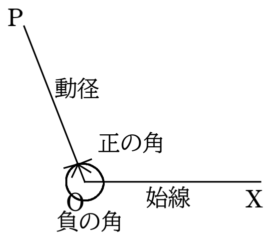
第1章　三角関数

1.1　一般角と弧度法・三角関数(1)

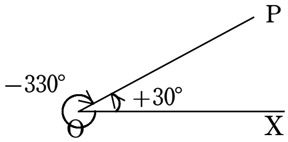
(1) **一般角**

図形に現れる角の大きさは $0°$ から $360°$ までであるが，時計の長針が 4 時から 5 時 20 分まで回転する角度は $360°$ より大きい。また，長針を 5 分進めても 5 分戻しても長針は $30°$ 回転するが，その向きは逆になります。一般に，回転運動などを扱うときは，$360°$ より大きい角や回転の向きを考えた角が必要になります。そこで，角の意味をそのように拡張することを考えます。



平面上で点 O を中心として半直線 OP を回転させるとき，この半直線 OP を**動径**といい，その最初の位置を表す半直線 OX を**始線**といいます。

動径の回転には 2 つの向きがあります。時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**，時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**といいます。また，正の向きの回転の角を**正の角**，負の向きの回転の角を**負の角**といいます。



正の角は，例えば $+30°$ または単に $30°$ と表し，負の角は，例えば $-330°$ と表します。

このように，回転の向きと大きさを表す量として拡張した角を**一般角**といいます。

一般角 θ に対して，始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を，**θ の動径**といいます。

動径は $360°$ 回転するともとの位置に戻るから，
例えば $30°$ の動径 OP と

$390°=30°+360°$

$750°=30°+360°\times 2$

$-330°=30°+360°\times 360°\times(-1)$

などの角の動径は一致します。これらの角を**動径 OP の表す角**といいます。一般に，動径 OP と始線 OX のなす角の 1 つを α とすると，動径 OP の表す角は，$\alpha+360°\times n$ (n は整数) と表されます。

(2) **弧度法**

角の大きさを表すのに，これまで用いてきた度数法は1回転に相当する角を360等分したものを単位(1°)とする表し方である。
ここでは，数学の立場からより自然な表し方について考えます。

半径がrである扇形において，その中心角の大きさは，rが一定であれば弧の長さlに比例します。また，中心角を共有する扇形において，rがk倍になるとlもk倍になります。したがって，扇形において，

$\dfrac{\text{弧の長さ}}{\text{半径}}$ によって，中心角の大きさθを定義することができます。

すなわち，$\theta=\dfrac{l}{r}$ と表す方法を**弧度法**といい，弧度法であることを強調したいとき，度数法の°と区別するために，**ラジアン**や**弧度**など呼びます。この定義から，弧の長さがrである半径rの扇形の中心角を単位(1ラジアン)と考え，それを定義としてもよいし，$r=1$として，半径が1の扇形の弧の長さを弧度として定義してもよい。

また，半径rの半円の弧の長さは，$l=\pi r$，すなわち，$\dfrac{l}{r}=\pi$ であり，半円の中心角は，度数法では180°であるから，180°$=\pi$ラジアンである。したがって，

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \text{ラジアン},\quad 1\ \text{ラジアン}=\frac{180^\circ}{\pi}\fallingdotseq 57.3^\circ$$

となります。

度数法に慣れていると，弧度法の定義は不自然に思えるかもしれませんが，数学の立場からは自然といえます。例えば，弧度法を定義すると，扇形の弧の長さ，面積がシンプルに表すことができます。

また，後に学ぶことになりますが，微分法の範囲で，この扇形の面積の公式を利用すると，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ という式が導かれ，この式によって，$\sin\theta$ の微分が $\cos\theta$ とシンプルな形で表されます。そういう意味で自然といえます。そもそも，度数法の1回転(1周)を360等分するという定義の方が不自然であり，この360という数には諸説ありますが，1年が365日であることから天文学的に定められたという説や，約数が多いから等分するときに整数で表しやすいくらいの根拠しかありません。

弧度法を用いて，扇形の弧の長さと面積を表す式を考えます。

半径が r，中心角が θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とするとき，

$\dfrac{l}{2\pi r}=\dfrac{\theta}{2\pi}$ より， $l=r\theta$ …①

$\dfrac{S}{\pi r^2}=\dfrac{\theta}{2\pi}$ より， $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ …②

また，①，②より， $S=\dfrac{1}{2}rl$

これらをまとめると，次のようになります。

扇形の弧の長さと面積
半径が r，中心角が θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると
$l=r\theta, S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

例1
半径 6 cm，中心角 $\dfrac{\pi}{4}$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ.

解説

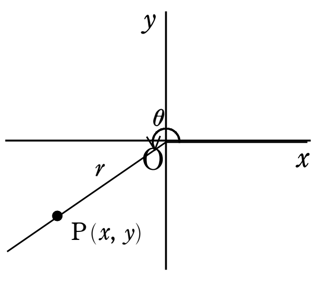
弧の長さは， $6\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi\ (\mathrm{cm})$

面積は， $\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{9}{2}\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

別解

面積は，$S=\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{9}{2}\pi\ (\mathrm{cm}^2)$

(3) 一般角の三角比



座標平面上で， x 軸の正の部分を始線にとり，一般角 θ の動径上に点 $\mathrm{P}(x, y)$ をとり，原点 O と P との距離を r とします。このとき，

$\dfrac{y}{r}, \dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{x}$

の各値は， r には無関係で，角 θ だけによって定まります。そこで，今までの三角比と同様に

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定め，これらをそれぞれ，一般角 θ の**正弦**，**余弦**，**正接**といいます。

ただし， $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) に対しては， $x=0$ となるので， $\tan\theta$ の値は定義しません。

$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ はいずれも θ の関数であり，これらをまとめて**三角関数**といいます。

ここで， $r=1$ ，すなわち，P (x, y) が単位円 (原点を中心とする半径 1 の円)の周上にあるとき，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を T $(1, m)$ とすると(m は直線 OP の傾き)

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y,\ \cos\theta=\frac{x}{1}=x,\ \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{m}{1}=m$$

よって， $y=\sin\theta, x=\cos\theta, m=\tan\theta$

したがって，三角関数の値の符号は，その角の動径が，どの象限にあるかで決まります。

θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

また， $-1\leqq x\leqq 1, -1\leqq y\leqq 1, m$ はすべての実数値をとるから，

$-1\leqq\sin\theta\leqq 1, -1\leqq\cos\theta\leqq 1,$

$\tan\theta$ の値の範囲は実数全体

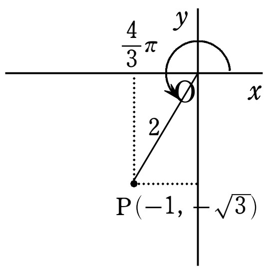
となります。

例2

$\frac{4}{3}\pi$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ。

解説

左図より



$$\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$$

例3

$\sin 135^\circ + \cos 135^\circ + \tan 240^\circ$ の値を求めよ．

(解説)

$$\sin 135^\circ + \cos 135^\circ + \tan 240^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

例4

関数 $\sin x$ の増減を考えて，4つの数 $\sin 0$，$\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$ を小さい方から順に並べよ。

(解説)

°という単位がないので， sin の中身の 0, 1, 2, 3 は弧度法で表された角度です。

π (ラジアン)$=180^\circ$ より，

1 (ラジアン)$= \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$

$\sin 0 = 0$

$\dfrac{\pi}{4} < 1 < \dfrac{\pi}{3}$ より， $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \sin 1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{\pi}{3} < 2 < \dfrac{2}{3}\pi$ より， $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2 < 1$

$\dfrac{3}{4}\pi < 3 < \pi$ より， $0 < \sin 3 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって， $\sin 0 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

したがって，小さい方から順に並べると

$\sin 0$，$\sin 3$，$\sin 1$，$\sin 2$

例5

$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ であるとき，方程式 $2\sin(\theta - 45^\circ) = 1$ の解を求めよ．

(解説)

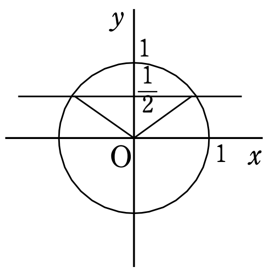
$2\sin(\theta - 45^\circ) = 1$

$\sin(\theta - 45^\circ) = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ から $-45^\circ \leqq \theta - 45^\circ \leqq 315^\circ$ より

$\theta - 45^\circ = 30^\circ$，$150^\circ$

$\therefore\ \theta = 75^\circ$，$195^\circ$

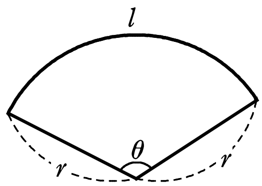


確認問題1

周囲の長さが 12 cm の扇形は，半径が ア$\boxed{}$ cm，中心角が イ$\boxed{}$ ラジアンのとき面積が最大になり，その値は ウ$\boxed{}$ cm^2 である。

(解説)

扇形の半径を r cm，中心角を θ ラジアン，面積を S cm^2，弧の長さを l cm とすると



$$l=r\theta\ ,\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

これらより，$S=\frac{1}{2}rl$ …①

周の長さが 12 cm より

$$2r+l=12$$

$$\therefore\ l=12-2r \cdots ②$$

$0<l<2\pi r$ より

$$0<12-2r<2\pi r$$

$$\therefore\ \frac{6}{\pi+1}<r<6$$

①，②より

$$S=\frac{1}{2}r(12-2r)=6r-r^2=-(r-3)^2+9$$

S は $r=$ ア3 のとき最大

最大値 ウ9 (cm^2)

このとき，中心角は

$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{12-2\cdot 3}{3}=\text{イ}2\ (\text{ラジアン})$$