1.4　順列(2)

(1) 順列の様々な問題

順列の様々な問題について考えていきます。

例1
5 個の数字 1，2，3，4，5 の中の異なる 3 個の数字を 1 列に並べて 3 桁の整数をつくる。
(1)　3 桁の整数は全部で何通りできるか。
(2)　偶数は全部で何通りできるか。
(3)　3 の倍数は全部で何通りできるか。
(4)　6 の倍数は全部で何通りできるか。
(5)　7 の倍数は全部で何通りできるか。

解説

(1) ${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$ (通り)

(2) 一の位から数を入れて， 一の位に来れるのは 2, 4 の 2 通り，
次に百の位，十の位と順に数を入れて，

$2\cdot4\cdot3=24$ (通り)

(3) 3 の倍数になるとき，各位の数の和が 3 の倍数になればよい。
その組合せは，(1，2，3)，(1，3，5)，(2，3，4)，(3，4，5)
そのそれぞれについて 3 桁の整数は 3! 通り作れるから

$4\cdot3!=24$ (通り)

(4) (3) のうち，一の位が偶数のものを考えればよい。

$2\cdot1\cdot2\cdot1+2\cdot2\cdot1=8$ (通り)

(5) 3 桁の整数を $100a+10b+c$ ($1\leqq a, b, c\leqq5$)とすると

$$\begin{aligned}100a+10b+c &=(7\cdot14+2)a+(7+3)b+c\\ &=7(14a+b)+2a+3b+c\end{aligned}$$

よって，$2a+3b+c$ が 7 の倍数となればよい
$6\leqq2a+3b+c\leqq30$ より，係数の大きい方から数を入れて，
$b=1$ のとき，$(a, c)=(3, 5), (4, 3)$
$b=2$ のとき，これを満たす (a, c) は存在しない
$b=3$ のとき，$(a, c)=(2, 1), (5, 2)$
$b=4$ のとき，$(a, c)=(2, 5)$
$b=5$ のとき，$(a, c)=(1, 4)$ の 6 (通り)

例2
URBANの5文字を並べるとき
(1)　並べ方は全部で何通りあるか.
(2)　AとBが隣り合わないような並べ方は何通りあるか.
(3)　AがBより左にあり，かつBがUより左にあるような並べ方は何通りあるか.

解説

(1) $5!=120$ 通り
(2) A と B が隣り合うような並べ方は，
ABを1つのかたまりとみて，異なる4つのものの並べ方考え，
BA という並びがあることにも注意して，
$4!\cdot 2!=48$ 通り
よって，A と B が隣り合わないような並べ方は
$120-48=72$ 通り
(3) 文字を並べる5ケ所から A, B, U を並べる3ケ所を選び，$_5C_3$ 通り
そこに，左から順に A, B, U を並べ，1通り
他の2ケ所に R, N を並べて，
$_5C_3\times 1\times 2!=20$ 通り

例3
4人の男子A，B，C，Dと3人の女子X，Y，Zの合計7人が1列に並ぶ並び方について，次のことがいえる。
(1)　女子3人が続いて並ぶ並び方は，全部で $\boxed{}$ 通りある。
(2)　男子が両端に並ぶ並び方は，全部で $\boxed{}$ 通りある。
(3)　男子と女子が交互に並ぶ並び方は，全部で $\boxed{}$ 通りある。
(4)　男子が少なくとも2人隣り合う並び方は，全部で $\boxed{}$ 通りある。

解説

(1) 女子3人を1つのかたまりとみて，5人の並べ方と考え，
女子3人の並びがあることにも注意して，
$5!\cdot 3!=720$ 通り
(2) まず，両端に男子を並べて，$_4P_2$ 通り
残り5人のを1列に並べて，

$_4P_2 \cdot 5! = 1440$ 通り

(3) まず，男子 4 人を 1 列に並べて，$4!$ 通り
その間に 3 人の女子を入れればよいから，

$4! \cdot 3! = 144$ 通り

(4) 男子が少なくとも 2 人隣り合うの否定は，
男子が誰も隣り合わないであるから，

$7! - 144 = 4896$ 通り

(2) 同じものを含む順列

a, a, b, c の 4 文字を 1 列に並べる配列の総数を考えます。a に a_1, a_2 と区別があれば $4!$ 通りですが，a には区別がないので，この $4!$ 通りは，それぞれ a_1, a_2 の並べ方の $2!$ 通りずつ重複しています。よって，求める配列の総数は，$\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りとなります。

また，a, a, b, b, c の 5 文字を 1 列に並べる配列の総数は，a に a_1, a_2，b に b_1, b_2 と区別があれば $5!$ 通りですが，a と b にはそれぞれ区別がなく，この $5!$ 通りは，それぞれ a_1, a_2 の並べ方それぞれに対して，b_1, b_2 の並べ方の $2! \times 2!$ 通りずつ重複しているので，求める配列の総数は，

$\dfrac{5!}{2!2!} = 30$ 通りとなります。

一般に，次のことが成り立ちます。

同じものを含む順列

n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，…とするとき，これら n 個のものの順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad (\text{ただし，} p+q+r+\cdots=n)$$

例4

RIKKYO の 6 文字を全部並べてできる順列を考える．異なる並べ方は ア$\boxed{}$ 通りである．KYO という並びを含む並べ方は イ$\boxed{}$ 通りである．2 つの K が隣同士にならない並べ方は ウ$\boxed{}$ 通りである．

解説

(ア) $\dfrac{6!}{2!}=360$ (通り)

(イ) KYO で 1 つのかたまりと考えて，$4!=24$ (通り)

(ウ) 2 つの K が隣同士に並ぶ並べ方は，KK を 1 つのかたまりとみて

$5!=120$ (通り)

よって

$360-120=240$ (通り)

例5

5 個の文字 A，A，B，B，X を横 1 列に並べる。ただし，同じ文字どうしは区別しないものとする。

(1)　この並べ方は $^{ア}\boxed{}$ 通りある。

(2)　A と A が隣り合うような並べ方は $^{イ}\boxed{}$ 通りある。

(3)　A と A が隣り合い，かつ，B と B も隣り合うような並べ方は $^{ウ}\boxed{}$ 通りある。

(4)　A と A が隣り合わず，かつ，B と B も隣り合わないような並べ方は $^{エ}\boxed{}$ 通りある。

(5)　X より右側と左側にそれぞれ 1 つずつ A があるような並べ方は $^{オ}\boxed{}$ 通りある。(例：AXBAB)

解説

(1) $\dfrac{5!}{2!2!}={}^{ア}30$ (通り)

(2) AA を 1 つのかたまりとみて，

$\dfrac{4!}{2!}={}^{イ}12$ (通り)

(3) AA と BB をそれぞれ 1 つのかたまりとみて，

$3!={}^{ウ}6$ (通り)

(4) A と A が隣り合うことを A，B と B が隣り合うことを B とすると

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(U)-n(A\cup B)$

ここで，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=12\cdot2-6=18$ (通り)

より

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=30-18=12$ (通り)

(5) 文字を並べる 5 箇所から A, X, A を並べる 3 ケ所を選び,
左から順に A, X, A と並べ，残りに B を並べればよいから,

${}_5C_3\cdot1\cdot1=10$ (通り)

(3) **重複順列**

これまでは，異なるものを並べる順列について考えましたが，ここでは，同じものを繰り返し使ってもよい順列について考えます。一般に，異なる n 個のものから，重複を許して r 個を取り出して並べる順列の総数について，次のことが成り立ちます。

重複順列
異なる n 個のものから，重複を許して r 個を取り出して並べる順列の総数は n^r

例6
数字 1，2，3 を使ってできる次のような整数の個数を求めよ。ただし，同じ数字を重複して使ってよいものとする。
(1) 5桁の整数
(2) 5桁の整数で2の倍数
(3) 5桁の整数で3の倍数
(4) 5桁の整数で4の倍数
(5) 5桁の整数で6の倍数

(解説)

(1) $3^5=243$ (個)

(2) 一の位は 2 のみ，他の位は 1, 2, 3 すべて使えるから

$3^4=81$ (個)

(3) 上 4 桁が同じとき，****1，****2，****3 のうちのいずれかが 3 の倍数になるから

$3^4=81$ (個)

(4) 下 2 桁が 4 の倍数，すなわち，12，32 となればよいから

$2\times3^3=54$ (個)

(5) 一の位の数字は 2 であるから，****2 の形をした数で，各桁の数字の和が 3 の倍数であればよい。
****の部分は 3 で割ったときに 1 余る整数であり，上3桁が同じとき，***1，***2，***3 のうちいずれかが 3 で割ったときに 1 余る整数になるから

$3^3 = 27$ (個)

例7

5 桁 (けた) の正の整数で，各桁の数字が 2，3，4 のいずれかであるものを考える。

(1)　4 の倍数となるものは，全部で ${}^{ア}\boxed{}$ 個ある。

(2)　2，3，4 のうち，ちょうど 2 種類の数字が現れているものは，全部で ${}^{イ}\boxed{}$ 個ある。

(3)　2，3，4 の 3 種類の数字がすべて現れているものは，全部で ${}^{ウ}\boxed{}$ 個ある。

(4)　各桁の数字 5 個の総和が 13 となるものは，全部で ${}^{エ}\boxed{}$ 個ある。

(解説)

(1) 下 2 桁が 4 の倍数，すなわち，24，32，44 となればよいから

$3 \times 3^3 = {}^{ア}81$ (個)

(2) 2 種類の数字の選び方が ${}_3C_2$ 通り，
それらを少なくとも 1 回ずつ使って 5 桁の正の整数を作る方法は，

$2^5 - 2$ 通り

よって

${}_3C_2 \cdot (2^5 - 2) = {}^{イ}90$ (個)

(3) $3^5 - {}_3C_2 \cdot (2^5 - 2) - 3 = 243 - 90 - 3 = 150$ (個)

(4) 和が13となる組合せは

$(2, 2, 2, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3)$

より

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!2!} = 20 + 10 = 30 \text{ (個)}$$

(4) その他の順列

同一のルールのもと n 個のものを並べる並べ方は，隣接する $n-1$ 個のものの並べ方， $n-2$ 個のものの並べ方， …を用いて関係式(これを漸化式といいます)を作り，それを利用して求めることがあります。
詳しくは数列の範囲で学びますが，ここでも少し考えてみます。

例8
10 段ある階段を登るのに一度に 1 段または 2 段登るとする。この 10 段を登りきる方法は全部で $^{ア}\boxed{}$ 通りある。このうち 7 段目を踏まない登り方は $^{イ}\boxed{}$ 通りである。

(解説)
(ア) n 段の階段を登りきる方法を a_n 通りとすると，

$a_1=1, a_2=2$

また， $n \geqq 3$ のとき，
n 段目にくるのは $n-2$ 段目からと $n-1$ 段目からであるから，

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2} (n \geqq 3)$

$n=3, 4, \cdots, 10$ と代入して

$a_3=a_2+a_1=2+1=3$,

$a_4=5, a_5=8, a_6=13, a_7=21, a_8=34, a_9=55, a_{10}=89$

よって，89 通り
(イ) 6 段目までいって，6 段目から 2 段登り，8 段目から 10 段目まで登る登り方より，

$a_6 \cdot 1 \cdot a_2=13 \cdot 1 \cdot 2=26$ 通り

本問では，最後の 1 手で漸化式を作りましたが，最初の 1 手で漸化式を作った方がよいこともあります。確認問題6 を参照して下さい。

例9
1，2，3，4，5 の順列 a_1， a_2， a_3， a_4， a_5 のうちで，$a_1=2$， $a_2 \neq 2$， $a_3 \neq 3$， $a_4 \neq 4$， $a_5 \neq 5$ を全部満たすものは何通りあるか．また，$a_1 \neq 1$， $a_2 \neq 2$， $a_3 \neq 3$， $a_4 \neq 4$， $a_5 \neq 5$を全部満たすものは何通りあるか．

(解説)
後半の順列は**完全順列**や**攪乱順列**と呼ばれるものです。そして，この問題は**モンモールの問題**と呼ばれています。

$1, 2, \cdots, n$ の順列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ のうちで， $a_1 \fallingdotseq 1, a_2 \fallingdotseq 2, \cdots, a_n \fallingdotseq n$ を全部満たすものの総数を $D(n)$ とすると，

$D(2)=1, D(3)=2$

$a_1=2$ のとき，

$a_2=1$ のとき， a_3 から a_n まで条件を満たすように並べ，$D(n-2)$ 通り

$a_2 \fallingdotseq 1$ のとき， a_2 から a_n まで条件を満たすように並べ，$D(n-1)$ 通り

$a_1=3, 4, \cdots, n$ のときも同様なので，

$D(n)=(n-1)\{D(n-1)+D(n-2)\}\ (n \geqq 4)$

よって

$D(4)=3\{D(3)+D(2)\}=3(2+1)=9$

$D(5)=4\{D(4)+D(3)\}=4(9+2)=44$

前半は，

$a_2=1$ のとき， $D(3)=2$ 通り

$a_2=1$ のとき， $D(4)=9$ 通り

よって，2+9=11通り

後半は， $D(5)=44$ 通り

確認問題1

0，1，2，3，4，5から異なる4つの数字を取り出して4桁の数を作るとき，偶数は$^{ア}\boxed{}$通り，4の倍数は$^{イ}\boxed{}$通りできる。

(解説)

(ア) 一の位が偶数となればよいから，一の位が0の場合と2,4の場合で分けて考えて，

$5\cdot4\cdot3+2\cdot4\cdot4\cdot3=156$ 通り　答

(イ) 下2桁が4の倍数となればよいから，下2桁が

04，12，20，24，32，40，52

となればよい

0が入る場合と入らない場合で分けて考えて，

$3\cdot4\cdot3+4\cdot3\cdot3=72$ 通り　答

確認問題2

6人の生徒A，B，C，D，E，Fが横1列に並ぶ。

(1)　AとBが隣り合う並び方は$\boxed{}$通りある。

(2)　BとCが隣り合わない並び方は$\boxed{}$通りある。

(3)　AとBが隣り合い，かつ，BとCが隣り合わない並び方は$\boxed{}$通りある。

(解説)

(1) ABを1つのかたまりと考え，ABの並びがあることにも注意して，

$5!\cdot2!=240$ 通り　答

(2) 全体からB, Cが隣り合う並び方をひいて，

$6!-5!\cdot2!=480$ 通り　答

(3) AとBが隣り合うことをA，BとCが隣り合うことをBとすると，

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$

$n(A\cap B)$は，ABC，CBAを1つのかたまりと考え，

$n(A\cap\overline{B})=240-4!\cdot2=192$ 通り　答

確認問題3
アルファベットの文字C，U，L，T，U，R，Eが1文字ずつ書かれた7枚のカードがある。これらのカードから5枚とり出して1列に並べる方法は全部で $\boxed{}$ 通りある。

(解説)

(i) Uを2枚使うとき
U2枚とU以外の5枚から3枚を選んで並べるから，

$${}_5C_3\cdot\frac{5!}{2!}=600 \text{ 通り}$$

(ii) 異なる5枚を使うとき
6種類から5種類を選んで並べるから，

$${}_6C_5\cdot 5!=720 \text{ 通り}$$

(i)，(ii)より

$$600+720=1320 \text{ 通り}$$ 答

確認問題4
1，1，2，2，3，3という6つの数字を1列に並べる。
(1)　相異なる並べ方は全部で何通りあるか。
(2)　同じ数字が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(解説)

(1) $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)　答

(2) 6つの数字のすべての並べ方を U，その部分集合として，
2つの1が隣り合う並べ方を A，2つの2が隣り合う並べ方を B，
2つの3が隣り合う並べ方を C とする
求める並べ方の数は $n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ より，

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)$$

ここで，

$$n(A\cap B\cap C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=3\cdot\frac{5!}{2!2!}-3\cdot\frac{4!}{2!}+3!=90-36+6=60$$

よって

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=90-60=30 \text{ (通り)}$$ 答

確認問題5

3種の文字 a, b, c をくり返し用いて n 個の文字からなる列をつくるとき，a, b, c がすべて含まれている列は $\boxed{}$ 通りである。次に，4種の文字 a, b, c, d を用いて同じように n 個の文字からなる列をつくるとき，a, b, c, d がすべて含まれている列は $\boxed{}$ 通りである。

解説

(前半)

$3^n - {}_3\mathrm{C}_2\cdot(2^n-2) - 3 = 3^n - 3\cdot 2^n + 3$ 通り　答

(後半)

$4^n - {}_4\mathrm{C}_3\cdot(3^n - 3\cdot 2^n + 3) - {}_4\mathrm{C}_2\cdot(2^n-2) - 4 = 4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4$ 通り　答

確認問題6

碁石を n 個1列に並べる並べ方のうち，黒石が先頭で白石どうしは隣り合わないような並べ方の総数を a_n とする。ここで，$a_1=1$，$a_2=2$ である。このとき，a_{10} を求めよ。

解説

$n+2$ 個の碁石を並べるとき，最初の1手で考えて，

　黒|黒*…*　　は a_{n+1} 通り

　黒白|黒*…*　は a_n 通り

のいずれかとなるので，

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n \geqq 1)$$

より

$$a_3=3,\ a_4=5,\ a_5=8,\ a_6=13,\ a_7=21,\ a_8=34,\ a_9=55,\ a_{10}=89$$

よって，89通り　答