第3章　数列

3.1　数列・等差数列

(1) **数列**

　正の奇数を小さいものから順に並べると

　$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \cdots$　…①

という数の列が得られます。また，2 の累乗を 2 から 2^{10} まで小さいものから順に並べると，次のような数の列が得られます。

　$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ …②

このように数を一列に並べたものを**数列**といい，数列を作っている各数を数列の**項**といいます。数列の項は，最初の項から順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，…といい，n 番目の項を**第 n 項**といいます。特に第 1 項を**初項**ともいいます。例えば，数列①の初項は 1 で，第 2 項は 3 である。

　数列②のように，項の個数が有限である数列を**有限数列**といい，数列①のように，項がどこまでも限りなく続く数列を**無限数列**といいます。

　有限数列において，項の個数を**項数**，最後の項を**末項**といいます。例えば，有限数列②の項数は 10，末項は 1024 である。

　数列を一般的に表すとき，次のように表します。

　$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$

また，これを $\{a_n\}$ と略記することもあります。

例えば，数列①において，$a_1=1, a_2=3, a_3=5, \cdots$ であり，第 n 項 a_n は $a_n=2n-1$ と表すことができます。このように，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が n の式で表されるとき，これを数列 $\{a_n\}$ の**一般項**といいます。一般項が与えられると，$n=1, 2, 3, \cdots$ を代入することにより，その数列の各項を求めることができます。数列①は一般項を用いて $\{2n-1\}$ と表すこともあります。

(2) **等差数列**

　数列 $2, 5, 8, 11, 14, \cdots$ は初項 2 に次々に 3 を加えて得られます。すなわち，1 つの項とそのすぐ前の項との差は常に 3 で一定である。

　一般に，数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ において，各項に一定の数 d を加えると次の項が得られるとき，この数列を等差数列といい，d を公差と

いいます。このとき，すべての自然数 n について，次の関係が成り立ちます。

$a_{n+1}=a_n+d$ ，すなわち $a_{n+1}-a_n=d$

初項が a ，公差が d である等差数列 $\{a_n\}$ の各項は，

$a_1=a$

$a_2=a_1+d=a+d$

$a_3=a_2+d=a+2d$

$a_4=a_3+d=a+3d$

…

と表されるので，一般に次のことが成り立ちます。

等差数列の一般項

初項 a ，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=a+(n-1)d$

例1

(1) 7 で割ると 3 余る自然数を小さい順に並べた数列 3，10，17，24，…… の一般項を a_n とおくと，$a_n=$ ア $\boxed{}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であり，$a_n>2014$ を満たす最小の自然数 n の値は イ $\boxed{}$ である。

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ において，$a_3=5$，$a_{10}=33$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ の第 6 項が 13，第 15 項が 31 である。このとき，第 30 項は ア $\boxed{}$ であり，第 イ $\boxed{}$ 項は 71 である。また，初めて 1000 を超えるのは第 ウ $\boxed{}$ 項である。

(解説)

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 7 の等差数列より

$a_n=3+7(n-1)=$ ア$7n-4$

$a_n>2014$ のとき

$$7n-4>2014 \qquad \therefore\ n>\frac{2018}{7}=288.2\cdots$$

よって，$a_n>2014$ を満たす最小の自然数 n の値は イ289

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$a_3=5$ より，$a+2d=5$

$a_{10}=33$ より，$a+9d=33$ $\quad\therefore a=-3,\ d=4$

よって，一般項は

$$a_n=-3+(n-1)\cdot 4=4n-7$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$$a_n=a+(n-1)d$$

とおける

$a_6=13$ より，$a+5d=13$

$a_{15}=31$ より，$a+14d=31$ $\quad\therefore a=3,\ d=2$

よって，一般項は

$$a_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$$

したがって

$$a_{30}=2\cdot 30+1={}^{ア}61$$

$a_n=71$ となるのは

$$2n+1=71 \quad \therefore n=35$$

よって，71 は第 ${}^{イ}35$ 項である。

$a_n>1000$ となるとき

$$2n+1>1000 \quad \therefore n>\frac{999}{2}=499.5$$

よって，初めて 1000 を超えるのは，第 ${}^{ウ}500$ 項

(3) **等差数列の性質**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は

$a_n=a+(n-1)d$，すなわち $a_n=dn+(a-d)$

であるから，$d\fallingdotseq 0$ のとき，a_n は n の 1 次式で表されます。

例2

数列 $\{a_n\}$ は等差数列で，次の条件を満たしている．

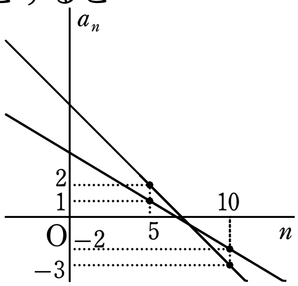
$$1\leqq a_5\leqq 2,\ -3\leqq a_{10}\leqq -2$$

このとき，第 20 項 a_{20} のとりうる値の範囲を求めよ．

解説

数列 $\{a_n\}$ は等差数列より，初項 a と公差 d とすると

$$a_n = a + (n-1)d \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$= dn + (a-d)$$



とおける

a_n は n の 1 次式となるので，

グラフの直線上の点の n が整数のときの値をとったものが a_n の値となる。

グラフより，

$a_5 = 1, a_{10} = -2$ のとき a_{20} は最大

$a_5 = 2, a_{10} = -3$ のとき a_{20} は最小

グラフより

$$-13 \leqq a_n \leqq -8$$

(4) 等差数列の和

自然数の数列 1, 2, 3, …, 10 は等差数列であり，これらの和は 55 である。これは，次のようにして求めることができます。

$$\begin{array}{rl} & S = \ \ 1 + \ \ 2 + \ \ 3 + \cdots + \ \ 9 + 10 \text{ とおく} \\ +) & \underline{S = 10 + \ \ 9 + \ \ 8 + \cdots + \ \ 2 + \ \ 1} \\ & 2S = 11 + 11 + 11 + \cdots + 11 + 11 \ (11 \text{ が } 10 \text{ 個}) \end{array}$$

よって，

$$S = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 10 = 55$$

一般に，初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項を l とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-d) + l$$

また，この和の項を逆の順に並べると

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+d) + a$$

これらを加えると

$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) \ (n \text{ 個})$$
$$2S_n = n(a+l)$$
$$\therefore S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\} \ (l = a + (n-1)d)$$

よって，次の公式が成り立ちます。

等差数列の和

初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和を S_n とするとき

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

例3

(1) 初項 20，公差 3 の等差数列の初項から第 10 項までの和を求めよ。

(2) 等差数列 1，4，7，…… の第 13 項から第 24 項までの和を求めよ。

(3) 200 以上 300 以下の自然数のうち，7 で割ると 2 余る数を小さいものから順に並べた数列は，初項が$^{ア}\boxed{}$, 末項が$^{イ}\boxed{}$, 項数が$^{ウ}\boxed{}$の等差数列となる。この数列の初項から末項までの和は$^{エ}\boxed{}$である。

解説

(1) $\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 20+(10-1)\cdot 3\}=335$

(2) 一般項 a_n は

$$a_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$$

$a_{13}=37$ (初項)， $a_{24}=70$ (末項)，項数 $24-13+1=12$ より，求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot(37+70)\cdot 12=642$$

別解

初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

求める和は

$$S_{24}-S_{12}=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 71-\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 35=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 35\cdot(4-1)+12=642$$

(3) 7 で割ると 2 余る数は， $7k+2$ (k は整数)と表すことができる

$200\leqq 7k+2\leqq 300$ より， $29\leqq k\leqq 42$

初項 $7\cdot 29+2={}^{ア}205$ ， 末項 $7\cdot 42+2={}^{イ}296$ ， 項数は $42-29+1={}^{ウ}14$

より，この数列の初項から末項までの和は

$$\frac{1}{2}\cdot 14\cdot(205+296)={}^{エ}3507$$

例4
m，n は正の整数で $m<n$ とする。このとき，m 以上 n 以下の分数で，5 を分母とし，5 の倍数でない整数を分子とするもの全体の和を求めよ。

解説

m 以上 n 以下の分数で，5 を分母とするものは

$$\frac{5m}{5},\ \frac{5m+1}{5},\ \frac{5m+2}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{5n-1}{5},\ \frac{5n}{5}$$

初項 m，末項 n，公差 $\frac{1}{5}$，項数 $5(n-m)+1$ の等差数列より和 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)$$

5 を分母とし，5 の倍数を分子とするものは整数であるから
m 以上 n 以下の整数の和を S_2 とすると

$$S_2=\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$$

求める和は S_1-S_2 より

$$\frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)-\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)\{5(n-m)+1-(n-m+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(m+n)\cdot4(n-m)=2(m+n)(n-m)$$

例5
等差数列 $\{a_n\}$ について

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_9+a_{10}=165,$$
$$a_1-a_2+a_3-\cdots\cdots+a_9-a_{10}=-15$$

のとき a_5，a_9 を求めよ。

解説

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_9+a_{10}=165$ …①
$a_1-a_2+a_3-\cdots\cdots+a_9-a_{10}=-15$ …②
①＋②より

$$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=150 \qquad \therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=75 \cdots③$$

$\{a_n\}$ の公差を d とすると

①より

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(2a_1+9d)=165 \quad \therefore\ 2a_1+9d=33 \cdots ④$$

③において，a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 も等差数列より

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(2a_1+8d)=75 \quad \therefore\ 2a_1+8d=30 \cdots ⑤$$

④，⑤より，$d=3, a_1=3$

よって

$$a_5=3+4\cdot 3=15, a_9=3+8\cdot 3=27$$

例6

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ は，初項から第 5 項までの和は 50 で，$a_5=16$ である とする。このとき，一般項 a_n は，$a_n=$ ア$\boxed{}$ となり，初項から第 n 項までの和 S_n は，$S_n=$ イ$\boxed{}$ となる。

(2) 初項から第 10 項までの和が 100 で，初項から第 20 項までの和が 350 であるような等差数列の初項は ア$\boxed{}$ で，公差は イ$\boxed{}$ である.

解説

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とする

$S_5=\frac{5}{2}(a_1+a_5)=50$, $a_5=16$ より，$a_1=4$

$a_5=16$ より，$4+4d=16 \quad \therefore\ d=3$

よって，一般項 a_n は

$$a_n=4+(n-1)\cdot 3={}^{ア}3n+1$$

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{n}{2}\{4+(3n+1)\}={}^{イ}\frac{n(3n+5)}{2}$$

(2) 初項を a，公差を d とすると

$$\frac{10}{2}(2a+9d)=100 \quad \therefore\ 2a+9d=20 \cdots ①$$

$$\frac{20}{2}(2a+19d)=350 \quad \therefore\ 2a+19d=35 \cdots ②$$

①，②より，$a=\frac{13}{4}$，$d=\frac{3}{2}$

例7
初項から第 5 項までの和が 20，第 6 項から第 10 項までの和が 30 である等差数列の第 11 項から第 15 項までの和を求めよ．

(解説)

この数列の公差を d，第 n 項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a_1+a_5)$$

第 6 項から第 10 項までの和は

$$S_{10}-S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a_6+a_{10})=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\{(a_1+5d)+(a_5+5d)\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a_1+a_5)+25d=S_5+25d$$

第 11 項から第 15 項までの和は

$$S_{15}-S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a_{11}+a_{15})=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\{(a_6+5d)+(a_{10}+5d)\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(a_6+a_{10})+25d=(S_{10}-S_5)+25d$$

より，等差数列の初項から 5 項ずつの和の数列 $S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}, \cdots$ は等差数列になるから，

$$S_{15}-S_{10}=40$$

例8
(1) 初項 50，公差 -3，項数 n の等差数列の和を S_n とする。S_n の最大値を求めよ。
(2) d を整数とする。初項 -4200，公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は $n=81$ において最小値をとる。このとき $d=\boxed{}$ である。

(解説)

(1) この等差数列の一般項を a_n とすると

$$a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$$

$a_n\leqq 0$ のとき

$$-3n+53\leqq 0 \qquad \therefore\ n\geqq\frac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$$

よって，この数列は第 18 項以降は負になるから，
初項から第 17 項までの和が最大になる
よって，S_n の最大値は

$$S_{17}=\frac{1}{2}\cdot 17\{2\times 50+(17-1)\cdot(-3)\}=442$$

別解

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 50+(n-1)\cdot(-3)\}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(n^2-\frac{103}{3}n\right)=-\frac{3}{2}\left\{\left(n-\frac{103}{6}\right)^2-\left(\frac{103}{6}\right)^2\right\}$$
$$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{103}{6}\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{103}{6}\right)^2$$

n は自然数より，　$n=17$ のとき最大
($\frac{103}{6}$ は $18=\frac{108}{6}$ より $17=\frac{102}{6}$ の方が近い)
(2) この等差数列の一般項を a_n とすると

$$a_n=-4200+(n-1)d$$

$d\leqq 0$ のとき，　S_n は単調減少するから，S_n の最小値は存在しない
$d>0$ のとき，S_n が $n=81$ において最小値をとるためには

$$a_{81}\leqq 0\ ,\ a_{82}\geqq 0$$
$$-4200+80d\leqq 0\ ,\ -4200+81d\geqq 0$$
$$\frac{4200}{81}\leqq d\leqq\frac{4200}{80}\qquad\therefore\ 51.8\cdots\cdots\leqq d\leqq 52.5$$

d は整数より，　$d=52$

例9
等差数列 $\{a_n\}$ を 2，5，8，11，14，…，等差数列 $\{b_n\}$ を 3，7，11，15，19，… とする．$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に現れる数を小さい順に並べてできる数列の第 n 項は ア $\boxed{}$ である．また，$\{a_n\}$ の初めの第 1000 項までのうちで，$\{b_n\}$ と共通なものの和は イ $\boxed{}$ となる．

解説

一般項 a_n, b_n は

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1,\quad b_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$$

$a_k=b_l$ のとき

$$3k-1=4l-1 \quad \therefore 3k=4l$$

$3k$ は 4 の倍数であり，3 と 4 は互いに素であるから

k は 4 の倍数より， $k=4m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ と表される

よって，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の共通項の数列を $\{c_m\}$ とすると，

この数列の一般項は

$$c_m=a_{4m}=3\cdot 4m-1=12m-1 \ (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

$4m\leqq 1000$ から $m\leqq 250$

$c_1=11$，$c_{250}=12\times 250-1=2999$ より，求める和は

$$\frac{250}{2}(11+2999)=376250$$

(5) いろいろな自然数の数列の和

自然数の数列 $1, 2, 3, \cdots, n$ は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列であるから，その和は

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

となる。また，正の奇数の数列 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$ は，初項 1，末項 $2n-1$，項数 n の等差数列であるから，その和は

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=n^2$$

となる。他にも， m を 2 以上の自然数として， m の倍数のすべては，公差が m の等差数列となるから，その和は等差数列の和の公式を用いて求めることができます。

例10

100 以上 200 以下の自然数について

(1)　2 または 3 で割り切れる数の総和はいくらか.

(2)　4 で割ると 1 余り，かつ， 6 で割ると 5 余るような数の総和はいくらか.

解説

(1) 2, 3, 6 で割り切れる数の総和を S_1, S_2, S_3 とおくと

$$S_1=100+102+\cdots+200=\frac{1}{2}\cdot 51\cdot(100+200)=51\cdot 150$$

$$S_2=102+105+\cdots+198=\frac{1}{2}\cdot 33\cdot(102+198)=33\cdot 150$$

$$S_3=102+108+\cdots+198=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot(102+198)=17\cdot 150$$

求める和 S は

$$S=S_1+S_2-S_3=(51+33-17)\cdot 150=10050$$

(2) 条件を満たす集合の元を x とすると

$x=4m+1=6n+5$ (m, n は整数) …①

$x+7=4(m+2)=6(n+2)$

よって，$x+7$ は 4 の倍数かつ 6 の倍数，すなわち 12 の倍数より

$x+7=12k$ (k は整数)　　$\therefore\ x=12k-7$

$100\leqq x\leqq 200$ より

$100\leqq 12k-7\leqq 200$

k は整数より，$9\leqq k\leqq 17$

求める総和は

$$\frac{9}{2}(101+197)=9\times 149=1341$$

別解

例9 のように①を不定方程式とみて解くこともできます。

確認問題1

初項 1，公差 4 の等差数列 a_1，a_2，a_3，…… を考える。$a_{1000}=$ ア$\boxed{}$ である。また a_1，a_2，a_3，……，a_{1000} の中に整数の 2 乗として表される数は イ$\boxed{}$ 個ある。

解説

$a_n=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$ より

$a_{1000}=4\cdot 1000-3=3997$

すべての自然数 m は $2k-1, 2k$ (k は自然数) のいずれかで表される

$m=2k-1$ のとき， $m^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=4(k^2-k+1)-3$

$m=2k$ のとき， $m^2=(2k)^2=4k^2$ より

$m=2k-1$ のとき， $m^2=4l-3$ (l は整数) であるから，この数列の項であり， $m=2k$ のときはこの数列の項ではない

$63^2=3969$，$65^2=4225$ より， a_1，a_2，a_3，……，a_{1000} の中に整数の 2 乗として表される数は， $63=2\cdot 32-1$ より 32 個

確認問題2
ある等差数列の第 n 項を a_n とするとき，

$$a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=365,\quad a_{15}+a_{17}+a_{19}=-6$$

が成立している。

(1)　この等差数列の初項と公差を求めよ。

(2)　この等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n の最大値を求めよ。

解説

(1) 初項を a，公差を d とすると

$$a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}=\frac{5(a_{10}+a_{14})}{2}$$

$$=\frac{5}{2}\{(a+9d)+(a+13d)\}=5(a+11d) \text{ より}$$

$5(a+11d)=365 \quad \therefore\ a+11d=73 \cdots$①

$a_{15}+a_{17}+a_{19}=(a+14d)+(a+16d)+(a+18d)=3(a+16d)$ より

$3(a+16d)=-6 \quad \therefore\ a+16d=-2 \cdots$ ②

①，②より，$a=238$，$d=-15$

よって，初項 238，公差 -15

(2) $a_n=238+(n-1)\cdot(-15)=253-15n$

$a_n<0$ となるのは

$$253-15n<0 \quad \therefore\ n>\frac{253}{15}=16.8\cdots$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は第 17 項以降は負になるから

S_n は $n=16$ のとき最大で

最大値 $S_{16}=\frac{1}{2}\cdot16\cdot\{2\cdot238+(16-1)\cdot(-15)\}=2008$

確認問題3
(1)　2 つ以上の連続する自然数の和が 50 であるとき，この連続する自然数の組をすべて求めよ．
(2)　2 つ以上の連続する自然数の和は，2^k (k は自然数) の形にはならないことを証明せよ．

解説

(1) m から始まる連続する n 個の自然数の和が 50 になるとすると

$$m+(m+1)+\cdots+(m+n-1)=50$$

$$\frac{n(2m+n-1)}{2}=50$$

$$n(2m+n-1)=2^2\cdot 5^2$$

n が偶数のとき，$2m+n-1$ は奇数，
n が奇数のとき，$2m+n-1$ は偶数より
n と $2m+n-1$ の偶奇は異なる
また，$2\leqq n<2m+n-1$ より

$$(n, 2m+n-1)=(4, 25), (5, 20)$$

$$\therefore (m, n)=(11, 4), (8, 5)$$

よって，求める自然数の組は
11，12，13，14 または 8，9，10，11，12

(2)　m から始まる連続する $n+1$ 個の自然数の和が 2^k になるとすると，(1) と同様にし
て　　$(2m+n)(n+1)=2^{k+1}$
よって，② から，$2m+n$，$n+1$ のどちらか一方が 1 にならなければならないが，こ
れは ③ に反する．
よって，2 つ以上の連続する自然数の和は，2^k の形にはならない．

確認問題4
k を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ において，初めの k 項の和を T_1，次の k 項の和を T_2，その次の k 項の和を T_3 とし，以下同様に T_4，T_5，……を定めるとき，次の問いに答えよ。
(1)　$\{a_n\}$ が等比数列で $k=4$ とする。$T_1=5$，$T_2=80$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。
(2)　$\{a_n\}$ が等差数列ならば $\{T_n\}$ も等差数列であることを証明せよ。

解説

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると，　$a_n=ar^{n-1}$
$k=4$ のとき

$$T_1=a_1+a_2+a_3+a_4=a(1+r+r^2+r^3)\ \cdots①$$

$$T_2=a_5+a_6+a_7+a_8=ar^4(1+r+r^2+r^3)\ \cdots②$$

①，② より，　$T_2=r^4T_1$
$T_1=5$，$T_2=80$ より

$$80=r^4\cdot 5 \qquad \therefore r^4=16$$

r は実数より，　$r=\pm 2$
①より
$r=2$ のとき $a=\dfrac{1}{3}$，$r=-2$ のとき $a=-1$
よって

$$a_n=\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}\ ,\ a_n=-(-2)^{n-1}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$$a_n=a+(n-1)d$$

数列 $\{T_n\}$ は初項 $a_{k(n-1)+1}=a+k(n-1)d$，公差 d，項数 k の等差数列の和より

$$T_n=\frac{k}{2}\{2a_{k(n-1)+1}+(k-1)d\}$$

このとき

$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n&=k\{a_{kn+1}-a_{k(n-1)+1}\}\\&=k\{(a+knd)-(a+k(n-1)d)\}=k^2d\ (\text{定数})\end{aligned}$$

よって，数列 $\{T_n\}$ も等差数列である

確認問題5

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ に対し，

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ が等差数列ならば $\{b_n\}$ も等差数列であることを示せ。

(2) $\{b_n\}$ が等差数列ならば $\{a_n\}$ も等差数列であることを示せ。

(3) $\{b_n\}$ が等差数列で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_{2k-1}=20$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_{2k}=10$ を満たすとき，$\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

解説

(1) $\{a_n\}$ を等差数列とし，公差を d_1 とすると

$$b_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n\{2a_1+(n-1)d_1\}$$

$$=a_1+\frac{1}{2}(n-1)d_1$$

このとき

$$b_{n+1}-b_n=\left(a_1+\frac{1}{2}nd_1\right)-\left\{a_1+\frac{1}{2}(n-1)d_1\right\}=\frac{1}{2}d_1\ (\text{定数})$$

よって，$\{b_n\}$ も等差数列である

(2) $\{b_n\}$ を等差数列とし，公差を d_2 とすると

$$b_n=b_1+(n-1)d_2$$

$n=1$ のとき，$b_1=\dfrac{a_1}{1}\qquad \therefore\ a_1=b_1$

$n\geqq 2$ のとき

$$nb_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ \cdots①$$

$$(n-1)b_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\ \cdots②$$

①−②より

$$a_n=nb_n-(n-1)b_{n-1}$$

$$=n(b_n-b_{n-1})+b_{n-1}$$

$$=nd_2+b_1+(n-2)d_2$$

$$=b_1+2(n-1)d_2$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

このとき

$a_{n+1}-a_n=2d_2$ (一定)

よって，$\{a_n\}$ も等差数列である

(3) $\{b_n\}$ は等差数列であるから，(2)より，$\{a_n\}$ も等差数列である

$\{a_n\}$ の公差を d_2 とすると

$\sum_{k=1}^{10} b_{2k-1}=b_1+b_3+b_5+\cdots\cdots+b_{19}=20$ より

$$\frac{10}{2}\cdot\{2b_1+(10-1)\cdot 2d_2\}=20 \quad \therefore\ b_1+9d_2=2 \ \cdots③$$

$\sum_{k=1}^{10} b_{2k}=b_2+b_4+b_6+\cdots\cdots+b_{20}=10$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 10\{2(b_1+d_2)+(10-1)\cdot 2d_2\}=10 \quad \therefore\ b_1+10d_2=1 \ \cdots④$$

③，④より，$b_1=11$，$d_2=-1$

(2) より

$$\begin{aligned} a_n &= b_1+2(n-1)d_2 \\ &= 11+2(n-1)\cdot(-1) \\ &= -2n+13 \end{aligned}$$