第2章　微分法

2.1　関数の極限・微分係数

(1) 関数の極限値

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある一定の値 α に限りなく近づく場合

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ や $x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$

と表し，この値 α を $x\to\alpha$ のときの $f(x)$ の**極限値**といいます。

関数の極限値について，次のことが成り立ちます。

関数の極限値の性質

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ のとき

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　（k は定数）
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　（$\beta\neq 0$）

証明は高校の課程の範囲を超えるので，現時点で理解できなくてもよい。
章末の参考を参考。

例1

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(5x-2)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(5x^2-2x+3)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(5x-2)(3x+1)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{5x-2}{3x+1}$

解説

(1) $\lim_{x\to 1}(5x-2)=5\cdot 1-2=3$

(2) $\lim_{x\to 1}(5x^2-2x+3)=5\cdot 1^2-2\cdot 1+3=6$

(3) $\lim_{x\to 1}(5x-2)(3x+1)=3\cdot 4=12$

(4) $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x-2}{3x+1}=\dfrac{3}{4}$

関数 $f(x)$ が $x=a$ で定義されていなくても，極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在することがあります。

例2

極限値 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ を求めよ。

(解説)

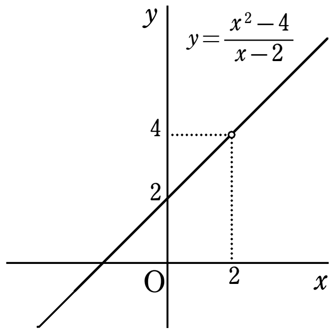
$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ とおくと，

$f(x)$ は $x=2$ では定義されない

$x\neq 2$ のとき

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

となり， $y=f(x)$ は右図のようになる



よって

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

注

最後の極限の式において，極限の定義より x は 2 以外の値をとりながら 2 に近づくので，第 1 式から第 2 式への変形が可能です。また，理系の範囲の微分で詳しく扱いますが， x が 2 より大きい値をとりながら 2 に近づくときと，2 より小さい値をとりながら 2 に近づくときの $f(x)$ の値が存在してそれらが等しいとき， $f(x)$ の極限値 $\lim_{x\to 2}f(x)$ は存在すると定義します。

例3

(1) $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{2t^2+3t-5}{t-1}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+8x+12}{x^2+5x+6}$ の値を求めよ.

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{2t^2+3t-5}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{(2t+5)(t-1)}{t-1}=\lim_{t\to1}(2t+5)=7$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+8x+12}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+6)(x+2)}{(x+3)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+6}{x+3}=\frac{-2+6}{-2+3}=4$

注

本問の極限は，xの値を指定通りに近づけると $\dfrac{0}{0}$ になります。このような極限を $\dfrac{0}{0}$ の不定形の極限といいます。不定形の極限値が存在するかは個々の場合によって異なり，また，その値を求めるときは不定形を解消して求めます。

$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$ ((分母) $\to 0$) のとき

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (有限値) $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$ ((分子) $\to 0$)

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot f(x)=\alpha\cdot0=0$$

$\leftarrow$ は成り立ちません。反例は

$f(x)=x-a,\ g(x)=(x-a)^2$ など

注

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=0$ ((分子) $\to 0$) のとき

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\fallingdotseq 0$ の有限値) $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=0$ ((分母) $\to 0$)

も成り立ちます。

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}}\cdot f(x)=\frac{1}{\alpha}\cdot0=0$$

例4

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=1$ が成り立つとする.

このとき $a=$ ア $\boxed{}$, $b=$ イ $\boxed{}$ である.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+2}{x^2+x-2}=b$ が成り立つとき，定数 a, b の値を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x^2+ax+b}=3$ のとき，a，b の値を求めよ.

(解説)

(1) 分母 $\to0$ であるから，分子 $\to0$ であることが必要

$$\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$$

$$4+2a+b=0 \quad \therefore\ b=-2a-4 \cdots①$$

このとき,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4+a(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+2+a)\\&=4+a=1 \quad \therefore\ a=-3\end{aligned}$$

①より，$b=2$

このとき，与えられた条件を満たす (十分)

注

必要条件で a, b を求めているので，最後の 1 行も書いておいた方がよい。最後の方で極限値が有限値になることも分かるし，極限値が 1 になるように a, b を定めたのであるから，逆が成り立つことも明白である。

(2) 分母 $\to0$ であるから，分子 $\to0$ であることが必要

$$\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+2)=0$$

$$a+3=0 \quad \therefore\ a=-3$$

このとき，

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+2}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^2+x-2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x-2}{x+2}=-1 \quad \therefore\ b=-1$$

このとき，与えられた条件を満たす (十分)

(3) 分子 $\to 0$ であるから，分母 $\to 0$ であることが必要

$$\lim_{x\to3}(x^2+ax+b)=0$$

$$9+3a+b=0 \quad \therefore\ b=-3a-9 \cdots①$$

このとき

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x^2+ax-3a-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+a+3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+5}{x+a+3}$$

$$=\frac{8}{a+6}=3 \quad \therefore\ a=-\frac{10}{3}$$

①より， $b=1$

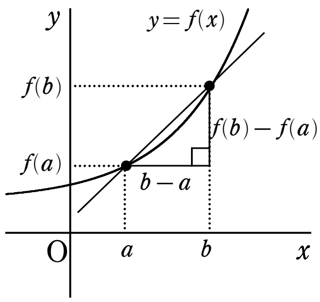
このとき，与えられた条件を満たす (十分)

(2) 平均変化率

関数 $y=f(x)$ において， x の値が a から b まで変化するとき， y の変化量 $f(b)-f(a)$ の x の変化量 $b-a$ に対する割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を x が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の**平均変化率**といいます。中学のときに学習した変化の割合のことです。



例5
関数 $f(x)=x^2-1$ において，x の値が 3 から $3+h$ $(h\neq0)$ まで変化するときの平均変化率が 9 となるとき，h の値を求めよ。

(解説)

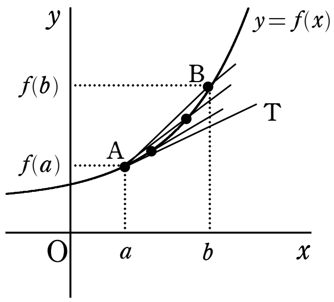
$$\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3}=\frac{(3+h)^2-1-8}{h}=6+h=9 \quad \therefore\ h=3$$

(3) 微分係数

関数 $f(x)$ の平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ において，a の値を定め，b を a に限りなく近づけるとき，これがある一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数または変化率といい，$f'(a)$ と表します。すなわち，次のように表すことができます。

微分係数の定義 1
$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が曲線 $y=f(x)$ において，どのような意味をもつのかを考えてみます。



関数 $f(x)$ において，x が a から b まで変化するときの平均変化率

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

は曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点A $(a, f(a))$，B $(b, f(b))$ を通る直線 AB の傾きを表しています。

ここで，b を限りなく a に近づけると，点 B は曲線上を移動しながら，点 A に限りなく近づく。このとき，

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

であるから，直線 AP は，点 A を通り，傾きが $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づきます。この直線 AT を曲線 $y=f(x)$ 上の点 A における曲線の**接線**といい，A をこの接線の**接点**といいます。

例6

(1) 微分係数の定義から，$f(x)=x^3-2x$ の $x=a$ における微分係数を導け。

(2) 微分係数 $f'(5)$ の定義に基づけば

$$\lim_{x\to 5}\frac{5f(x)-xf(5)}{x-5}={}^{ア}\boxed{}f(5)+{}^{イ}\boxed{}f'(5)$$

である。

解説

(1) $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^3-2x-(a^3-2a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3-2(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)-2(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2-2)=3a^2-2$$

(2) $\lim_{x\to 5}\dfrac{5f(x)-xf(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\dfrac{5f(x)-5f(5)+5f(5)-xf(5)}{x-5}$

$$=\lim_{x\to 5}\left\{5\cdot\frac{f(x)-f(5)}{x-5}-f(5)\right\}$$

$$=5f'(5)-f(5)={}^{ア}-f(5)+{}^{イ}5f'(5)$$

微分係数の定義 1 において， $x-a=h$ とおくと， $x=a+h$ となり，$x\to a$ のとき， $x-a\to 0$ すなわち $h\to 0$ であるから，次のようにも表すことができます。

微分係数の定義 2

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例7

(1) 関数 $f(x)$ において $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき，$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}$ の値は次のどれか。

① $-2f'(a)$　② $-3f'(a)$　③ $2f'(a)$　④ $3f'(a)$

⑤ 上のどれでもない。

(3) 関数 $f(x)$ の $x=1$ における微分係数が 4 のとき，

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$ を求めよ。

(解説)

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}3\cdot\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}=3f'(a)$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-(-2)\cdot\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\right\}$

$=f'(a)+2f'(a)=3f'(a)$

よって，④

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+2h)-f(1)\}-\{f(1-3h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}-(-3)\cdot\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\right\}$

$=2\cdot f'(1)+3\cdot f'(1)=5f'(1)=5\cdot 4=20$

確認問題1

a, b が $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{3x^2+5bx-2b^2}{x^2-(2+a)x+2a}=7$ を満たす．このとき a, b の値を求めよ．

解説

与式$=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x+2b)(3x-b)}{(x-2)(x-a)}$ …①

分子→0 であるから，分母 →0 であることが必要

$$\lim_{x\to a}(x+2b)(3x-b)=0$$

$$(a+2b)(3a-b)=0 \quad \therefore\ b=-\frac{a}{2}, 3a$$

$b=-\dfrac{a}{2}$ のとき，①は

$$\lim_{x\to a}\frac{3x+\frac{a}{2}}{x-2}=\frac{\frac{7}{2}a}{a-2}=7 \quad \therefore\ a=4, b=-2$$

このとき，与えられた条件を満たす

$b=3a$ のとき，①は

$$\lim_{x\to a}\frac{3(x+6a)}{x-2}=\frac{21a}{a-2}=7 \quad \therefore\ a=-1, b=-3$$

このとき，与えられた条件を満たす

確認問題2

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に関し，極限値

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=d,\qquad \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=-2$$

が存在する．このとき，a，b，c，d の値を求めよ．

(解説)

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}=d$ より

分母 $\to0$ であるから，分子$\to0$ であることが必要

$$\lim_{x\to1}f(x)=a+b+c+1=0 \cdots①$$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=-2$ より

分母 $\to0$ であるから，分子$\to0$ であることが必要

$$\lim_{x\to1}f'(x)=3+2a+b=0 \qquad \therefore\ b=-2a-3$$

このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+2a+3)}{x-1}=2a+6=-2 \qquad \therefore\ a=-4, b=5$$

①より，$c=-2$

このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}(x-1)=0=d$$

このとき，与えられた条件を満たす

確認問題3

ある関数 $g(x)$ について $g(1)=\alpha,\ g'(1)=\beta$ とするとき

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{g((t+1)^2)-g(1)}{t}=$ ${}^{ア}\boxed{}\alpha+{}^{イ}\boxed{}\beta$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2g(x)-g(1)}{x-1}=$ ${}^{ウ}\boxed{}\alpha+{}^{エ}\boxed{}\beta$

(解説)

(1) (与式)$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{g(t^2+2t+1)-g(1)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{g(1+(t^2+2t))-g(1)}{t^2+2t}\cdot\frac{t^2+2t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{g(1+t^2+2t)-g(1)}{t^2+2t}\cdot(t+2)$$

$$=g'(1)\times(0+2)=2g'(1)=2\beta$$

(2) (与式) $\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{x^2g(x)-g(x)+g(x)-g(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{(x^2-1)g(x)}{x-1}+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{(x+1)g(x)+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$$

$$=2g(1)+g'(1)=2\alpha+\beta$$

参考 関数の極限値の性質

関数の極限値の性質

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ のとき

1. $\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　（k は定数）

2. $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$

3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

4. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（$\beta\neq 0$）

これらの証明については，厳密には $\varepsilon-\delta$ 論法 (大学で習います) というものを利用しますが，ここでは直感的に証明します。

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ より

$$\lim_{x\to a}|f(x)-\alpha|=0,\ \lim_{x\to a}|g(x)-\beta|=0$$

注 一般に，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ は $\lim_{x\to a}|f(x)-\alpha|=0$ と表します。

1. $\lim_{x\to a}|kf(x)-k\alpha|=0$ を示せばよい

$$\lim_{x\to a}|kf(x)-k\alpha|=\lim_{x\to a}|k||f(x)-\alpha|=|k|\cdot 0=0$$

2. $\lim_{x\to a}|\{f(x)+g(x)\}-(\alpha+\beta)|=\lim_{x\to a}|\{f(x)-\alpha\}+\{g(x)-\beta\}|$

$$\leqq \lim_{x\to a}\{|f(x)-\alpha|+|g(x)-\beta|\}\ \text{(三角不等式)}$$

$$=0+0=0$$

$|\{f(x)+g(x)\}-(\alpha+\beta)|\geqq 0$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to a}|\{f(x)+g(x)\}-(\alpha+\beta)|=0$$

3. $\lim_{x\to a}|f(x)g(x)-\alpha\beta|=\lim_{x\to a}|f(x)g(x)-\alpha g(x)+\alpha g(x)-\alpha\beta|$

$$=\lim_{x\to a}|\{f(x)-\alpha\}g(x)+\alpha\{g(x)-\beta\}|$$

$$\leqq\lim_{x\to a}\{|\{f(x)-\alpha\}g(x)|+|\alpha\{g(x)-\beta\}|\}$$

$$=\lim_{x\to a}\{|f(x)-\alpha||g(x)|+|\alpha||g(x)-\beta|\}=0$$

同様に，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to a}|f(x)g(x)-\alpha\beta|=0$$

$$4.\ \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=\lim_{x\to a}\left|\frac{\beta f(x)-\alpha g(x)}{\beta g(x)}\right|$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|\beta f(x)-\alpha g(x)|}{|\beta g(x)|}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|\beta f(x)-\alpha\beta+\alpha\beta-\alpha g(x)|}{|\beta||g(x)|}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|\beta\{f(x)-\alpha\}+(-\alpha)\{g(x)-\beta\}|}{|\beta||g(x)|}$$

$$\leqq\lim_{x\to a}\frac{|\beta\{f(x)-\alpha\}|+|(-\alpha)\{g(x)-\beta\}|}{|\beta||g(x)|}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|\beta||f(x)-\alpha|+|\alpha||g(x)-\beta|}{|\beta||g(x)|}=0$$

同様に，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=0$$

注

はさみうちの原理とは， x が a に近いとき，常に $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ が成り立ち，かつ， $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ ならば， $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$ が成り立つ。という原理です。これも理系の範囲の微積分で詳しく扱います。