3.6　いろいろな面積(2)

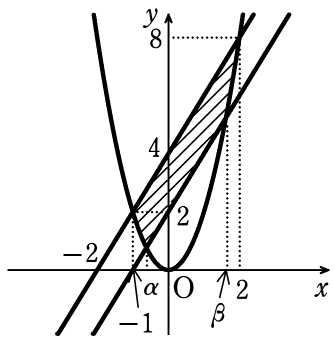
(1) いろいろな面積

　1/6 公式，1/12 公式，1/30 公式は様々な場面で利用できます。これらの公式を利用できる問題について考えます。まずは，放物線と直線が囲む図形の面積の問題です。

例1

$y \geqq 2x^2$，$2x+2 \leqq y \leqq 2x+4$ の領域の面積は $\boxed{}$ である．

(解説)



$y=2x^2$ と $y=2x+4$ の共有点の x 座標は

$$2x^2=2x+4$$

$$x^2-x-2=0 \quad \therefore\ x=-1,\ 2$$

$y=2x^2$ と $y=2x+2$ の共有点の x 座標は

$$2x^2=2x+2$$

$$x^2-x-1=0$$

の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする

求める面積 S は右図の斜線部分より

$$S=\int_{-1}^{2}(2x+4-2x^2)dx-\int_{\alpha}^{\beta}(2x+2-2x^2)dx$$

$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx+2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{3}\{2-(-1)\}^3-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{27-5\sqrt{5}}{3} \quad (\ \beta-\alpha=\sqrt{5}\ )$$

例2

放物線 C：$y=2x-x^2$ と直線 ℓ：$y=ax$ について，定数 a が $0<a<2$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2)　直線 ℓ が，放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を 2 等分するときの a の値を求めよ。

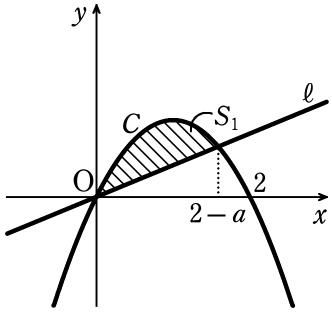
(解説)

(1) C と l の共有点の x 座標は

$2x-x^2=ax$

$x(x+a-2)=0 \quad \therefore x=0,\ 2-a$

求める面積を S_1 とすると



$$S_1=\int_0^{2-a}(2x-x^2-ax)dx$$

$$=-\int_0^{2-a}x\{x-(2-a)\}dx=\frac{(2-a)^3}{6}$$

(2) C と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\int_0^2(2x-x^2)dx$$

$$=-\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

$2S_1=S_2$ となるとき

$$2\cdot\frac{(2-a)^3}{6}=\frac{4}{3}$$

$$(2-a)^3=4$$

$$2-a=\sqrt[3]{4} \qquad \therefore a=2-\sqrt[3]{4}$$

例3

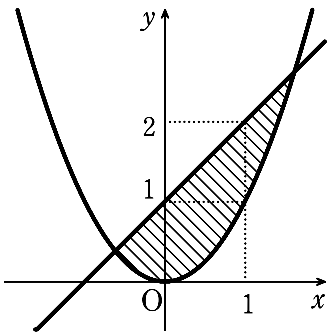
放物線 $y=x^2$ と点 $(1, 2)$ を通る直線とで囲まれる領域の面積の最小値を求めよ.

(解説)

点 $(1, 2)$ を通る直線の傾きを m とおくと

$y-2=m(x-1)$

$y=mx-m+2$



$y=x^2$ とこの直線の共有点の x 座標は

$x^2=mx-m+2$

$x^2-mx+m-2=0$

の 2 解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと, $y=x^2$ とこの直線で囲まれる図形の面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta(mx-m+2-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{m^2-4(m-2)}\right\}^3=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-2)^2+4}\right\}^3$$

$m=2$ のとき S は最小

最小値 $\dfrac{4}{3}$

次は放物線と放物線の囲む図形の面積です。

例4

(1) 2つの放物線 $y=-x^2+3x$, $y=x^2-x$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{}$ である。

(2) 関数 $y=x^2+1$ および $y=-x^2+2x+4$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

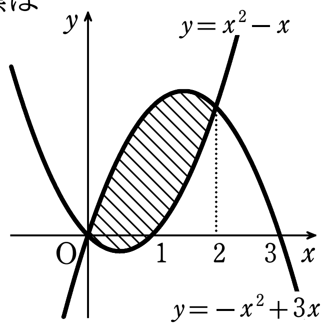
(1) $y=-x^2+3x$ と $y=x^2-x$ の共有点の x 座標は

$-x^2+3x=x^2-x$

$2x^2-4x=0$

$x(x-2)=0 \quad \therefore\ x=0,\ 2$

求める面積 S は図の斜線部より



$$S=\int_0^2\{(-x^2+3x)-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

$$=-2\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{1}{3}(2-0)^3=\frac{8}{3}$$

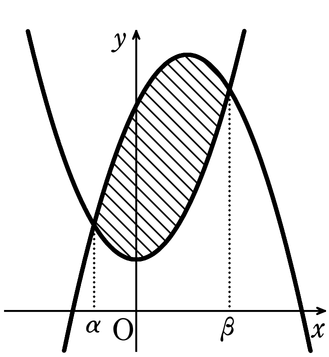
(2) $y=x^2+1$, $y=-x^2+2x+4$ の共有点の x 座標は

$x^2+1=-x^2+2x+4$

$2x^2-2x-3=0$

の2解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

求める面積 S は図の斜線部より



$$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x+4)-(x^2+1)\}dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{7\sqrt{7}}{3} \quad (\beta-\alpha=\sqrt{7})$$

次は 1/6 公式の面積パズルの問題です。1/6 公式がうまく使えるように，パーツを足し引きします。

例5

関数 $f(x)=|x^2-3x|-x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　直線 ℓ：$y=-x+k$ と $y=f(x)$ のグラフがちょうど 3 点を共有するとき，定数 k の値を求めよ。

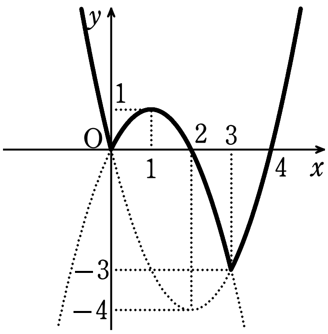
(3)　(2) で求めた k の値に対する直線 ℓ と $y=f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

(1) $f(x)=|x^2-3x|-x=\begin{cases} x^2-4x\ (x\leqq 0,\ 3\leqq x) \\ -x^2+2x\ (0<x<3) \end{cases}$

$=\begin{cases} (x-2)^2-4\ (x\leqq 0,\ 3\leqq x) \\ -(x+1)^2+1 \end{cases}$

グラフは下図



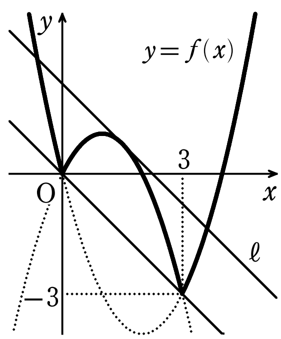
(2) 直線 ℓ と $y=f(x)$ が 3 点を共有するのは，
直線 ℓ が $y=-x^2+2x$ と接するときで

$-x^2+2x=-x+k$

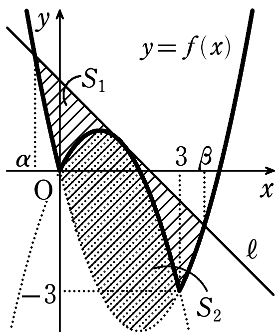
$x^2-3x+k=0$

が重解をもてばよいから，
判別式を D として $D=0$ となればよい

$D=9-4k=0\quad \therefore\ k=\dfrac{9}{4}$



(3) ℓ：$y=-x+\dfrac{9}{4}$ のとき，



ℓ と $y=x^2-4x$ で囲まれた部分の面積を S_1，

$y=x^2-4x$ と $y=-x^2+2x$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，求める面積 S は

$$S=S_1-S_2$$

ℓ と $y=x^2-4x$ の共有点の x 座標は

$$-x+\frac{9}{4}=x^2-4x$$

$$4x^2-12x-9=0$$

この 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\left(-x+\frac{9}{4}\right)-(x^2-4x)\right\}dx-\int_0^3\{(-x^2+2x)-(x^2-4x)\}dx$$

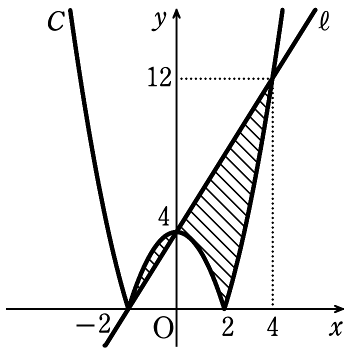
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx+2\int_0^3 x(x-3)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{3}(3-0)^3=9\sqrt{2}-9$$

例6 曲線 C：$y=\lvert x^2-4\rvert$ と直線 ℓ：$y=2x+4$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

(解説)

$$y=\lvert x^2-4\rvert=\begin{cases}x^2-4\ (x\leqq-2,\ x\geqq2)\\ -x^2+4\ (-2<x<2)\end{cases}$$



曲線 C と直線 ℓ は右の図のようになり，

それらの交点の x 座標は，

$\lvert x^2-4\rvert=2x+4$ の解であるから

$$x=-2,\ 0,\ 4$$

l と $y=x^2-4$ で囲まれた部分の面積を S_1，

$y=x^2-4$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2，

l と $y=-x^2+4$ で囲まれた部分の面積を S_3 とすると

求める面積 S は

$$S=S_1-(2S_2-S_3)+S_3$$

$$=S_1-2S_2+2S_3$$

$$=\int_{-2}^{4}\{(2x+4)-(x^2-4)\}dx+2\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$$

$$+2\int_{-2}^{0}\{(-x^2+4)-(2x+4)\}dx$$

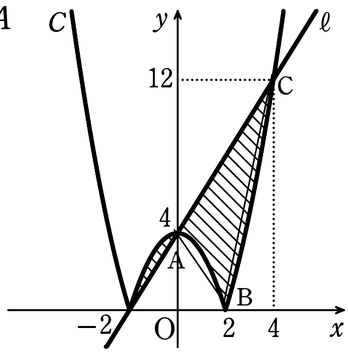
$$=-\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx+2\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)dx-2\int_{-2}^{0}x(x+2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3-\frac{1}{3}\{2-(-2)\}^3+\frac{1}{3}\{0-(-2)\}^3$$

$$=36-\frac{64}{3}+\frac{8}{3}=\frac{52}{3}$$

別解

$y=-x^2+4$ と $y=-2x+4$ で囲まれた部分を A
$y=x^2-4$ と $y=6x-12$ で囲まれた部分を B
とする



A の面積を S_1，B の面積を S_2 とすると

$$S_1=\int_{0}^{2}\{(-x^2+4)-(-2x+4)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{2}x(x-2)dx=\frac{2^3}{6}$$

$$S_2=\int_{2}^{4}\{(6x-12)-(x^2-4)\}dx$$

$$=-\int_{2}^{4}(x-2)(x-4)dx=\frac{2^3}{6}$$

$S_1=S_2$ であるから，B の部分を A の部分に移して，
斜線部の $x \geqq 0$ の部分の面積は図の △ABC の面積に等しいから
求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{0}\{(-x^2+4)-(2x+4)\}dx+\frac{1}{2}|2\cdot4-(-2)\cdot12|$$

$$=\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3+16=\frac{52}{3}$$

注 放物線と直線で囲まれた部分の面積は，放物線の 2 次の項の係数の絶対値と，共有点の x 座標の差のみに依存します。本問のような状況の問題は，A と B を結ぶ放物線と B と C を結ぶ放物線の 2 次の項の係数の絶対値が等しく，A と B，B と C の x 座標の差が等しいので，斜線部の $x \geqq 0$ の部分は △ABC の面積と等しくなります。

例7
kを実数とする。関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる3点を共有している。これらで囲まれた2つの部分の面積の和を S とする。

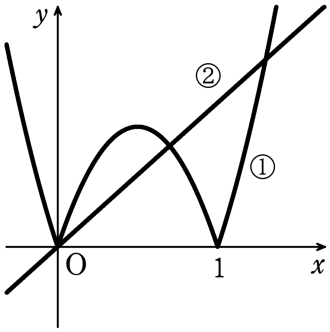
(1)　kの値の範囲を求めよ。

(2)　Sを kの式で表せ。

(3)　Sが最小になるときの kの値を求めよ。

(解説)

(1) $y=|x(x-1)|=\begin{cases} x^2-x & (x\leqq 0,\ 1\leqq x) \\ -x^2+x & (0<x<1) \end{cases}$



$y=kx$ は原点を通り，傾き kの直線である

$y=-x^2+x$ と $y=kx$ が接するとき

$-x^2+x=kx$

$x\{x-(1-k)\}=0$

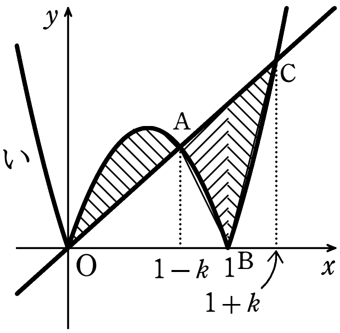
が重解 $x=0$ をもてばよいから

$1-k=0 \quad \therefore k=1$

よって，求める kの値の範囲は

$0<k<1$

(2) 求める面積 Sは右図の斜線部である



AとBの x座標の差＝BとCの x座標の差であるから，

$y=-x^2+x$ と線分ABが囲む図形の面積と

$y=x^2-x$ と線分BCが囲む図形の面積は等しい

よって，斜線部の $x\geqq 1-k$ の部分の面積は

△ABCの面積に等しいから

$$S=\int_0^{1-k}\{(-x^2+x)-kx\}dx$$

$$+\frac{1}{2}|k\cdot\{-(1-k)\cdot(-k)\}-(-k)\cdot(1+k)\cdot k|$$

$$=-\int_0^{1-k}x\{x-(1-k)\}dx+|k^2|$$

$$=\frac{1}{6}(1-k)^3+k^2=-\frac{1}{6}k^3+\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}$$

(3) $S'=-\frac{1}{2}k^2+3k-\frac{1}{2}$

$S'=0$ のとき，$k=3-2\sqrt{2}$

Sの増減表は下図

k	0	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，Sは$k=3-2\sqrt{2}$のとき最小となる

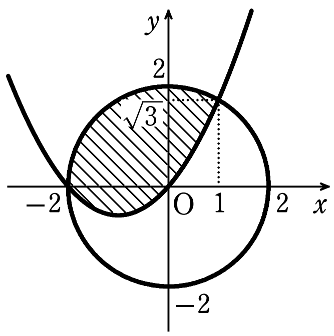
次は放物線と円が囲む図形の面積です。

例8

2つの不等式$\sqrt{3}\,y \geqq x^2+2x,\ x^2+y^2 \leqq 4$が定める図形の面積を求めよ.

(解説)

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x^2+2x)$と$x^2+y^2=4$の共有点は



$$x^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2+2x)\right\}^2=4$$

$$x^4+4x^3+7x^2-12=0$$

$$(x-1)(x+2)(x^2+3x+6)=0$$

$$\therefore\ x=1,\ -2$$

$$\therefore\ (1,\ \sqrt{3}),\ (-2,\ 0)$$

与えられた不等式の表す領域は右図の斜線部

ただし，境界線上の点を含む

$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3}),\ \mathrm{B}(-2,\ 0)$とすると，

$\mathrm{AB}:\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$，　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2\pi}{3}$であるから

求める面積をSとすると

$$S=\int_{-2}^{1}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)-\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2+2x)\right\}dx+\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{18}\{1-(-2)\}^3+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}$$

例9

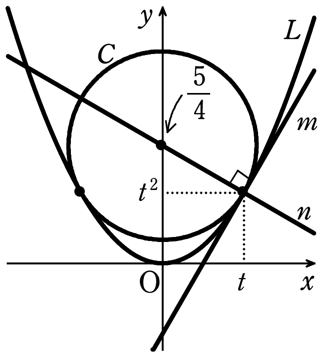
放物線 L：$y=x^2$ と点 R$\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$を中心とする円 C が異なる 2 点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1)　2 つの接点の座標を求めよ。

(2)　円 C の方程式を求めよ。

(3)　2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

解説



(1) $f(x)=x^2$ とおくと $f'(x)=2x$

L の $x=t\ (t \neq 0)$ における法線は

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

これが R を通るとき

$$\frac{5}{4}=t^2+\frac{1}{2}$$

$$t^2=\frac{3}{4}\qquad \therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

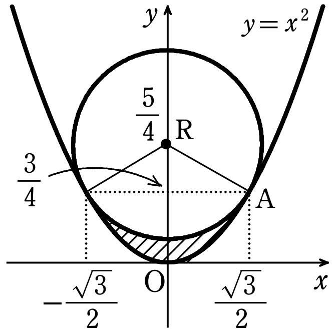
よって，求める接点の座標は$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

(2)　点 R$\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$と点$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$の距離は 1 より，円 C の方程式は

$$x^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=1$$

(3) 右の図のように，接点をA とすると

$$\angle \mathrm{ORA}=\frac{\pi}{3}$$



求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{4}-x^2\right)dx$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\ =\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$

確認問題1

xy 平面上に，2 つの放物線 C_1：$y=x^2+a$ (a は $a>0$ を満たす定数)，C_2：$y=x^2$ がある。C_1 上の点 $(t,\ t^2+a)$ (t は任意の実数) における接線を ℓ とし，ℓ と C_2 で囲まれる部分の面積を S とする。

(1)　ℓ の方程式を求めよ。

(2)　ℓ と C_2 は t の値によらず異なる 2 点で交わることを示せ。

(3)　S は t の値によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ。

解説

(1) $f(x)=x^2+a$ とおくと，$f'(x)=2x$

接線 ℓ の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^2+a)=2t(x-t) \qquad \therefore\ y=2tx-t^2+a$$

(2) ℓ と C_2 の共有点の x 座標は

$$x^2=2tx-t^2+a \qquad \therefore\ x^2-2tx+t^2-a=0 \ \cdots①$$

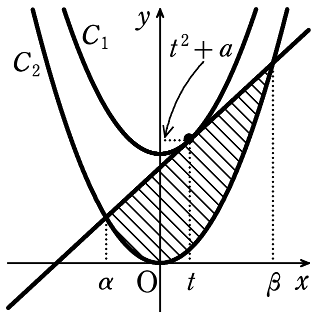
この判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=t^2-1\cdot(t^2-a)=a>0$$

①は異なる 2 つの実数解をもつから

ℓ と C_2 は異なる 2 点で交わる

(3) ①の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと



$$S=\int_\alpha^\beta(2tx-t^2+a-x^2)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，$\beta-\alpha=2\sqrt{D/4}=2\sqrt{a}$ より

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{a})^3=\frac{4a\sqrt{a}}{3}\ (一定)$$

注 $\beta-\alpha=$一定というところがポイントです。

確認問題2

xy 平面上に，3 つの放物線 C_1 : $y=-x^2$，C_2 : $y=-x^2+2$，C_3 : $y=x^2+ax+b$ (a，b は実数) があり，C_3 は C_1 とただ 1 つの共有点をもちながら動く。

(1)　b を a で表せ。

(2)　C_2 と C_3 は常に 2 点で交わることを示せ。

(3)　C_2 と C_3 で囲まれる部分の面積を S とすると，S は常に一定であることを示し，その値を求めよ。

解説

(1) C_3 と C_1 の共有点の x 座標は

$$-x^2=x^2+ax+b$$

$$2x^2+ax+b=0$$

C_3 と C_1 はただ 1 つの共有点をもちながら動くから，
判別式を D_1 として，$D_1=0$ となればよい

$$D_1=a^2-4\cdot 2b=a^2-8b=0 \quad \therefore b=\frac{a^2}{8}$$

(2) C_2 と C_3 の共有点の x 座標は

$$-x^2+2=x^2+ax+b$$

$$2x^2+ax+b-2=0 \cdots ①$$

①の判別式を D_2 とすると

$$D_2=a^2-4\cdot 2(b-2)=a^2-8b+16=a^2-8\cdot\frac{a^2}{8}+16=16 \quad \cdots\cdots ②$$

$D_2>0$ より，①は異なる 2 実解をもつから
C_2 と C_3 は常に異なる 2 点で交わる。

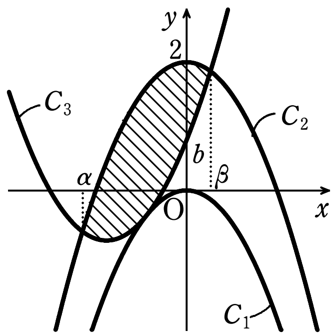
(3) ①の 2 実解を α, β ($\alpha<\beta$) とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2-(x^2+ax+b)\}dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{D}}{2}=2$ より

$$=-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\cdot 2^3=\frac{8}{3} \text{ (一定)}$$



確認問題3

放物線 C：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通り，Pにおける C の接線と直交する直線を L とする。ただし，t は正の実数とする。

(1)　L の方程式を求めよ。

(2)　L と C とで囲まれた部分の面積を S とする。t が正の実数全体を動くとき，S の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

(解説)

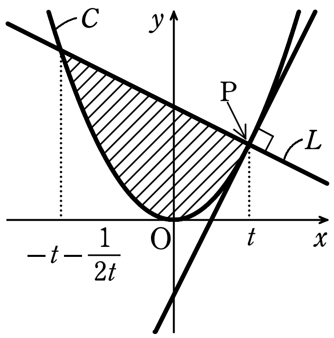
(1) $f(x)=x^2$ とおくと，$f'(x)=2x$

直線 L の方程式は

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t) \quad \therefore\ y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

(2) C と L の共有点の x 座標は



$$x^2=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$$

$$x^2+\frac{1}{2t}x-t\left(t+\frac{1}{2t}\right)=0$$

$$(x-t)\left(x+t+\frac{1}{2t}\right)=0 \quad \therefore\ x=t,\ -t-\frac{1}{2t}$$

よって

$$S=\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}\left(-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}-x^2\right)dx$$

$$=-\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}(x-t)\left(x+t+\frac{1}{2t}\right)dx=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3$$

$t>0$ であるから相加相乗平均より

$$2t+\frac{1}{2t}\geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}=2$$

等号成立は，$2t=\dfrac{1}{2t}$ すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき

このとき，S は最小値 $\dfrac{1}{6}\cdot 2^3=\dfrac{4}{3}$ をとる

確認問題4

実数 a に対して，$f(x)=x^2$，$g_a(x)=-(x-a)^2+a$ とする。

(1)　xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g_a(x)$ が共通点をもつための必要十分条件は ${}^{ア}\boxed{} \leqq a \leqq {}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　a が ${}^{ア}\boxed{} < a < {}^{イ}\boxed{}$ の範囲を動くとき，2つの曲線で囲まれる部分の面積は $S_a=\dfrac{\left(\sqrt{{}^{ウ}\boxed{}a^2+{}^{エ}\boxed{}a}\right)^{{}^{オ}\boxed{}}}{{}^{カ}\boxed{}}$ である。

(3)　$a={}^{キ}\boxed{}$ のとき，S_a は最大値 $\dfrac{{}^{ク}\boxed{}}{{}^{ケ}\boxed{}}$ をとる。

(解説)

(1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^2=-(x-a)^2+a$$

$$2x^2-2ax+a^2-a=0 \cdots ①$$

これが実数解をもてばよいから，

判別式を D として $D\geqq 0$ となればよい

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot(a^2-a)=-a(a-2)\geqq 0$$

$$a(a-2)\leqq 0 \quad \therefore {}^{ア}0\leqq a\leqq {}^{イ}2$$

(2) ①の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$S_a=\int_\alpha^\beta\left[\{-(x-a)^2+a\}-x^2\right]dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}$$

ここで，$\beta-\alpha=\sqrt{D/4}=\sqrt{-a^2+2a}$ より

$$S_a=\frac{\left(\sqrt{{}^{ウ}-1\cdot a^2+{}^{エ}2a}\right)^{{}^{オ}3}}{{}^{カ}3}$$

(3) $S_a=\dfrac{\left(\sqrt{-(a-1)^2+1}\right)^3}{3}$

よって，S_a は $a={}^{キ}1$ のとき最大値 $\dfrac{{}^{ク}1}{{}^{ケ}3}$ をとる