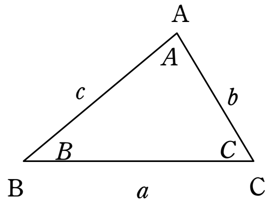
# 3.3　正弦定理・余弦定理(1)

(1) **正弦定理**

　以下，△ABCにおいて，頂点 A, B, C に向かい合う辺 BC, CA, AB の長さを，それぞれ $a, b, c$ で表し，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ $A, B, C$ で表すことにします。




　三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円**といいます。

　三角形について，次の**正弦定理**が成り立ちます。

> **正弦定理**
> △ABCの外接円の半径を $R$ とするとき，
> $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

> **例1**
> (1)　鋭角三角形 ABC の外接円の半径を $R$ とし，頂点 A，B，C に向かい合う辺の長さを $a$，$b$，$c$ とおく。このとき，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ $=2R$ を証明せよ。
> (2)　45°，60°，75° を内角にもつ三角形を利用して，$\sin 75°$ の値を求めよ。

(解説)

(1) BD が直径となるように D をとると，円周角の定理より

　$\angle\mathrm{BDC}=A$，$\angle\mathrm{BCD}=90°$

よって，

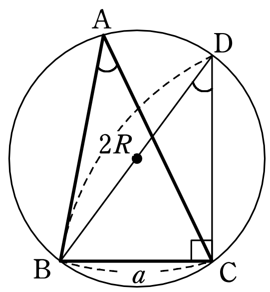
　$a=2R\sin\angle\mathrm{BDC}=2R\sin A$

同様にして，

　$b=2R\sin B$，　$c=2R\sin C$

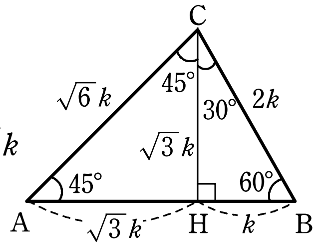
したがって，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



(2) $A=45°$，$B=60°$，$C=75°$ とし，
点 C から辺 AB に下ろした垂線を CH,
BH$=k$ とすると

$\mathrm{BC}=2k$，$\mathrm{CH}=\sqrt{3}\,k$，$\mathrm{AH}=\sqrt{3}\,k$，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}\,k$




(1) より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}$$

$$\frac{2k}{\sin 45°}=\frac{(\sqrt{3}+1)k}{\sin 75°}$$

$$\therefore \sin 75°=\frac{(\sqrt{3}+1)k}{2k}\sin 45°=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(1)では，鋭角三角形の場合について，正弦定理を証明しました。一般に，正弦定理が成り立つことを示すためには，三角形は，この他に直角三角形と鈍角三角形の場合もあるので，それらについても証明しなくてはなりません。本問は，大学入試の問題ですが，最近ではこのような基本的な定理の証明問題もよく出題されます。直角三角形と鈍角三角形の場合についても証明してみます。

直角三角形の場合

$A=90°$ とすると，

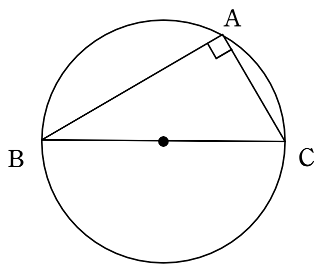
$a=2R=2R\sin A$ ( $\sin A=1$ より)

このとき， $B, C<90°$ であるから

$b=2R\sin B$ , $c=2R\sin C$ (証明済み)

よって，成り立ちます。

$B=90°, C=90°$ としても同じです。




鈍角三角形の場合

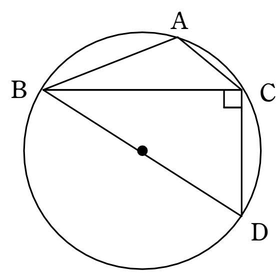
$A>90°$ とする。

BD が直径となるように D をとると，
円に内接する四角形の対角の和は180°より，

$\angle\mathrm{BDC}=180°-A$

よって，

$$a=\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{BDC}=2R\sin(180°-A)$$
$$=2R\sin A$$




このとき， $B, C<90°$ であるから

$b=2R\sin B$ , $c=2R\sin C$ (証明済み)

よって，成り立ちます。 $B, C$ が鈍角の場合も同様です。

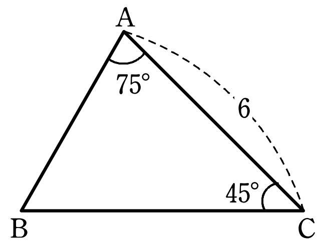
例2

△ABCにおいて，AC＝6，∠A＝75°，∠C＝45°であるとき，AB＝ア$\boxed{\phantom{00}}$，BC＝イ$\boxed{\phantom{00}}$である。

(解説)

$B=60°$

正弦定理より




$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 45°}=\frac{6}{\sin 60°}$$

$$\therefore\ \mathrm{AB}=\frac{6\sin 45°}{\sin 60°}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=^{ア}2\sqrt{6}$$

Aから辺BCに下ろした垂線をAHとすると

$$\mathrm{BC}=\mathrm{BH}+\mathrm{CH}=\mathrm{AB}\cos 60°+\mathrm{AC}\cos 45°$$

$$=2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=^{イ}\sqrt{6}+3\sqrt{2}$$

例3

△ABCで$A=30°$，BC＝1のとき，この外接円の直径を求めよ．

(解説)

外接円の半径を$R$とすると，正弦定理より

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30°}=2$$

(2) **余弦定理**

次は，**余弦定理**について考えます。

例4

△ABCは$A=30°$，$B=45°$であり，半径1の円に内接している．このとき，次のものを求めよ．

(1)　辺BCの長さ　　(2)　辺ABの長さ　　(3)　$\cos C$

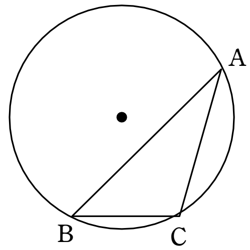
(解説)

(1) 正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R\quad\therefore\ \mathrm{BC}=2\sin 30°=1$$

(2) 正弦定理より

$$\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}=2R \qquad \therefore\ \mathrm{CA}=2\sin 45^\circ=\sqrt{2}$$




CからABに下した垂線の足を H とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\mathrm{AH}+\mathrm{HB}\\&=\mathrm{CA}\cos A+\mathrm{CB}\cos B\\&=\sqrt{2}\cos 30^\circ+\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(3) 正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}=2R \qquad \therefore\ \sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$ より，

$$\begin{aligned}\cos^2 C&=1-\sin^2 C\\&=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

$C=105^\circ$ であるから， $\cos C<0$ より，

$$\cos C=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)で用いた式を**第 1 余弦定理**といいます。一般に，次の定理が成り立ちます。

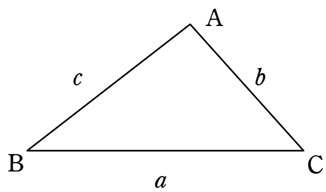
**第 1 余弦定理**

△ABC において，

$a=b\cos C+c\cos B$

$b=c\cos A+a\cos C$

$c=a\cos B+b\cos A$




いちばん上の式を証明します。向きを変えれば，他の 2 つの式も成り立つことが分かると思います。

鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の場合に分けて証明します。ここでは，式に含まれる角が $B, C$ なので， $A, C$ は鋭角とし，$B$ が鋭角か直角か鈍角かで場合分けをします。

鋭角三角形の場合 ( $B<90^\circ$ )

A から BC に垂線 AH を下ろすと，

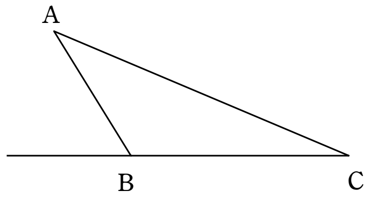
$$\mathrm{BC}=\mathrm{BH}+\mathrm{HC}$$

$\therefore\ a = c\cos B + b\cos C$

直角三角形の場合 ( $B = 90°$ )

$a = b\cos C = c\cos B + b\cos C$ ( $\cos B = 0$ より)

鈍角三角形の場合 ( $B > 90°$ )




A から BC に垂線 AH を下ろすと，

$\mathrm{BC} = \mathrm{CH} - \mathrm{CB}$

$a = b\cos C - c\cos(180° - B)$

$= b\cos C + c\cos B$

となり，成り立ちます。

このことからも，90° 以上の三角比を初めに定義したように定義すると妥当であることが分かると思います。第 1 余弦定理を使って問題を解くことはほとんどありませんが，三角比の定義の妥当性を考えるには，ちょうどよいかもしれません。よく使われるのは，次の第 2 余弦定理です。ふつう，第 2 は省略して単に余弦定理と呼ばれています。

**(第2)余弦定理**

△ABC において，

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

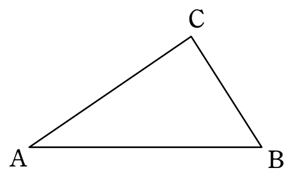
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

いちばん上の式を証明します。

$B, C$ は鋭角とし，$A$ が鋭角，直角，鈍角で場合分けをします。

鋭角三角形の場合 ( $A < 90°$ )




C から AB に垂線 CH を下ろすと，

$\mathrm{CH} = b\sin A,\ \mathrm{AH} = b\cos A$

$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$

△BCH で三平方の定理より

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$

$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

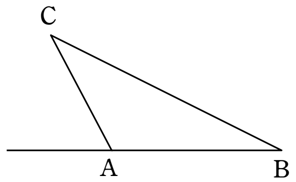
直角三角形の場合 ( $A=90°$ )

△ABC で三平方の定理より

$a^2=b^2+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ( $\cos A=0$ より)

鈍角三角形の場合 ( $A>90°$ )

C から AB に垂線 CH を下ろすと，




$\mathrm{CH}=b\sin(180°-A)=b\sin A$

$\mathrm{AH}=b\cos(180°-A)=-b\cos A$

$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}+\mathrm{AH}=c-b\cos A$

△BCH で三平方の定理より

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2$

$a^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$

あとは同様。加法定理というものを用いれば，第 1 余弦定理から第 2 余弦定理，また，その逆も導けます。

---

**例5**

△ABC において，$A=45°$，$b=\sqrt{2}$，$c=1+\sqrt{3}$ のとき

(1) $a$ の値を求めよ. (2) $B$，$C$ の値を求めよ.

---

(解説)

(1) 余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$=(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

$a>0$ より，$a=2$

(2) 余弦定理より

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$\therefore \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2(1+\sqrt{3})\cdot 2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore B=30°$$

よって，

$$C=180°-A-B$$

$$=180°-45°-30°=105°$$

例6

$\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{7}}=\sin C$ が成り立っている。このとき，三角形 ABC の内角のうちで最も大きい角の大きさは $^{ア}\boxed{\phantom{000}}$ である。

(解説)

条件式より

$\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{3}:\sqrt{7}:1$

また，正弦定理より

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{7}:1$

$a=\sqrt{3}k,\ b=\sqrt{7}k,\ c=k\ (k>0)$ とおくと，

$b>a>c$ であるから，最も大きい角は $B$ である

余弦定理より

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{k^2+(\sqrt{3}k)^2-(\sqrt{7}k)^2}{2\cdot k\cdot\sqrt{3}k}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°<B<180°$ より，$B=150°$

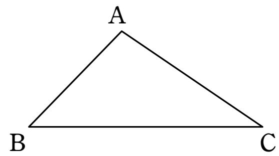
つまり，最も大きい角の大きさは 150°

さらっと流してしまいましたが，次の命題を証明しておきます。

**辺の長さと対角の大きさの関係**

△ABC において，

$a>b>c \Leftrightarrow A>B>C$




→について

$b>c \rightarrow B>C$ を示します。

$b>c$ であるから，

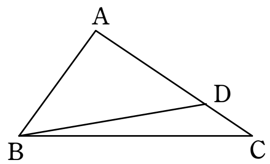
AC 上に AB=AD となるように D をとる。

△ABD は，AB=AD の二等辺三角形より，

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ADB}$

$B=\angle\mathrm{ABD}+\angle\mathrm{CBD}$，$C=\angle\mathrm{ADB}-\angle\mathrm{CBD}$ より，

$B>C$



$a>b \to A>B$ も同様です。

$\leftarrow$ について

$B>C \to b>c$ を示します。

$B>C$ であって， $b \leqq c$ であるものが存在すると仮定すると，

前半の証明から，$b \leqq c$ であるから $B \leqq C$ より矛盾。

よって， $B>C \to b>c$

これは，背理法という証明法で，次の章で詳しく扱います。

$A>B \to a>b$ も同様です。

別解

$0° < \theta < 180°$ で $\cos\theta$ は単調減少 ($\theta$ が増加すると $\cos\theta$ は減少する) より

$$b>c \Leftrightarrow \cos B < \cos C \text{ すなわち } \cos C - \cos B > 0$$

を示せばよい

$$\cos C - \cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \text{ (余弦定理より)}$$

$$= \frac{c(a^2+b^2-c^2)-b(c^2+a^2-b^2)}{2abc}$$

$$= \frac{(c-b)a^2+(b^2-c^2)(b+c)}{2abc}$$

$$= \frac{(b-c)\{(b+c)^2-a^2\}}{2abc}$$

この等式と，三角形の成立条件から $(b+c)^2-a^2>0$ より，

$\to$ も $\leftarrow$ も証明できます。

例7
$\triangle$ABC において，AB$=1+\sqrt{3}$，AC$=2$，$\angle$B$=45°$，$\angle$C$<90°$ であるとする．このとき，BC の長さと $\angle$C の大きさを求めよ．

解説

BC$=a$ とすると，余弦定理より

$$2^2=(1+\sqrt{3})^2+a^2-2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot a\cdot\cos 45°$$

$$a^2-(\sqrt{2}+\sqrt{6})a+2\sqrt{3}=0$$

$$(a-\sqrt{2})(a-\sqrt{6})=0$$

ここで，余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$C<90^\circ$ であるから，$\cos C>0$ より，

$a^2+b^2-c^2>0$

$\therefore\ a^2>c^2-b^2=(1+\sqrt{3})^2-2^2=2\sqrt{3}$

よって，$a=\sqrt{6}$

正弦定理より

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin A}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$c>b$ であるから $C>B$ より，$C>45^\circ$

よって，$A<90^\circ$ より，$A=60^\circ$

したがって，$C=75^\circ$

例8

(1) △ABC において，AB＝8，BC＝12，CA＝10 とし，BC の中点を M とする。このとき，$\cos A=$ ア $\boxed{\phantom{00}}$，AM＝ イ $\boxed{\phantom{00}}$ である。

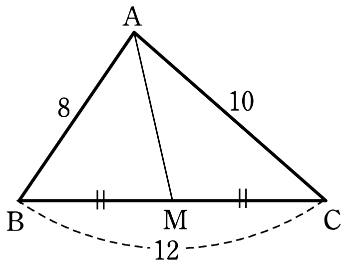
(2) △ABC において，AB＝4，BC＝5，CA＝6 とする。また，∠A の二等分線が辺 BCと交わる点を D とする。このとき，AD の長さを求めよ。

解説

△ABC において，余弦定理より

$$\cos A=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 10}={}^{ア}\frac{1}{8}$$

$$\cos B=\frac{8^2+12^2-10^2}{2\cdot 8\cdot 12}=\frac{9}{16}$$




△ABM において，余弦定理より

$$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}\cos B$$

$$=8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot\frac{9}{16}=46$$

AM$>0$ より，AM$={}^{イ}\sqrt{46}$

別解

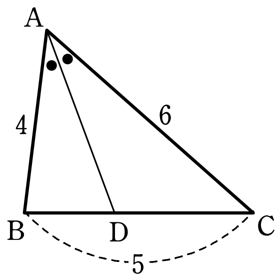
中線定理より

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

$$8^2+10^2=2(\mathrm{AM}^2+6^2)\quad\therefore\ \mathrm{AM}^2=46$$

AM$>0$ より，AM$=^{イ}\sqrt{46}$

(2) △ABC において，余弦定理より




$$\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8}$$

AD は ∠A の二等分線であるから，

角の二等分線の定理より

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:3$$

$$\mathrm{BD}=\frac{2}{2+3}\mathrm{BC}=\frac{2}{5}\cdot 5=2$$

△ABD において，余弦定理より

$$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B$$

$$=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{8}=18$$

AD$>0$ より，AD$=3\sqrt{2}$

例9

次の条件を満たす三角形 ABC はどのような三角形か。(1)，(2)，(3) それぞれの場合について，理由をつけて答えよ。ただし，三角形 ABC において，頂点 A，B，C に向い合う辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a$，$b$，$c$ で表す。また，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ $A$，$B$，$C$ で表す。

(1) $\dfrac{b}{\sin A}=\dfrac{a}{\sin B}$

(2) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$

(3) $\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}$

解説

三角形の形状問題は，辺か角だけの式に直して検討します。

(1) $\dfrac{b}{\sin A}=\dfrac{a}{\sin B}$

$a\sin A=b\sin B$

$R$ を△ABC の外接円の半径とすると，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

$$\therefore \sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

よって，

$$a\cdot\frac{a}{2R}=b\cdot\frac{b}{2R}$$

$$a^2-b^2=0$$

$$(a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$ より， $a=b$

したがって，△ABC は，BC＝CA の二等辺三角形

(2) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$

$a\cos B=b\cos A$

余弦定理より，

$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$$

$$a^2-b^2=0$$

$$(a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$ より， $a=b$

したがって，△ABC は，BC＝CA の二等辺三角形

(3) $\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos B}$

$a\cos A=b\cos B$

余弦定理より，

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$$

$$(a^2-b^2)c^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$$

$$(a+b)(a-b)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$$

$a+b=0$ より， $a=b,\ c^2=a^2+b^2$

したがって，

△ABC は，BC＝CA の二等辺三角形，または，∠C＝90° の直角三角形

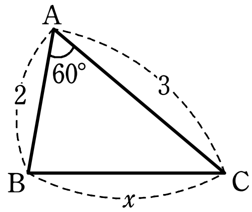
**確認問題1**

2辺の長さが2と3で，1つの角の大きさが60°であるような三角形がある。この三角形の残りの1辺の長さを求めよ。

(解説)

△ABCにおいて， $a=x, b=3, c=2$ とする。

(ⅰ) $A=60°$ のとき

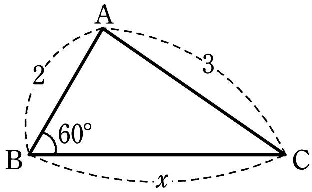



余弦定理より

$$x^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos60°=4+9-6=7$$

$x>0$ より， $x=\sqrt{7}$

(ⅱ) $B=60°$ のとき




余弦定理より

$$3^2=2^2+x^2-2\cdot2\cdot x\cos60°$$

$$x^2-2x-5=0$$

$x>0$ より， $x=1+\sqrt{6}$

(ⅲ) $C=60°$ のとき

余弦定理より

$$2^2=x^2+3^2-2\cdot x\cdot3\cos60°$$

$$x^2-3x+5=0$$

判別式を $D$ とすると

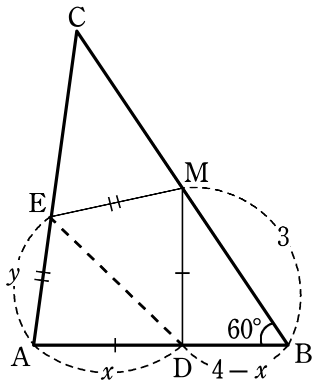
$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11<0$$

実数解をもたないので不適

(ⅰ)〜(ⅲ)より，残りの1辺の長さは，$\sqrt{7}$ , $1+\sqrt{6}$ 答

確認問題2
AB＝4，BC＝6，∠ABC＝60° の △ABCについて，辺 BCの中点を M とする。
(1)　cos∠ACB を求めよ。
(2)　辺 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E をとり，線分 DE を折り目として △ABCを折ると，頂点 A が M に重なるとき，MD，MEの長さを求めよ。

解説




(1) 余弦定理より

$$AC^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos60^\circ=28$$

AC＞0 より，$AC=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

△ABCにおいて，余弦定理より

$$\cos\angle ACB=\frac{(2\sqrt{7})^2+6^2-4^2}{2\cdot2\sqrt{7}\cdot6}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$ 答

(2) AD＝$x$，AE＝$y$ とおくと，

MD＝$x$，ME＝$y$，BD＝$4-x$，BM＝3

EC＝$2\sqrt{7}-y$，CM＝3

△BMD において，余弦定理より

$$x^2=(4-x)^2+3^2-2(4-x)\cdot3\cos60^\circ$$

$$x^2=x^2-8x+16+9-12+3x \quad \therefore\ x=\frac{13}{5}$$

よって，　$MD=\frac{13}{5}$

△CEM において，余弦定理より

$$y^2=(2\sqrt{7}-y)^2+3^2-2(2\sqrt{7}-y)\cdot3\cos\angle ACB$$

$$y^2=y^2-4\sqrt{7}\,y+37-6(2\sqrt{7}-y)\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7} \quad \therefore\ y=\frac{13\sqrt{7}}{16}$$

よって，　$ME=\frac{13\sqrt{7}}{16}$　答

確認問題3
次の条件を満たす三角形 ABC はそれぞれどのような三角形か．ただし，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ $c$，$a$，$b$ で表し，∠ABC，∠BCA，∠CAB の大きさをそれぞれ $B$，$C$，$A$ で表す．

(1)　$c\cos B-b\cos C=0$

(2)　$a^2\sin B\cos A-b^2\sin A\cos B=0$

解説

(1) $c\cos B-b\cos C=0$

余弦定理より

$$c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$$

$$(c^2+a^2-b^2)-(a^2+b^2-c^2)=0$$

$$c^2-b^2=0$$

$$(c+b)(c-b)=0$$

$c+b>0$ より，　$c=b$

よって，△ABC は，AB＝AC の二等辺三角形である　答

(2) $a^2\sin B\cos A-b^2\sin A\cos B=0$

△ABC の外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

また，余弦定理より，

$$a^2\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-b^2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=0$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)-b^2(c^2+a^2-b^2)=0$$

$$c^2a^2-a^4-b^2c^2+b^4=0$$

$$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$$

$$(a+b)(a-b)\{c^2-(a^2+b^2)\}=0$$

$a+b>0$ より，　$a=b, c^2=a^2+b^2$

よって，△ABC は，BC＝CA の二等辺三角形，または ∠C＝90° の直角三角形である　答