第3章　積分法

3.1　不定積分

(1) 導関数と不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち

$F'(x)=f(x)$

となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**不定積分**または**原始関数**といいます。

例えば，$(x^3)'=3x^2$ であるから，x^3 は $3x^2$ の不定積分です。また，$(x^3+5)'=3x^2, (x^3-2)'=3x^2$ であるから，x^3+5, x^3-2 も $3x^2$ の不定積分です。このことからも分かるように，$3x^2$ の不定積分は無数にあるが，その違いは定数の部分だけです。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，任意の定数 C に対して

$\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$

となるから，$F(x)+C$ もまた $f(x)$ の 1 つの不定積分です。

逆に，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の不定積分は次の形で表されます。

$F(x)+C$　(ただし，C は定数)

ここで，$G(x)$ を $f(x)$ の任意の不定積分とすると

$F'(x)=f(x), G'(x)=f(x)$

であるから

$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$

$G(x)-F(x)=C$　(C は定数)

$\therefore G(x)=F(x)+C$

と表されます。

関数 $f(x)$ の不定積分を記号 $\int f(x)dx$ で表します。

注 記号 $\int$ は積分，またはインテグラルと読みます。

関数 $f(x)$ の不定積分について，次のようになります。

不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき，$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C は定数）

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する**といい，上の定数 C を**積分定数**といいます。

関数を積分するときは，微分法の逆を考えます。

$(x)'=1, \left(\frac{1}{2}x^2\right)'=x, \left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$ であるから，

$\int 1dx=x+C$　（C は積分定数）

$\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$　（C は積分定数）

$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$　（C は積分定数）

一般に，n が 0 以上の整数のとき，

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$ であるから，次の公式が成り立ちます。

関数 x^n（n は 0 以上の整数）の不定積分

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$　（C は積分定数）

関数 x^n の不定積分の公式において，$n=0$ のとき $\int x^0dx$ は $\int 1dx$ を意味します。また，$\int 1dx$ は $\int dx$ とも表します。今後，特に断らなくても，C は積分定数を表すものとします。

(2) 不定積分の性質

関数 $f(x)$, $g(x)$ の不定積分の 1 つをそれぞれ $F(x)$, $G(x)$ とするとき，$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ であるから，k を定数とすると

$\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$

$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$

すなわち，$kF(x)$ は $kf(x)$ の 1 つの不定積分であり，$F(x)+G(x)$ は $f(x)+g(x)$ の 1 つの不定積分であるから，次の等式が成り立ちます。

不定積分の性質 (線形性)
k, l は定数とする

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

2. $\displaystyle\int\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\displaystyle\int\{kf(x)+lg(x)\}dx = k\int f(x)dx + l\int g(x)dx$

3 において， $k=1, l=-1$ とすると

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

が得られます。

注 不定積分の等式では，各辺の積分定数を適当に定めると，その等式が成り立つことを意味しています。

例1

(1) $\displaystyle\int x(9x-4)dx = {}^{ア}\boxed{}\,x^3 - {}^{イ}\boxed{}\,x^2 + C$ (ただし，C は積分定数) である。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int 2x(x^2+2)^2dx$ を求めよ。

解説

(1) $\displaystyle\int x(9x-4)dx = \int(9x^2-4x)dx$

$$= \int 9x^2dx - \int 4xdx$$

$$= 9\int x^2dx - 4\int xdx$$

$$= {}^{ア}3x^3 - {}^{イ}2x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2) $\displaystyle\int 2x(x^2+2)^2dx = 2\int(x^5+4x^3+4x)dx$

$$= 2\left(\frac{x^6}{6}+x^4+2x^2\right)+C$$

$$= \frac{1}{3}x^6+2x^4+4x^2+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

例2

(1) $f'(x)=2x-1$，$f(2)=4$ を満たすとき，$f(0)$ の値を求めよ。

(2) $F'(x)=3(x-1)(x-3)$，$F(1)=5$ を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(3) 関数 $F(x)$ について，$F'(x)=(2x+3)^2$, $F(0)=4$ が成り立つとき，$F(x)$ を求めよ．ただし，$F'(x)$ は $F(x)$ の導関数とする．

解説

(1) $f'(x)=2x-1$ より

$$f(x)=\int(2x-1)dx=x^2-x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$f(2)=4$ より

$$2^2-2+C=4 \quad \therefore C=2$$

よって

$$f(x)=x^2-x+2$$

したがって，$f(0)=2$

(2)
$$\begin{aligned}F(x)&=\int\{3(x-1)(x-3)\}dx\\&=\int(3x^2-12x+9)dx\\&=x^3-6x^2+9x+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$F(1)=5$ より

$$C+4=5 \quad \therefore C=1$$

よって

$$F(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

(3) $F'(x)=(2x+3)^2$ より

$$\begin{aligned}F(x)&=\int(2x+3)^2dx\\&=\frac{(2x+3)^3}{6}+C \quad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$F(0)=4$ より

$$\frac{9}{2}+C=4 \quad \therefore C=-\frac{1}{2}$$

よって

$$F(x)=\frac{(2x+3)^3}{3\cdot2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{3}x^3+6x^2+9x+4$$

注 $\{(ax+b)^{n+1}\}'=(n+1)(ax+b)^n\cdot a$ であるから，

$$\left\{\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}\right\}'=(ax+b)^n \text{ より}$$

$$\int(ax+b)^n dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+C$$

例3

x の 2 次関数 $f(x)$ およびその原始関数 $F(x)$ が次の等式を満たすとき，$F(x)$ を求めよ．

$$x^2f'(x)+F(x)=14x^3+6x^2+3x+5$$

(解説)

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと

$$f'(x)=2ax+b$$

$$F(x)=\int f(x)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d \quad (d\text{ は積分定数})$$

より

$$x^2f'(x)+F(x)=x^2(2ax+b)+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+d$$

$$=\frac{7}{3}ax^3+\frac{3}{2}bx^2+cx+d$$

よって

$$\frac{7}{3}ax^3+\frac{3}{2}bx^2+cx+d=14x^3+6x^2+3x+5$$

これが恒等式となるとき

$$\frac{7}{3}a=14,\ \frac{3}{2}b=6,\ c=3,\ d=5 \qquad \therefore a=6,\ b=4,\ c=3,\ d=5$$

したがって

$$F(x)=2x^3+2x^2+3x+5$$

例4

$f(x)$，$g(x)$ は多項式で表された関数で，次の条件を満たすとする．

(a)　$f(-1)=3$，$g(1)=4$

(b)　$\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=6x-1$，$\dfrac{d}{dx}\{2f(x)-3g(x)\}=-8x+13$

このとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ．

(解説)

(b)より

$f'(x)+g'(x)=6x-1$ …①

$2f'(x)-3g'(x)=-8x+13$ …②

①，②より

$f'(x)=2x+2,\ g'(x)=4x-3$

$f'(x)=2x+2$ より

$f(x)=\int(2x+2)dx=x^2+2x+a$ （a は積分定数）

$f(-1)=3$ より

$(-1)^2+2\cdot(-1)+a=3 \quad \therefore a=4$

よって

$f(x)=x^2+2x+4$

$g'(x)=4x-3$ より

$g(x)=\int(4x-3)dx=2x^2-3x+b$ （b は積分定数）

$g(1)=4$ より

$2\cdot1^2-3\cdot1+b=4 \quad \therefore b=5$

よって

$g(x)=2x^2-3x+5$

例5

整式 $f(x)$，$g(x)$ が次の 3 つの条件を満たすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ．

(A)　$f(0)=3$

(B)　和 $f(x)+g(x)$ の不定積分は $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2+4x+C$（$C$ は定数）である．

(C)　積 $f(x)g(x)$ の導関数は $3x^2+6x+5$ である．

解説

(B)より

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x+C$$

両辺 x で微分して

$f(x)+g(x)=x^2+3x+4$ …①

(C)より

$\{f(x)g(x)\}'=3x^2+6x+5$

両辺 x で積分して

$f(x)g(x)=x^3+3x^2+5x+C'$　（C' は定数）…②

①に $x=0$ を代入して

$f(0)+g(0)=4$

$f(0)=3$ より，　$g(0)=1$

②に $x=0$ を代入して

$f(0)g(0)=C'$　　$\therefore C'=3$

よって

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x)&=x^3+3x^2+5x+3\\
&=(x+1)(x^2+2x+3) \cdots ③
\end{aligned}
$$

①，③と $f(0)=3, g(0)=1$ より

$f(x)=x^2+2x+3, g(x)=x+1$

例6

$f(x)$ を微分可能な関数で，$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，$f'(0)=1$ を満たすものとする。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　定義にしたがって $f(x)$ の導関数を求めよ。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

解説

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ に $x=y=0$ を代入して

$f(0+0)=f(0)+f(0)+0$

$f(0)=0$

(2) 微分の定義より

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+2x\right)\\
&=f'(0)+2x=2x+1
\end{aligned}
$$

(3) (2) より

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x+1)dx=x^2+x+C$　（C は積分定数）

$f(0)=0$ より

$$C=0$$

よって

$$f(x)=x^2+x$$

確認問題1

xの整式で表される関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の条件を満たしている。

（ア） $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2$　　　（イ） $\dfrac{d}{dx}\{(f(x))^2+(g(x))^2\}=4x-2$

（ウ） $f(0)=1$　　　（エ） $g(0)=-2$

⑴　$f(x)+g(x)$ を求めよ。　　　⑵　$f(x)g(x)$ を求めよ。

⑶　$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

解説

⑴(ア)より

$$f(x)+g(x)=\int 2dx=2x+C_1 \quad (C_1\text{ は積分定数})$$

$x=0$ を代入して，(ウ)，(エ)から，$f(0)+g(0)=1+(-2)=-1$ より

$$C_1=-1$$

よって

$$f(x)+g(x)=2x-1$$

⑵(イ)より

$$(f(x))^2+(g(x))^2=\int(4x-2)dx=2x^2-2x+C_2 \quad (C_2\text{ は積分定数})$$

$x=0$ を代入して，(ウ)，(エ) から，$(f(0))^2+(g(0))^2=1^2+(-2)^2=5$ より

$$C_2=5$$

よって

$$(f(x))^2+(g(x))^2=2x^2-2x+5$$

⑴から，$(f(x)+g(x))^2=(2x-1)^2$ より

$$(f(x))^2+(g(x))^2+2f(x)g(x)=4x^2-4x+1$$

$$2x^2-2x+5+2f(x)g(x)=4x^2-4x+1$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^2-x-2$$

⑶ $f(x)g(x)=(x+1)(x-2)$

$f(x)+g(x)=2x-1$，(ウ)，(エ)より

$$f(x)=x+1,\quad g(x)=x-2$$