n$ とおくと，　$d_1=a_1b_1=1$

$$d_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}d_{n-1}$$

となるから，　$c_n=d_n$ より

$$c_n=a_nb_n=\frac{2\{n(n+1)+1\}}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left\{1+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

(4) $c_n=\dfrac{2}{3}\left\{1+\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

よって

$$S_n=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{n+\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{2n(n+2)}{3(n+1)}$$

確認問題2

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+1$　($n=1$，2，3，……)

(2)　$b_1=2$，$b_{n+1}=2b_n+n$　($n=1$，2，3，……)

(3)　$c_1=2$，$c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$　($n=1$，2，3，……)

解説

(1) $a_{n+1}=2a_n+1$ を変形すると ($x=2x+1$　$\therefore\ x=-1$)

$$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$$

数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=4$，公比 2 の等比数列より

$$a_n+1=4\cdot 2^{n-1}\qquad \therefore\ a_n=2^{n+1}-1$$

(2) $b_{n+1}=2b_n+n$ …①

$b_{n+2}=2b_{n+1}+n+1$ …②

②−①より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+1$$

$b_{n+1}-b_n=d_n$ とすると，$d_1=b_2-b_1=5-2=3$

$$d_{n+1}=2d_n+1,$$

(1)より

$$d_n=b_{n+1}-b_n=2^{n+1}-1$$

よって

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-1)\ (\ n\geqq 2\ )$$

$$=2+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

$$=2^{n+1}-n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$b_n=2^{n+1}-n-1\ (\ n\geqq 1\ )$$

(3) $c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$ …③

$c_{n+2}=2c_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)n$ …④

④−③より

$$c_{n+2}-c_{n+1}=2(c_{n+1}-c_n)+n$$

$c_{n+1}-c_n=e_n$ とすると，$e_1=c_2-c_1=4-2=2$

$e_{n+1}=2e_n+n$,

(2)より

$e_n=c_{n+1}-c_n=2^{n+1}-n-1$

よって

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-k-1)\ (\,n\geqq 2\,)$$

$$=2+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)$$

$$=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つから

$$c_n=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1\ (\,n\geqq 1\,)$$

確認問題3

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}$ （$n=1$，2，3，……）によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{}$ である。

（解説）

$\dfrac{n+2}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$ とおくと

両辺 $n(n+1)$ をかけて

$$n+2=a(n+1)+bn$$

$$n+2=(a+b)n+a$$

これが任意の n で成り立つとき

$$a+b=1, a=2 \quad \therefore a=2, b=-1$$

よって，$\dfrac{n+2}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ より

$$a_{n+1}=2a_n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$a_{n+1}+\frac{1}{n+1}=2\left(a_n+\frac{1}{n}\right)$$

数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{n}\right\}$ は，初項 $a_1+\dfrac{1}{1}=1+1=2$，公比 2 の等比数列より

$$a_n+\frac{1}{n}=2\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n=2^n-\frac{1}{n}$$

確認問題4

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$ であり，漸化式

$$a_{n+1}=\frac{2}{n+1}a_n+\frac{1}{(n+1)!} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　$b_n=\dfrac{n!}{2^n}a_n$ とおき，b_{n+1} を b_n で表せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説

(1) $a_2=\dfrac{2}{2}a_1+\dfrac{1}{2!}=\dfrac{2}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{2!}=\dfrac{3}{2}$

$a_3=\dfrac{2}{3}a_2+\dfrac{1}{3!}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3!}=\dfrac{7}{6}$

$a_4=\dfrac{2}{4}a_3+\dfrac{1}{4!}=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{4!}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$

(2) $b_n=\dfrac{n!}{2^n}a_n$ とおくと，　$b_1=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}$

$$b_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\left\{\frac{2}{n+1}a_n+\frac{1}{(n+1)!}\right\}$$

$$=\frac{n!}{2^n}a_n+\frac{1}{2^{n+1}}=b_n+\frac{1}{2^{n+1}}$$

(3) (2) より

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2^{n+1}}$$

よって

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\ (\ n\geqq 2\ )$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\dfrac{1}{2^2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

よって，　$a_n=\dfrac{2^n}{n!}b_n=\dfrac{2^n-1}{n!}$

確認問題5

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=2^{2n-2}(a_n)^2$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ により定める．

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とする．b_{n+1} を b_n で表せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　$a_n>2001$ となる最小の整数 n を求めよ．ただし，$2^{10}=1024$ である．

(解説)

(1) $a_1=1$，漸化式よりすべての自然数 n に対して，$a_n>0$

$a_{n+1}=2^{2n-2}(a_n)^2$

両辺底 2 の対数をとって

$$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+2n-2$$

$b_n=\log_2 a_n$ とすると，$b_1=\log_2 a_1=0$

$$b_{n+1}=2b_n+2n-2$$

(2) $b_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{b_n-(\alpha n+\beta)\}$ とおくと

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha n+\alpha-\beta$$

これが任意の n で成り立つとき，$\alpha=-2, \beta=0$

よって

$$b_{n+1}+2(n+1)=2(b_n+2n)$$

数列 $\{b_n+2n\}$ は，初項 $b_1+2\cdot 1=2$，公比 2 の等比数列より

$$b_n+2n=2\cdot 2^{n-1}=2^n \qquad \therefore\ b_n=2^n-2n$$

(3) (2)より

$$a_n=2^{2^n-2n}$$

$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$ より

$2^n-2n\geqq 11$ を満たす最小の整数 n を求めればよい

$f(n)=2^n-2n$ とおくと

$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(3)=2$，$f(4)=8$，$f(5)=22$

よって，$n=5$

発展 規則が変わる漸化式

ここでは，n の値によって規則が変わる漸化式について考えます。まずは，隣接しない２項間の漸化式の解き方を理解しておかなければならないので，そこから考えます。

> **例1**
> $a_1=2$，$a_2=4$，$2a_{n+2}=a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解説

$2a_{n+2}=a_n+3$

$a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} \quad \therefore\ x=3 \right)$

$a_{n+2}-3=\dfrac{1}{2}(a_n-3)$

(ⅰ) $n=2m-1$ (m は自然数) のとき

$a_{2m+1}-3=\dfrac{1}{2}(a_{2m-1}-3)$

数列 $\{a_{2m-1}-3\}$ は初項 $a_1-3=-1$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$a_{2m-1}-3=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}$

$\therefore\ a_{2m-1}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}+3 \quad \therefore\ a_n=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}+3$

(ⅱ) $n=2m$ (m は自然数) のとき

$a_{2m+2}-3=\dfrac{1}{2}(a_{2m}-3)$

数列 $\{a_{2m}-3\}$ は初項が $a_2-3=1$，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列より

$a_{2m}-3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}$

$\therefore\ a_{2m}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m-1}+3 \quad \therefore\ a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}+3$

例2

$a_1=1,\ a_{2n}=2a_{2n-1},\ a_{2n+1}=a_{2n}+2^{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1) 第 $2n$ 項 a_{2n} と第 $(2n+1)$ 項 a_{2n+1} を求めよ.

(2) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$ を求めよ.

(解説)

(1) $a_{2(n+1)}=2a_{2n+1}$

$=2a_{2n}+2^n$ (まず，1周期の漸化式をつくる)

両辺 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{2(n+1)}}{2^{n+1}}=\frac{a_{2n}}{2^n}+\frac{1}{2}$$

$b_n=\dfrac{a_{2n}}{2^n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_2}{2}=1$

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}$$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列より

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$$

$b_n=\dfrac{a_{2n}}{2^n}$ から $a_{2n}=2^n\cdot b_n$ より

$$a_{2n}=2^{n-1}(n+1),\quad a_{2n+1}=2^{n-1}(n+1)+2^{n-1}=2^{n-1}(n+2)$$

(2) $\sum_{k=1}^{2n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)2^{k-2}+(k+1)2^{k-1}\}=3\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-2}$

$S=\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-2}$ とすると

$$S=1+3\cdot1+4\cdot2+\cdots\cdots+(n+1)2^{n-2}$$
$$2S=2\cdot1+3\cdot2+\cdots\cdots+n\cdot2^{n-2}+(n+1)2^{n-1}$$
$$S-2S=1+1+2+\cdots\cdots+2^{n-2}-(n+1)2^{n-1}$$
$$=1+2^{n-1}-1-(n+1)2^{n-1}=-n\cdot2^{n-1}\qquad\therefore S=n\cdot2^{n-1}$$

よって，$\sum_{k=1}^{2n} a_k=3n\cdot2^{n-1}$

例3

数列 $\{a_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し

$n=3m$ 　　のとき　$a_{n+1}=a_n+1$

$n=3m+1$ のとき　$a_{n+1}=2a_n$

$n=3m+2$ のとき　$a_{n+1}=a_n-1$

を満たす。$a_0=0$，$a_1=1$ として，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 をそれぞれ求めよ。

(2)　a_{3m+4} を a_{3m+1} を用いて表せ。

(3)　a_{3m+1} を m を用いて表せ。

(4)　a_{3m+2} と a_{3m+3} を m を用いてそれぞれ表せ。

(5)　$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ とする。$n=3m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のとき S_n を m を用いて表せ。

解説

(1) 漸化式より

$a_2=2a_1=2\cdot1=2$，$a_3=a_2-1=2-1=1$，$a_4=a_3+1=1+1=2$，

$a_5=2a_4=2\cdot2=4$，$a_6=a_5-1=4-1=3$

(2) $a_{3m+4}=a_{3m+3}+1=(a_{3m+2}-1)+1=a_{3m+2}=2a_{3m+1}$

(3) $\{a_{3m+1}\}$ は，初項 $a_1=1$ ，公比 2 の等比数列より

$a_{3m+1}=1\cdot2^m=2^m$

(4) $a_{3m+2}=2a_{3m+1}=2\cdot2^m=2^{m+1}$

$a_{3m+3}=a_{3m+2}-1=2^{m+1}-1$

(5) $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(a_{3k+1}+a_{3k+2}+a_{3k+3})$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(2^k+2^{k+1}+2^{k+1}-1)=\sum_{k=0}^{m-1}(5\cdot2^k-1)$

$=\dfrac{5\cdot(2^m-1)}{2-1}-m$

$=5\cdot2^m-m-5$