第4章　集合と論理

4.1　集合と論理(1)

(1) **命題と条件**

　数学では，正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を**命題**といいます。例えば，「長方形は平行四辺形である。」や「素数はすべて奇数である。」や「 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ 」は，正しいか正しくないかが明確に定まるので命題です。それに対して，「みかんは，甘い。」や「100 は大きい数である。」は，人の主観により正しいか正しくないかが異なり，明確に定まらないので命題ではありません。命題が正しいとき，その命題は**真**である，あるいは**成り立つ**といい，正しくないとき，その命題は**偽**である，あるいは**成り立たない**といいます。
命題が真であることを示すには，それが正しいことを証明し，偽であることを示すには，**反例**(成り立たない例)を 1 つ挙げます。例えば，
「長方形は平行四辺形である。」は真，
「素数はすべて奇数である。」は偽 (反例 2)，
「 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ 」は偽です。
ここで注意しておきたいのは，「長方形は平行四辺形である。」という命題は，「すべての」長方形は平行四辺形であるということであり，例外があってはなりません。例外があればそれが反例になります。
　命題には「すべての実数 x について $x^2 \geqq 0$ である。」のように，文字を含む文や式もあります。この命題は真です。それに対して，文字 x を含む文や式でも「 x は正の数である。」のように，x に値を代入しないと真偽が定まらないものは命題ではありません。しかし，x のとる範囲を定め，x に値を代入すると，例えば，$x=1$ のときは真， $x=-1$ のときは偽，というように，文や式が真偽が定まる命題になるものがあります。このような文や式を**条件**といいます。条件を考える場合には，考察の対象とするもの全体の集合を明確にしておきます。この集合をその条件の**全体集合**といいます。今後，条件を p, q 等の文字で表すことにし，それを満たすもの全体の集合を P, Q 等と表すことにします。

例1

次の命題の真偽を述べ，偽の場合は反例を示せ．

(1)　2 つの無理数の和は無理数である．

(2)　面積の等しい正三角形は合同である．

(3)　x と y は実数とする．$|x|+|y|=0$ であれば $x=y=0$ である．

(4)　x と y は実数とする．$|x|=|y|$ であれば $x=y$ である．

(5)　m と n は整数とする．積 mn が偶数であれば m も n もともに偶数である．

解説

(1) 偽

(反例) $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$

(2) 真

(証明)

2 つの正三角形の 1 辺の長さを，それぞれ a, b ($a, b>0$)とすると，
面積が等しいから

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$a^2=b^2 \quad a^2-b^2=0 \quad (a+b)(a-b)=0$$

$a>0, b>0$ であるから，$a+b>0$ より，$a-b=0$　$\therefore a=b$

よって，2 つの正三角形の 1 辺の長さが等しいから，
これらは合同である

(3) 真

(証明)

$|x|\geqq 0$，$|y|\geqq 0$ より，

$|x|+|y|=0$ のとき，$|x|=|y|=0$

よって，$x=y=0$ である

(4) 偽

(反例) $x=1$，$y=-1$

(5) 偽

(反例) $m=2$，$n=3$

一般に，命題の真偽が不明であるとき，命題が真であることを示すのは，反例を見つけるよりも難しいことが多いので，命題の真偽を判定する問題では，反例がないかを考えるとよい。

(2) 命題の否定

命題 p に対して，命題「 p でない」を命題 p の**否定**といい $\overline{p}$ と表します。任意の命題 p に対して， p であるか，p でないかのどちらかが成り立ち (真となり) ます。これを**排中律** (中間 (グレーゾーン) の第 3 の命題は排するという法則) といいます。つまり，

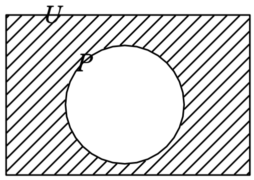
命題 p が真であるとき，命題 $\overline{p}$ は偽

命題 p が偽であるとき，命題 $\overline{p}$ は真

となります。例えば「 2 は素数である」という命題は真ですが，その否定「 2 は素数でない」という命題は偽(真)です。

(3) 条件の否定

条件 p に対して，条件「 p でない」を条件 p の**否定**といい， $\overline{p}$ と表します。 $\overline{\overline{p}}$ ，すなわち $\overline{p}$ の否定は p です。



全体集合を U とし，条件 p を満たすもの全体の集合を P とすると， $\overline{p}$ を満たすもの全体の集合は，P の補集合 $\overline{P}$ です。例えば x を整数として，「 x は偶数である」の否定は「 x は奇数である」，さらに，「 x は奇数である」の否定は元の条件「 x は偶数である」となる。

(4) 全称命題･特称命題

全称命題とは，すべてのものがある条件を満たすという形式の命題のことです。例えば，上の「長方形は平行四辺形である。」という命題は，「(すべての)長方形は平行四辺形である。」という命題なので，全称命題です。それに対して，**特称命題** (**存在命題**) とは，ある条件を満たすものが存在するという形式の命題のことです。

「長方形は平行四辺形である。」のように，命題は「すべての」が省略されていることが多い。「すべての○○」という意味の命題であれば，全称命題として扱わなければなりません。

全称命題「すべてのものが条件 p を満たす。」の否定は，

「条件 p を満たさないものが存在する。」

となり，特称命題になります。

特称命題「条件 p を満たすものが存在する。」の否定は，

「すべてのものが条件 p を満たさない。」

となり，全称命題になります。

例2
$-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で，関数 $f(x)=x^2+2x-2$，$g(x)=-x^2+2x+a+1$ について，次の命題が成り立つような a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

(1)　すべての x に対して，$f(x)<g(x)$

(2)　ある x に対して，$f(x)<g(x)$

(3)　すべての組 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

(4)　ある組 x_1, x_2 に対して，$f(x_1)<g(x_2)$

解説

(1) まず，1 つの x を選んで， $-2\leqq x\leqq 2$ におけるすべての x に対して，常に $f(x)<g(x)$ ，すなわち， $g(x)-f(x)>0$ となればよいから，

$$g(x)-f(x)=-x^2+2x+a+1-(x^2+2x-2)$$
$$=-2x^2+a+3=F(x)$$ とおくと

$F(-2)>0$ かつ $F(2)>0$ となればよい

($F(x)$ は， $x=-2$ または $x=2$ で最小値をとる)

$F(-2)=a-5>0$　　$\therefore a>5$

$F(2)=a-5>0$　　$\therefore a>5$

よって， $a>5$

(2) まず，1 つの x を選んで， $f(x)<g(x)$ ，すなわち， $g(x)-f(x)>0$ となる $-2\leqq x\leqq 2$ における x が 1 つでも存在すればよいから，

$F(0)>0$ となればよい

($F(x)$ は $x=0$ で最大値をとる)

$F(0)=a+3>0$　　$\therefore a>-3$

よって， $a>-3$

(3) まず， x の組 (x_1,x_2) を 1 組選んで， $-2\leqq x\leqq 2$ におけるすべての x の組(x_1,x_2) に対して， $f(x_1)<g(x_2)$ となるとき，

($f(x)$ の最大値)<($g(x)$ の最小値)となればよい

$f(x)=(x+1)^2-3\,(-2\leqq x\leqq 2)$ の最大値は $f(2)=6$

$g(x)=-(x-1)^2+a+2\,(-2\leqq x\leqq 2)$ の最小値は $f(-2)=a-7$ より

$6<a-7$　　$\therefore a>13$

(4) まず， x の組 (x_1,x_2) を 1 組選んで， $f(x_1)<g(x_2)$ となる $-2\leqq x\leqq 2$ における x の組(x_1,x_2) が 1 組でも存在すればよいから，

($f(x)$ の最小値)<($g(x)$ の最大値)となればよい

$f(-1)<g(1)$

$-3<a+2$　　$\therefore a>-5$

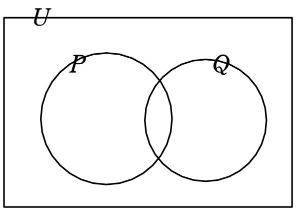
例3
次の命題の否定を作り，その真偽を判定せよ。
(1) すべての実数 x, y について $x^2+y^2 \geqq 0$
(2) ある実数 x について $x^2-x+1>0$

(解説)

(1) ある実数 x, y について $x^2+y^2<0$　偽
(2) すべての実数 x について $x^2-x+1 \leqq 0$　偽
確認のために，
(1) のもとの命題は真であり，その否定は偽です。
(2) のもとの命題は真であり，その否定は偽です。
任意の命題 p に対して，p であるか，p でないかが成り立っています。

(5) または・かつ

2 つの数があれば，その間に足し算，引き算，掛け算，割り算などの演算が定義できるのと同じように，2 つの条件があれば，その間に演算を定義することができます。
条件 p, q に対し，
　p と q の少なくとも一方を満たす条件を，条件「p または q」
　p と q の両方を満たす条件を，条件「p かつ q」
と定義します。
全体集合を U とし，条件 p, q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P, Q とすると，
p または q を満たすもの全体の集合は，$P\cup Q$
p かつ q を満たすもの全体の集合は，$P\cap Q$ です。



「p または q」の否定は，
ド･モルガンの法則から $\overline{P\cup Q}=\overline{P}\cap\overline{Q}$ より，
「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」です。
「p かつ q」の否定は，
ド･モルガンの法則から $\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$ より，
「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」です。

例4

次の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

条件 (ア)〜(シ) を次のようにおく．

(ア)　$a=0$ かつ $b=0$　　(イ)　$a=0$ かつ $b \neq 0$

(ウ)　$a \neq 0$ かつ $b=0$　　(エ)　$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$

(オ)　$a=0$ または $b=0$　　(カ)　$a=0$ または $b \neq 0$

(キ)　$a \neq 0$ または $b=0$　　(ク)　$a \neq 0$ または $b \neq 0$

(ケ)　すべての実数 x について $ax+b=0$

(コ)　すべての実数 x について $ax+b \neq 0$

(サ)　ある実数 x について $ax+b=0$

(シ)　ある実数 x について $ax+b \neq 0$

このとき，空欄にあてはまる語句を上の (ア)〜(シ) から選べ．

(a)　条件 (ア) の否定は $\boxed{}$ である．

(b)　条件 (ケ) の否定は $\boxed{}$ である．

解説

(a)「$a=0$　かつ　$b=0$」の否定は「$a \neq 0$　または　$b \neq 0$」　(ク)

(b)「すべての実数 x について $ax+b=0$」の否定は

「ある実数 x について $ax+b \neq 0$」　(シ)

確認問題1
次の命題について，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。
(1)　有理数と有理数の和は有理数である。
(2)　無理数と無理数の和は無理数である。
(3)　無理数と無理数の積は無理数である。
(4)　無理数の無理数乗は無理数である。

解説

(1) 真

(証明)

2 つの有理数を $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$ (b，d は自然数，a，c は整数) とする

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$ad+bc$ は整数，bd は自然数であるから，$\frac{ad+bc}{bd}$ は有理数である

(2) 偽

(反例) $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の和は0で有理数である

(3) 偽

(反例) $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の積は-2で有理数である

(4) 偽

(反例) $\sqrt{2}$ の $\log_2 9$ 乗は3で有理数である

確認問題2
実数，虚数，複素数に関する命題として正しいものを下の選択肢からすべて選べ。
[選択肢]
A. 実数は複素数でない。
B. 複素数でない虚数が存在する。
C. 虚数でない複素数が存在する。
D. α が虚数ならば，α^2 は負の実数である。
E. α，β がともに虚数ならば，和 $\alpha+\beta$ は虚数である。
F. α，β がともに複素数ならば，和$\alpha+\beta$ は複素数である。
G. α，β がともに虚数ならば，積 $\alpha\beta$ は虚数である。
H. α，β がともに複素数ならば，積 $\alpha\beta$ は複素数である。
I. α が虚数ならば，積 $\alpha\beta$ が正の実数となる虚数 β が存在する。

(解説)
A. 実数は複素数であるから，正しくない
B. 虚数は複素数であるから，正しくない
C. 正しい。例えば，1 は虚数でない複素数である。
D. 正しくない。例えば，$1+i$ は虚数であるが，$(1+i)^2$，すなわち，$2i$ は負の実数ではない。
E. 正しくない。例えば，$1+i$，$1-i$ はともに虚数であるが，$(1+i)+(1-i)$，すなわち，2 は虚数ではない。
F. 正しい。実数 a，b，c，d に対し，$a+bi$ と $c+di$ の和は $(a+c)+(b+d)i$ となり，複素数である。
G. 正しくない。例えば，i，$-i$ はともに虚数であるが，$i\times(-i)$ すなわち 1 は虚数ではない。
H. 正しい。実数 a，b，c，d に対し，$a+bi$ と $c+di$ の積は $(ac-bd)+(ad+bc)i$ となり，複素数である。
I. 正しい。$1+i$ は虚数であり，$1-i$ との積 2 は正の実数である。
よって，命題として正しいものは，C，F，H，I