3.10　数学的帰納法

(1) **数学的帰納法 (1 段階)**

　数列 $\{a_n\}$ において，初項 a_1 と， a_k から a_{k+1} を求める規則とが与えられると，すべての自然数 n について， a_n を定めることができた。これと同じような考え方で，自然数 n についての命題 $P(n)$ がすべての自然数 n について成り立つことを証明する方法があります。
まず， $P(1)$ ($n=1$ のとき)が成り立つことを示し ($P(1)$ は $P(n)$ の n のスタートの値でもよい)…①， $P(k)$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)が成り立つと仮定して， $P(k+1)$ が成り立つ…②ことが示せれば
　①より $P(1)$ が成り立つから,
　②より $P(1)$ が成り立つから， $P(2)$ も成り立つ。
　②より $P(2)$ が成り立つから， $P(3)$ も成り立つ。
　…
というように，すべての自然数 n について $P(n)$ が成り立つことが証明されます。このような証明法を**数学的帰納法**といいます

数学的帰納法 (1 段階)
自然数 n に関する命題 $P(n)$ がすべての自然数 n で成り立つことを証明するためには,
(i) $P(1)$ が成り立つ
(ii) $P(k)$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) が成り立つと仮定すると， $P(k+1)$ が成り立つ
の 2 つのことを示せばよい。

例1
n が自然数のとき，次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

(解説)
(i) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 \qquad (\text{右辺}) = \frac{1}{4} \cdot 1^2 (1+1)^2 = 1$$

よって成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)のとき成り立つと仮定して

$$\sum_{i=1}^{k} i^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2 \text{(仮定)}$$

$n=k+1$ のとき成り立つこと示す。

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3=\sum_{i=1}^{k} i^3+(k+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\frac{1}{4}(k+1)^2\{(k+1)+1\}^2$$

$n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法より

すべての自然数 n で与えられた等式は成り立つ

例2

(1) すべての自然数 n について，n^3+5n は 6 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ.

(2) すべての自然数 n について，3^n-2n+3 は 4 の倍数である。このことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(3) n が自然数のとき $2^{2n+1}+3(-1)^n$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ.

(解説)

(1) (i) $n=1$ のとき

$1^3+5\times1=6$ より成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)のとき成り立つと仮定して

$k^3+5k=6l$ (l は自然数)

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$$
$$=k^3+5k+3k(k+1)+6$$
$$=6l+3k(k+1)+6$$

$k(k+1)$ は連続 2 整数の積であるから 2 の倍数より

$n=k+1$ のときも成り立つ

(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より
すべての自然数 n で与えられた命題は成り立つ
(2)(ⅰ) $n=1$ のとき
$3^1-2\cdot1+3=4$ より成り立つ
(ⅱ) $n=k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して
$3^k-2k+3=4m$ (m は整数)
$n=k+1$ のとき成り立つことを示す
$$3^{k+1}-2(k+1)+3=3(3^k-2k+3)+4k-8$$
$$=3\cdot4m+4(k-2)=4(3m+k-2)$$
$n=k+1$ のときも成り立つ
(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より
すべての自然数 n で与えられた命題は成り立つ
(3)(ⅰ) $n=1$ のとき
$2^3-3=5$ より成り立つ
(ⅱ) $n=k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して
$2^{2k+1}+3(-1)^k=5m$ (m は整数)
$n=k+1$ のとき成り立つことを示す
$$2^{2(k+1)+1}+3(-1)^{k+1}=4\cdot2^{2k+1}-3(-1)^k$$
$$=4(2^{2k+1}+3(-1)^k)-15(-1)^k$$
$$=4\cdot5m-15(-1)^k=5\{4m-3(-1)^k\}$$
$n=k+1$ のときも成り立つ
(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より
すべての自然数 n で与えられた命題は成り立つ

例3
n を 2 以上の自然数とするとき，n^7-n が 7 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

解説

(ⅰ) $n=2$ のとき
$n^7-n=2^7-2=126=7\cdot18$ より $n=2$ のとき成り立つ
(ⅱ) $n=k\ (k\geqq2)$ のとき成り立つと仮定して
$k^7-k=7m$ (m は正の整数)
$n=k+1$ のとき成り立つことを示す
$$(k+1)^7-(k+1)=k^7+{}_7C_1k^6+{}_7C_2k^5+{}_7C_3k^4+{}_7C_4k^3+{}_7C_5k^2+{}_7C_6k+1-(k+1)$$

$=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k-k$

$=(k^7-k)+7N$ (Nは整数)

$=7(m+N)$

$n=k+1$ のときも成り立つ

(ⅰ), (ⅱ) から数学的帰納法より

$n \geqq 2$ である自然数 n で与えられた命題は成り立つ

注 7 は素数であるから，${}_7\mathrm{C}_k$ $(k=1, 2, \cdots, 6)$ は 7 の倍数です。

参考 本問の証明した事実をフェルマーの小定理といいます。

例4

(1)　n を正の整数とする。不等式 $2^n \geqq n^2+n$ はどのような n に対して成立し，どのような n に対しては成立しないかを推測せよ。

(2)　(1) で推測したことを数学的帰納法によって証明せよ。

解説

(1) 正の整数 n の最初のいくつかについて，2^n と n^2+n の値を調べると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256
n^2+n	2	6	12	20	30	42	56	72

不等式 $2^n \geqq n^2+n$ は $n=1$ および $n \geqq 5$ に対して成立し，$n=2, 3, 4$ に対しては成立しないと推測できる

(2) $n=1, 2, 3, 4$ のときは (1) の通り

$n \geqq 5$ のとき，$2^n \geqq n^2+n$ が成り立つことを示す

(ⅰ) $n=5$ のとき

　左辺$=2^5=32$，右辺$=5^2+5=30$ より成り立つ

(ⅱ) $n=k$ $(k \geqq 5)$ のとき成り立つと仮定して

　$2^k \geqq k^2+k$ …①

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$2^{k+1}-\{(k+1)^2+(k+1)\}=2\cdot 2^k-(k^2+3k+2)$$

$$\geqq 2(k^2+k)-(k^2+3k+2)$$

$$=k^2-k-2=(k+1)(k-2)>0$$

$\therefore 2^{k+1} \geqq (k+1)^2+(k+1)$

$n=k+1$ のときも成り立つ

(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より
$n \geqq 5$ である自然数 n で与えられた不等式は成り立つ
以上より，(1)で推定したことは示された

例5
次を証明せよ．
(1)　$h>0$ で n が 2 以上の自然数のとき $(1+h)^n>1+nh$ である．
(2)　n が 2 以上の自然数のとき $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$ である．
(3)　n が 6 以上の自然数のとき $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n>n!$ である．

解説
(1)(ⅰ) $n=2$ のとき
$(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$ より成り立つ
(ⅱ) $n=k\ (k=2, 3, 4, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して
$(1+h)^k>1+kh$
$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)^k(1+h)\\&>(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h\end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ
(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より
$n \geqq 2$ である自然数 n で与えられた不等式は成り立つ
別解
二項定理より
$(1+h)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+{}_n\mathrm{C}_3h^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$
${}_n\mathrm{C}_kh^k>0\ \ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$ より
$(1+h)^n>1+{}_n\mathrm{C}_1h=1+nh$
(2)(1)で示した不等式において $h=\dfrac{1}{n}\ \ (>0)$ とおくと

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+n\times\frac{1}{n}=2$$

(3) (i) $n=6$ のとき

左辺$=\left(\dfrac{6}{2}\right)^6=729$，右辺$=6!=720$ より成り立つ.

(ii) $n=k\ (k=6, 7, 8, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k>k!$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}-(k+1)\cdot k! &> \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}-(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}\right)^k \\ &=\frac{k+1}{2}\left\{\left(\frac{k+1}{2}\right)^k-2\left(\frac{k}{2}\right)^k\right\} \\ &=\frac{k+1}{2}\left(\frac{k}{2}\right)^k\left\{\left(\frac{2}{k}\right)^k\left(\frac{k+1}{2}\right)^k-2\right\} \\ &=\frac{k+1}{2}\left(\frac{k}{2}\right)^k\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-2\right\}\end{aligned}$$

(2) から $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k>2$ より

$$>0$$

$$\therefore \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}>(k+1)!$$

$n=k+1$ のときにも成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法より

$n\geqq 6$ である自然数 n で与えられた不等式は成り立つ

例6

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ.

(1)　不等式 $n!\geqq 2^{n-1}$ を示せ.

(2)　不等式 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ \cdots\cdots\ +\dfrac{1}{n!}<2$ を示せ.

解説

(1) (i) $n=1$ のとき

(左辺)$=1!=1$，(右辺)$=2^{1-1}=2^0=1$ より成り立つ

(ii) $n=k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$$k!\geqq 2^{k-1}$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$(k+1)!=(k+1)\cdot k!\geqq(k+1)\cdot 2^{k-1}\geqq 2\cdot 2^{k-1}=2^{k+1-1}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ

(ｉ),(ii) から数学的帰納法より

すべての自然数 n で与えられた不等式は成り立つ

(2) (1)より

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$$

よって示された

例7

(1) $a_1=\dfrac{1}{3},\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ．

(2) $a_1=\dfrac{3}{2}$，$a_{n+1}+2a_{n+1}a_n-3a_n=0$ $(n\geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 の値を求めよ。また，一般項 a_n を推測し，その推測の結果が正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

解説

(1) $a_1=\dfrac{1}{3},\ a_2=\dfrac{1}{2-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{5},\ a_3=\dfrac{1}{2-\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{7},\ a_4=\dfrac{1}{2-\frac{5}{7}}=\dfrac{7}{9},\cdots$ より

$$a_n=\frac{2n-1}{2n+1}$$

と推定できる

(ｉ) $n=1$ のとき

$$a_1=\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$$ より成り立つ

(ii) $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき成り立つ仮定して

$$a_k=\frac{2k-1}{2k+1}$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\dfrac{2k-1}{2k+1}}=\frac{2k+1}{2k+3}=\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)+1}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ

(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より

すべての自然数 n で推定したことは成り立つ

(2) $a_2+2a_2a_1-3a_1=0$ より

$$a_2+3a_2-\frac{9}{2}=0 \quad \therefore a_2=\frac{9}{8}$$

$a_3+2a_3a_2-3a_2=0$ より

$$a_3+\frac{9}{4}a_3-\frac{27}{8}=0 \quad \therefore a_3=\frac{27}{26}$$

$a_4+2a_4a_3-3a_3=0$ より

$$a_4+\frac{27}{13}a_4-\frac{81}{26}=0 \quad \therefore a_4=\frac{81}{80}$$

$a_5+2a_5a_4-3a_4=0$ より

$$a_5+\frac{81}{40}a_5-\frac{243}{80}=0 \quad \therefore a_5=\frac{243}{242}$$

よって，$a_n=\dfrac{3^n}{3^n-1}$ と推測される

(ⅰ) $n=1$ のとき

$a_1=\dfrac{3^1}{3^1-1}=\dfrac{3}{2}$ より成り立つ

(ⅱ) $n=k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$$a_k=\frac{3^k}{3^k-1}$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{k+1}+2a_{k+1}a_k-3a_k=0$ より

$$a_{k+1}+2a_{k+1}\cdot\frac{3^k}{3^k-1}-3\cdot\frac{3^k}{3^k-1}=0$$

$$(3^k-1)a_{k+1}+2\cdot3^k a_{k+1}-3^{k+1}=0$$

$$(3^{k+1}-1)a_{k+1}=3^{k+1}$$

$$\therefore a_{k+1}=\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-1}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法より
すべての自然数 n で推測したことは成り立つ

(2) 数学的帰納法 (2 段階)

数学的帰納法には様々なバリエーションがあります。隣接 3 項間漸化式においては，数列 $\{a_n\}$ において， a_1 , a_2 と a_k と a_{k+1} から a_{k+2} を求める規則とが与えられると，すべての自然数 n について， a_n を定めることができた。このとき，前の 2 つが定まると次の 1 つが定まることに注意して，これと同じような考え方で，次のことが成り立ちます。

数学的帰納法 (2 段階)
自然数 n に関する命題 $P(n)$ がすべての自然数 n で成り立つことを証明するためには,
(i) $P(1)$, $P(2)$ が成り立つ
(ii) $P(k)$, $P(k+1)$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) が成り立つと仮定すると， $P(k+2)$ が成り立つ
の 2 つのことを示せばよい。

例8
実数 x, y について， $x+y$, xy がともに偶数とする.
(1)　自然数 n に対して x^n+y^n は偶数となることを示せ.
(2)　整数以外の実数の組 (x, y) の例を示せ.

解説
(1) (i) $n=1, 2$ のとき
　$x+y$ は偶数より成り立つ
　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ は偶数より成り立つ
(ii) $n=k, k+1$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき成り立つと仮定して
　x^k+y^k , $x^{k+1}+y^{k+1}$ は偶数
$n=k+2$ のとき成り立つことを示す
　$x^{k+2}+y^{k+2}=(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy(x^k+y^k)$ は偶数
$n=k+2$ のときも成り立つ
(i), (ii) から数学的帰納法より
すべての自然数 n で与えられた命題は成り立つ

(2) x, y を 2 次方程式 $t^2-4t+2=0$ の解とすると，
解と係数の関係より

$x+y=4,\ xy=2$

$t^2-4t+2=0$ を解いて　$t=2\pm\sqrt{2}$
よって，(x, y) の組の 1 つは，$(x, y)=(2+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$

例9 x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める． $\begin{cases} f_0(x)=1,\ \ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n\geqq 2) \end{cases}$ このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta\fallingdotseq 0$ とする．

解説

(i) $n=0, 1$ のとき

$(\text{左辺})=f_0(2\cos\theta)=1$　$(\text{右辺})=\dfrac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta}=1$ より成り立つ

$(\text{左辺})=f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta$　$(\text{右辺})=\dfrac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$

$=2\cos\theta$ より成り立つ

(ii) $n=k, k+1$ $(k\geqq 0)$ のとき成り立つと仮定して

$$f_k(2\cos\theta)=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta},\ f_{k+1}(2\cos\theta)=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$$

$n=k+2$ のとき成り立つことを示す

$$f_{k+2}(2\cos\theta)=2\cos\theta\, f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)$$

$$=2\cos\theta\cdot\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=2\cos\theta\cdot\frac{\sin(k+1)\theta\cos\theta+\cos(k+1)\theta\sin\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{(2\cos^2\theta-1)\sin(k+1)\theta+2\sin\theta\cos\theta\cos(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos 2\theta\sin(k+1)\theta+\sin 2\theta\cos(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(k+3)\theta}{\sin\theta}$$

$n=k+2$ のときも成り立つ
(ⅰ),(ⅱ) から数学的帰納法より
すべての自然数 n で与えられた等式は成り立つ

(3) 数学的帰納法 (全段階)

　次のように，前のすべての n で成り立つことを仮定する数学的帰納法もあります。

数学的帰納法 (全段階)
自然数 n に関する命題 $P(n)$ がすべての自然数 n で成り立つことを証明するためには,
(ⅰ) $P(1)$ が成り立つ
(ⅱ) $P(1), P(2), \cdots, P(k)$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) が成り立つと仮定すると,
$P(k+1)$ が成り立つ
の 2 つのことを示せばよい。

例10
次の条件で定められた数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{3}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を求めて，一般項 a_n を n の式で表せ.
(2)　(1) で求めた一般項 a_n が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ.

(解説)
(1) $a_2=3a_1=3$

$$a_3=\frac{3}{2}(a_1+a_2)=\frac{3}{2}(1+3)=6$$

$$a_4=\frac{3}{3}(a_1+a_2+a_3)=1+3+6=10$$

$$a_5=\frac{3}{4}(a_1+\cdots\cdots+a_4)=\frac{3}{4}(1+3+6+10)=15$$

$$a_6=\frac{3}{5}(a_1+\cdots\cdots+a_5)=\frac{3}{5}(1+3+6+10+15)=21$$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると
　$b_n=3+(n-1)\cdot1=n-2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

よって，$a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ と推定できる

(2) (ⅰ) $n=1$ のとき

$$a_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \text{ より成り立つ}$$

(ⅱ) $n \leqq k$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定する

$$a_k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (k=1, 2, 3, \cdots)$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$a_{k+1} = \frac{3}{k}(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k) = \frac{3}{k}\sum_{m=1}^{k}\frac{m(m+1)}{2}$$

$$= \frac{3}{k} \cdot \frac{1}{2}\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2}\right\} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$n=k+1$ のときも成り立つ．

(ⅰ), (ⅱ) から数学的帰納法より

すべての自然数 n で推定したことは成り立つ

(4) **数学的帰納法 (後退的)**

　次のように，隣接する自然数 n で示すのが難しいとき，とびとびの n で示して，そこから後退してとんだ間を証明してすべての n で成り立つことを示す数学的帰納法もあります。

例11

自然数 n に対して，$a_1 > 0$，$a_2 > 0$，……，$a_n > 0$ とする。次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}\right)^n \geqq a_1 a_2 \cdots\cdots a_n$$

解説

(Ⅰ) $n=2^m$ のとき成り立つことを示す

(ⅰ) $m=1$ のとき

$$\text{左辺}-\text{右辺}=\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-a_1a_2=\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2\geqq 0 \text{ より成り立つ}$$

(ⅱ) $m=k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$2^k=p$ とすると

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_p}{p}\right)^p\geqq a_1a_2\cdots a_p$$

$m=k+1$ のとき成り立つことを示す

$2^{k+1}=2p$ より

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{2p}}{2p}\right)^{2p}&=\left(\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_p}{2p}+\frac{a_{p+1}+a_{p+2}+\ \cdots\ +a_{2p}}{2p}\right)^{2p}\\&\geqq\left\{\frac{1}{2}(a_1a_2\cdots a_p)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2}(a_{p+1}a_{p+2}\cdots a_{2p})^{\frac{1}{p}}\right\}^{2p}\\&\geqq\left\{(a_1a_2\cdots a_p)^{\frac{1}{p}}(a_{p+1}a_{p+2}\cdots a_{2p})^{\frac{1}{p}}\right\}^p\\&=a_1a_2\cdots a_pa_{p+1}a_{p+2}\cdots a_{2p}\end{aligned}$$

$m=k+1$ のときも成り立つ

(ⅰ), (ⅱ) から数学的帰納法より

すべての自然数 m で与えられた不等式は成り立つ

$n=2^m$ のとき成り立つことが示された

(Ⅱ) $n=l\ (l=2, 3, 4,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ \cdots\ +a_l}{l}\right)^l\geqq a_1a_2\cdots a_l$$

$n=l-1$ のとき成り立つことを示す

$a_l=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{l-1}}{l-1}$ とおくと

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{l-1}}{l-1}\right)^l\geqq a_1a_2\cdots a_{l-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{l-1}$$

$$\therefore\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{l-1}}{l-1}\right)^{l-1}\geqq a_1a_2\cdots a_{l-1}$$

$n=l-1$ のときも成り立つ

(Ⅰ), (Ⅱ)から数学的帰納法より

すべての自然数 n で与えられた不等式は成り立つ

確認問題1

正の整数 n に対して

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく。等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。

(解説)

(ｉ) $n=1$ のとき

$$S(1)=\sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad T(1)=\sum_{q=1}^{1}\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2}$$

よって成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1,2,3,\cdots$)のとき成り立つと仮定して

$S(k)=T(k)$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned}
S(k+1)&=\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\\
&=\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\\
&=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\\
&=\frac{1}{k+1}+\sum_{q=2}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\\
&=\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{k+1+l}+\frac{1}{2(k+1)}=\sum_{l=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+l}=T(k+1)
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ

(ｉ)，(ii)から，数学的帰納法より

すべての自然数 n について， $S(n)=T(n)$ は成り立つ

確認問題2

(1)　すべての自然数 n に対して，$4^{n+1}+5^{2n-1}$ は 21 で割り切れることを証明せよ。

(2)　次の条件を満たす定数でない多項式 $f(x)$ を推定し，その推定が正しいことを証明せよ。

(A) $f(4)=21$

(B) すべての自然数 n に対して，$x^{n+1}+(x+1)^{2n-1}$ は $f(x)$ で割り切れる。

解説

(1)(ｉ) $n=1$ のとき

$$4^{n+1}+5^{2n-1}=4^2+5^1=21$$

よって成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき成り立つと仮定して

$$4^{k+1}+5^{2k-1}=21m \ (\ m \text{ は整数})$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示せばよい

$$\begin{aligned}4^{(k+1)+1}+5^{2(k+1)-1}&=4^{k+2}+5^{2k+1}\\&=4\cdot4^{k+2}+25\cdot5^{2k-1}\\&=4\cdot(4^{k+1}+5^{2k-1})+21\cdot5^{2k-1}\\&=4\cdot21m-21\cdot5^{2k-1}\\&=21(4m-5^{2k-1})\end{aligned}$$

$4m-5^{2k-1}$ は整数であるから，

$n=k+1$ のときも成り立つ

(ｉ),(ii)から，数学的帰納法より

すべての自然数 n について，題意は成り立つ

(2) $n=1$ のとき

$$x^{n+1}+(x+1)^{2n-1}=x^2+(x+1)^1=x^2+x+1$$

$f(x)$ はこれを割り切る多項式で，定数ではないから，

$f(x)=c(x^2+x+1)$ (c は定数)とおける

また， $f(4)=21$ より， $21c=21$ 　 $\therefore c=1$

よって，$f(x)=x^2+x+1$ と推定される

これが正しいことを数学的帰納法で証明する

(ｉ) $n=1$ のとき，成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき成り立つと仮定して

$x^{k+1}+(x+1)^{2k-1}$ は x^2+x+1 で割り切れる

$x^{k+1}+(x+1)^{2k-1}=(x^2+x+1)g(x)$ ($g(x)$ は多項式)

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)+1}+(x+1)^{2(k+1)-1}&=x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}\\
&=x\cdot x^{k+1}+(x+1)^2(x+1)^{2k-1}\\
&=x\{x^{k+1}+(x+1)^{2k-1}\}+(x^2+x+1)(x+1)^{2k-1}\\
&=x(x^2+x+1)g(x)+(x^2+x+1)(x+1)^{2k-1}\\
&=(x^2+x+1)\{xg(x)+(x+1)^{2k-1}\}
\end{aligned}
$$

$xg(x)+(x+1)^{2k-1}$ は整式であるから,

$n=k+1$ のとき成り立つ。

(i), (ii) から数学的帰納法より,

すべての自然数 n について，題意は成り立つ

確認問題3
n を自然数とするとき，不等式 $2^n \leqq {}_{2n}\mathrm{C}_n \leqq 4^n$ が成り立つことを証明せよ。

(解説)

(ｉ) $n=1$ のとき

${}_2\mathrm{C}_1=2$ より， $2^1 \leqq {}_2\mathrm{C}_1 \leqq 4^1$

よって成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき成り立つと仮定して

$2^k \leqq {}_{2k}\mathrm{C}_k \leqq 4^k$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示せばよい

$$
\begin{aligned}
{}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1}-2^{k+1} &= \frac{\{2(k+1)\}!}{(k+1)!(k+1)!}-2^{k+1} \\
&= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!}-2^{k+1} \\
&= \frac{2(2k+1)}{(k+1)} \cdot {}_{2k}\mathrm{C}_k-2^{k+1} \\
&\geqq \frac{2(2k+1)}{(k+1)} \cdot 2^k-2^{k+1} \\
&= 2^{k+1}\left(\frac{2k+1}{k+1}-1\right)=2^{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}>0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 2^{k+1}<{}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1}$

$$
\begin{aligned}
4^{k+1}-{}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1} &= 4 \cdot 4^k-\frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot {}_{2k}\mathrm{C}_k \\
&\geqq 4 \cdot {}_{2k}\mathrm{C}_k-\frac{2(2k+1)}{k+1} \cdot {}_{2k}\mathrm{C}_k \\
&= \left\{4-\frac{2(2k+1)}{k+1}\right\}{}_{2k}\mathrm{C}_k=\frac{2}{k+1}{}_{2k}\mathrm{C}_k>0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ {}_{2(k+1)}\mathrm{C}_{k+1}<4^{k+1}$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ

(ｉ), (ii)から数学的帰納法より，

すべての自然数 n について，与えられた不等式は成り立つ

確認問題4

α を無理数とする。$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\dfrac{(2\alpha+1)a_n+\alpha}{1-\alpha a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(解説)

(1) $a_2=\dfrac{(2\alpha+1)\alpha+\alpha}{1-\alpha^2}=\dfrac{2(\alpha+1)\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)}=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}$

$a_3=\dfrac{2\alpha(2\alpha+1)+\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha-2\alpha^2}=\dfrac{3(\alpha+1)\alpha}{(1-2\alpha)(1+\alpha)}=\dfrac{3\alpha}{1-2\alpha}$

$a_4=\dfrac{3\alpha(2\alpha+1)+\alpha(1-2\alpha)}{1-2\alpha-3\alpha^2}=\dfrac{4(\alpha+1)\alpha}{(1-3\alpha)(1+\alpha)}=\dfrac{4\alpha}{1-3\alpha}$

(2) $a_n=\dfrac{n\alpha}{1-(n-1)\alpha}$ と推測できる

これを数学的帰納法により証明する

(i) $n=1$ のとき

$$a_1=\frac{1\cdot\alpha}{1-0\cdot\alpha}=\alpha$$

よって成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1,2,3,\cdots$) のとき成り立つと仮定して

$$a_k=\frac{k\alpha}{1-(k-1)\alpha}$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示せばよい

$$a_{k+1}=\frac{(2\alpha+1)a_k+\alpha}{1-\alpha a_k}=\frac{k\alpha(2\alpha+1)+\alpha\{1-(k-1)\alpha\}}{1-(k-1)\alpha-k\alpha^2}$$

$$=\frac{(k+1)(\alpha+1)\alpha}{(1-k\alpha)(\alpha+1)}=\frac{(k+1)\alpha}{1-\{(k+1)-1\}\alpha}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ

(i),(ii)から数学的帰納法より，

すべての自然数 n に対して推測したことは成り立つ

確認問題5

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数になることを示せ。

(3)　$\alpha>\beta$ とする。このとき，すべての自然数 n に対して，$[\alpha^n]$ は奇数になることを示せ。ただし，$[\alpha^n]$ は α^n 以下の最大の整数を表す。

(解説)

(1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=1$

よって

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot1=14$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot1\cdot4=52$

(2) (ⅰ) $n=1$，2 のとき

$\alpha+\beta=4$，$\alpha^2+\beta^2=14$

よって成り立つ

(ⅱ) $n=k$，$k+1$ ($k=1,2,3,\cdots$) のとき成り立つと仮定して

$\alpha^k+\beta^k=2m$，$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=2n$　(m，n は整数)

$n=k+2$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned}\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}&=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)\\&=4\cdot2n-1\cdot2m=2(4n-m)\end{aligned}$$

$4n-m$ は整数であるから，

$n=k+2$ のときも成り立つ

(ⅰ),(ⅱ)から数学的帰納法より，

すべての自然数 n について，題意は成り立つ

(3) $x^2-4x+1=0$ を解くと

$x=2\pm\sqrt{3}$

$\alpha>\beta$ から $\beta=2-\sqrt{3}$ より，　$0<\beta<1$

よって，　$0<\beta^n<1$

(2) より，　$\alpha^n+\beta^n=2N$ (Nは整数) と表せるから

$\alpha^n=2C-\beta^n$

$0<\beta^n<1$ より，　$2N-1<\alpha^n<2N$

よって，$[\alpha^n]=2N-1$

したがって，すべての自然数 n に対して，$[\alpha^n]$ は奇数になる