3.2　三角比(2)

(1) 三角比の相互関係

一般に，次の公式が成り立ちます。これらは，θ の値によらず常に成り立ちます。

三角比の相互関係

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

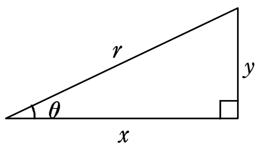
(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(3) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(1) 右図より，

$y=r\sin\theta,\ x=r\cos\theta$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$



(2) 三平方の定理より，

$x^2+y^2=r^2$

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2$

$\therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

ここで，$(\sin\theta)^2=\sin^2\theta,(\cos\theta)^2=\cos^2\theta,(\tan\theta)^2=\tan^2\theta$ と表します。

(3) $1+\tan^2\theta=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

例1

(1) 角 θ が鋭角で，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ であるという。$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

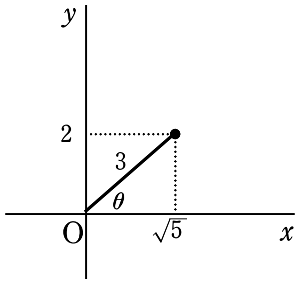
(2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．ただし，$0°<\theta<180°$ とする．

(3) $0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。$\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を求めよ。

解説

(1) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ ，θ は鋭角であるから，

三角比の定義より



$$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

別解

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\frac{4}{9}+\cos^2\theta=1 \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{5}{9}$$

θ は鋭角であるから， $\cos\theta>0$ より

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

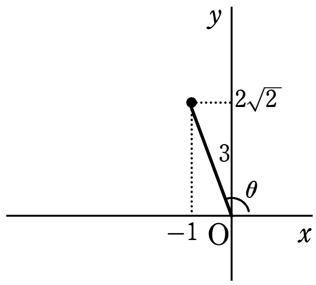
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{3},0°<\theta<180°$ より

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \tan\theta=-2\sqrt{2}$$

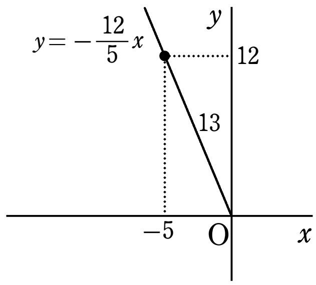
これも(1)と同様に三角比の相互関係を用いてもできます



(3) $\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$ ，$0°\leqq\theta\leqq180°$ より

$\tan\theta$ ＝直線の傾きに注意して，

$$\sin\theta=\frac{12}{13},\ \cos\theta=-\frac{5}{13}$$



別解

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ より

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\frac{144}{25} \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{25}{169}$$

$\tan\theta<0$ であるから， $90°<\theta<180°$ より

$\cos\theta<0$ となるから

$\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

例2
$0°\leqq\theta\leqq180°$ で $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の値を求めよ。
(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$
(4)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$　　(5)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

両辺 2 乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{5}{4}$　…… ①

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，　$\sin\theta\geqq0$

$\sin\theta\cos\theta<0$ より，　$\cos\theta<0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから，

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(3)
$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\frac{9\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}\sin^3\theta-\cos^3\theta&=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\frac{7\sqrt{5}}{16}\end{aligned}$$

(5) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-8$$

例3

(1) $0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin\theta+2\cos\theta=2$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$

両辺 2 乗して，

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}\qquad\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$$

$\sin\theta$, $\cos\theta$ を 2 解とする 2次方程式の 1 つは,

$$x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta=0$$

$$x^2-\frac{1}{5}x-\frac{12}{25}=0$$

$$25x^2-5x-12=0$$

$$(5x+3)(5x-4)=0\qquad\therefore\ x=-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

$0°<\theta<180°$ であるから， $\sin\theta>0$ より

$$(\sin\theta,\cos\theta)=\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$$

よって,

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$$

別解

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{5}-\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\sin^2\theta+\left(\frac{1}{5}-\sin\theta\right)^2=1$$

$25\sin^2\theta-5\sin\theta-12=0$

$(5\sin\theta+3)(5\sin\theta-4)=0$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから， $\sin\theta\geqq0$ より， $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{5}-\sin\theta$ より， $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

よって

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{4}{3}$

(2) $\sin\theta+2\cos\theta=2$ より， $\sin\theta=2(1-\cos\theta)$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$4(1-\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$4(1-\cos\theta)^2-(1-\cos^2\theta)=0$

$4(1-\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)=0$

$(1-\cos\theta)\{4(1-\cos\theta)-(1+\cos\theta)\}=0$

$(1-\cos\theta)(3-5\cos\theta)=0$

$\therefore\ \cos\theta=1,\ \dfrac{3}{5}$

例4

(1) $\dfrac{1}{\tan\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ を最も簡単にせよ.

(2) $0°\leqq\theta\leqq180°$ で $\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき， $\dfrac{1-2\cos^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}$ の値を求めよ。

(3) θ が $0°<\theta<90°$ の範囲で $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=6$ を満たすとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ.

解説

(1) 与式 $=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta-1}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\dfrac{1}{\sin\theta}$

(2) 与式 $=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\theta}-2}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}+2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{(1+\tan^2\theta)-2}{(1+\tan^2\theta)+2\tan\theta}$

$=\dfrac{(\tan\theta+1)(\tan\theta-1)}{(\tan\theta+1)^2}$

$=\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}=-\dfrac{1}{5}$

$\tan\theta$ の値が分かっているので，そこから $\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めて，代入してもよい。

(3) $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}=6$ より

$\dfrac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=6$

$\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=6 \quad \therefore \sin^2\theta=\dfrac{2}{3}$

$0° < \theta < 90°$ であるから， $\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

また，

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=3$

$1+\tan^2\theta=3 \quad \therefore \tan^2\theta=2$

$0° < \theta < 90°$ であるから， $\tan\theta > 0$ より

$\tan\theta=\sqrt{2}$

(2) 余角の公式・補角の公式

　鋭角に対し，合わせて直角となる角をその角の**余角**といい，平角(180°) より小さい角度をもつ角に対し，合わせて平角となる角をその角の**補角**といいます。ここでは，余角，すなわち， $90°-\theta$ の三角比と，補角，すなわち， $180°-\theta$ の三角比について考えます。

余角の公式

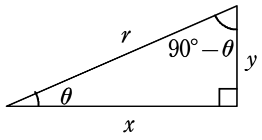
(1) $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

(2) $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

(3) $\tan(90°-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

右図において，

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r}$$



また，$90°-\theta$の角を左下にもってきて考えて，

$$\sin(90°-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta$$

$$\cos(90°-\theta)=\frac{y}{r}=\sin\theta$$

$$\tan(90°-\theta)=\frac{\sin(90°-\theta)}{\cos(90°-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

補角の公式

(1) $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

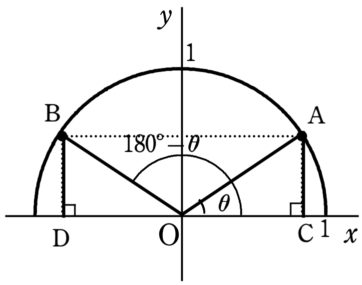
(2) $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

(3) $\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

図のように単位円を描き，単位円上に
x軸の正の向きと $\theta, 180°-\theta$ をなすように
2 点 A, B をとると，

A $(\cos\theta, \sin\theta)$，

B $(\cos(180°-\theta), \sin(180°-\theta))$



となります。

また，$\triangle\mathrm{OCA}\equiv\triangle\mathrm{ODB}$であるから，

B $(-\cos\theta, \sin\theta)$

とも表せるので，

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(180°-\theta)=\frac{\sin(180°-\theta)}{\cos(180°-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

例5

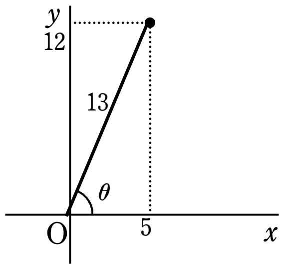
(1) 角 θ について，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$，$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ とするとき，

$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{\text{ア}\boxed{}}{\text{イ}\boxed{}}$，$\tan(180^\circ-\theta)=\dfrac{\text{ウ}\boxed{}}{\text{エ}\boxed{}}$ である。

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin(180^\circ-\theta)+\cos(180^\circ-\theta)+\tan(90^\circ-\theta)$ の値を求めよ。

解説

(1) $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$, $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より



$$\cos\theta=\frac{5}{13},\ \tan\theta=\frac{12}{5}$$

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta=\frac{5}{13}$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta=-\frac{12}{5}$$

(2) $\sin\theta=\dfrac{1}{5}$, $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5},\ \tan\theta=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\text{与式}=\sin\theta-\cos\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}+2\sqrt{6}=\frac{1+8\sqrt{6}}{5}$$

(3) 三角比を含む方程式・不等式・関数

例6

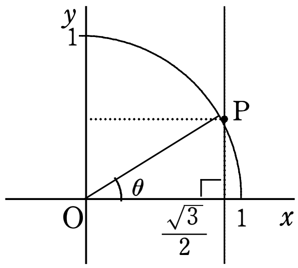
(1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるとき，θ を求めよ。

(2) 方程式 $2\cos x=-1$ の，$0^\circ \leqq x < 180^\circ$ の範囲の解を求めよ。

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で，$\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の範囲は $\boxed{}$ である.

解説

(1) 単位円上に点 P をとり，x 軸の正の向きとOP のなす角を θ とすると，P$(\cos\theta, \sin\theta)$ より $\cos\theta=$P の x 座標であるから，単位円上 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ の点 P の中で，その x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような P をとって，そのときの θ を求めればよい。図の P は，三平方の定理より P$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ であるから，$\theta=30^\circ$

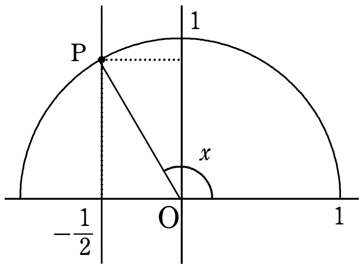


(2) $2\cos x=-1$

$\therefore \cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq x < 180^\circ$ より

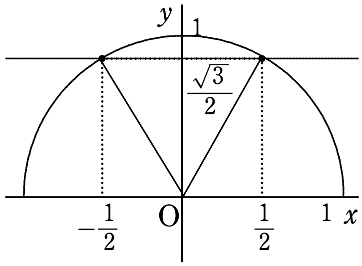
$x=120^\circ$



(3) $\sin\theta$ =P の y 座標であるから，単位円上 $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の点 P の中で，その y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より小さくなるような P とそのときの θ の範囲を求めればよい。

図より，

$0^\circ \leqq \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta \leqq 180^\circ$



例7

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき，$\dfrac{3-(5+\sqrt{3})\cos^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=-\sqrt{3}\cos\theta$ ならば，$\tan\theta$ $=$ ア $\boxed{}$ であり，$\theta=$ イ $\boxed{}^\circ$ となる。

解説

$$\frac{3-(5+\sqrt{3})\cos^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=-\sqrt{3}\cos\theta$$

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ であるから，$\cos\theta \neq 0$ より

$$\frac{\dfrac{3}{\cos\theta}-(5+\sqrt{3})\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=-\sqrt{3}$$

$$\frac{\dfrac{3}{\cos^2\theta}-(5+\sqrt{3})}{\tan\theta+1}=-\sqrt{3}$$

$$3(1+\tan^2\theta)-(5+\sqrt{3})=-\sqrt{3}(\tan\theta+1)$$

$$3\tan^2\theta+\sqrt{3}\tan\theta-2=0$$

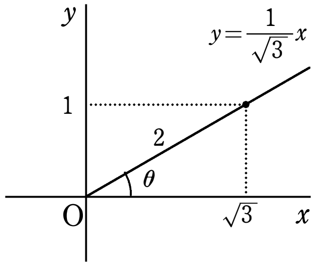
$$(\sqrt{3}\tan\theta+2)(\sqrt{3}\tan\theta-1)=0$$

$0° \leqq \theta < 90°$ であるから， $\tan\theta > 0$ より

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\tan\theta$ =OPの傾きより，

$\theta=30°$



例8 (1) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$2\cos^2\theta+\cos\theta=0$ を満たす θ の値を求めよ． (2) $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$ を満たす θ の値を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする． (3) $90° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．$2\cos^2\theta+11\sin\theta-7=0$ を満たす θ の値を求めよ． (4) $0 < A < 90°$ のとき，方程式 $\tan A-\dfrac{1}{\tan A}-2=0$ を満たす A の値を求めよ。

解説

(1) $2\cos^2\theta+\cos\theta=0$

$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

$\therefore \cos\theta=0, -\dfrac{1}{2}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より

$\theta=90°$，$120°$

(2) $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$

$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$(\sin\theta-1)(2\sin\theta-1)=0$

$\therefore\ \sin\theta=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より

　$\theta=30°,\ 90°,\ 150°$

(3) $2\cos^2\theta+11\sin\theta-7=0$

$2(1-\sin^2\theta)+11\sin\theta-7=0$

$2\sin^2\theta-11\sin\theta+5=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-5)=0$

$90°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから，$0\leqq\sin\theta\leqq 1$ より

　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \theta=150°$

(4) $\tan A-\dfrac{1}{\tan A}-2=0$

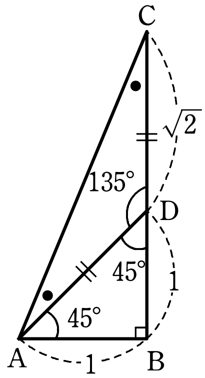
$\tan^2 A-2\tan A-1=0$

$0<A<90°$ であるから，$\tan A>0$ より

　$\tan A=1+\sqrt{2}$

右図より

　$A=45°+22.5°=67.5°$



例9

(1) $0°<\theta<180°$ のとき，不等式 $2\sin^2\theta+3\cos(180°-\theta)>0$ を解け。

(2) 不等式 $2\sin^2\theta-\cos\theta-1\leqq 0$ を満たす θ を $0°\leqq\theta\leqq 180°$ の範囲で求めると $\boxed{}$ である.

(3) $90°<\theta<180°$ のとき，$2\cos\theta-3\tan\theta>0$ を満たす θ の値の範囲は $\boxed{}$ となる.

解説

(1) $2\sin^2\theta+3\cos(180°-\theta)>0$

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta>0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2<0$

$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)<0$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから， $-1<\cos\theta<1$ より

$-1<\cos\theta<\dfrac{1}{2}\quad\therefore 60^\circ<\theta<180^\circ$

(2) $2\sin^2\theta-\cos\theta-1\leqq 0$

$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta-1\leqq 0$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1\geqq 0$

$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\geqq 0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから， $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より

$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1\quad\therefore 0^\circ\leqq\theta\leqq 60^\circ,\ \theta=180^\circ$

(3) $2\cos\theta-3\tan\theta>0$

$2\cos\theta-3\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ であるから， $\cos\theta<0$ より

$2\cos^2\theta-3\sin\theta<0$

$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ であるから， $0<\sin\theta<1$ より

$\dfrac{1}{2}<\sin\theta<1\quad\therefore 90^\circ<\theta<150^\circ$

3 行目で $\cos^2\theta\ (\geqq 0)$ (2 乗すればどんな実数も 0 以上)をかけてもよい。

例10

関数 $f(\theta)=\sqrt{3}\cos\theta-\sin^2\theta+2\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ は，$\theta=$ ア $\boxed{}$ のとき最小値 イ $\boxed{}$， $\theta=$ ウ $\boxed{}$ のとき最大値 エ $\boxed{}$ をとる．

(解説)

$f(\theta)=\sqrt{3}\cos\theta-\sin^2\theta+2$

$=\sqrt{3}\cos\theta-(1-\cos^2\theta)+2$

$=\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta+1$

$t=\cos\theta$ とおくと，

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから， $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より， $-1\leqq t\leqq 1$

$f(\theta)=t^2+\sqrt{3}\,t+1=g(t)$ とおくと，

$$g(t)=\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最小

最小値　$g\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

このとき，

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore\ \theta=150^\circ$$

$t=1$ のとき最大

最大値　$g(1)=2+\sqrt{3}$

このとき，

$$\cos\theta=1 \quad \therefore\ \theta=0^\circ$$

確認問題1

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin\theta+\cos\theta$，$\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}$ の値を求めよ。ただし，θ は第 1 象限の角とする。

解説

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\cdot\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$$

θ は第 1 象限の角であるから，$\sin\theta>0, \cos\theta>0$ より，

$\sin\theta+\cos\theta>0$

よって

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

また

$$\begin{aligned}\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}&=\frac{1}{\tan\theta}+\tan\theta\\&=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\&=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$ 答

確認問題2

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{13}{27}$ $(90°<\theta<180°)$ のとき，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ。

解説

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{13}{27}$ より

$$(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{13}{27}$$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$$

ここで，$a=\sin\theta+\cos\theta, b=\sin\theta\cos\theta$ とおくと

$$a^3-3ab=\frac{13}{27} \cdots ①$$

$$a^2-2b=1 \cdots ②$$

②より，$b=\dfrac{a^2-1}{2} \cdots ③$

①に代入して

$$a^3-3a\cdot\frac{a^2-1}{2}=\frac{13}{27}$$

$$27a^3-81a+26=0$$

$$(3a-1)(9a^2+3a-26)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{3}, \frac{1\pm\sqrt{105}}{6}$$

$90°<\theta<180°$ であるから，$\sin\theta>0, \cos\theta<0$ より，$b<0$

③と $b<0$ より，$a=\dfrac{1}{3}$

このとき，$b=-\dfrac{4}{9}$

$\sin\theta, \cos\theta$ を 2 解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}=0$$

$$9x^2-3x-4=0 \quad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$$

$\sin\theta>0, \cos\theta<0$ より，

$$(\sin\theta, \cos\theta)=\left(\frac{1+\sqrt{17}}{6}, \frac{1-\sqrt{17}}{6}\right)$$ 答

$\boxed{\text{別解}}$

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，

$$t=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)\ (\text{三角関数の合成})$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ であるから， $135^\circ<\theta+45^\circ<225^\circ$ より，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin(\theta+45^\circ)<\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ -1<t<1$$

$$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{13}{27}$ より

$$(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{13}{27}$$

$$t^3-3\cdot\frac{t^2-1}{2}\cdot t=\frac{13}{27}$$

あとは同様

確認問題3

(1) $\sin 140^\circ + \cos 130^\circ + \tan 120^\circ$ はいくらか。

(2) $\cos 160^\circ - \cos 110^\circ + \sin 70^\circ - \sin 20^\circ$ を簡単にせよ.

解説

(1) 与式 $= \sin(180^\circ - 40^\circ) + \cos(180^\circ - 50^\circ) - \sqrt{3}$

$= \sin 40^\circ - \cos 50^\circ - \sqrt{3}$

$= \sin 40^\circ - \cos(90^\circ - 40^\circ) - \sqrt{3}$

$= \sin 40^\circ - \sin 40^\circ - \sqrt{3}$

$= -\sqrt{3}$ 　答

(2) 与式 $= -\cos 20^\circ + \cos 70^\circ + \sin 70^\circ - \sin 20^\circ$

$= -\sin 70^\circ + \sin 20^\circ + \sin 70^\circ - \sin 20^\circ$

$= 0$ 　答