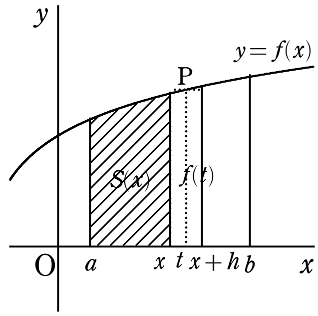
3.2　定積分

(1) 面積と不定積分



関数 $f(x)$ は，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ であるとします。

x が a から x において，曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を x の関数と考え $S(x)$ と表すことにします。

このとき， $S(x)$ の導関数を考えます。

$S(x+h)-S(x)$ は x が x から $x+h$ において，

曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を表します。

このとき，これと等しい面積をもつ長方形を考え，長方形の(上)辺が $y=f(x)$ と交わる点を P とし，P の x 座標を t とすると，

$$S(x+h)-S(x)=hf(t)$$

$$\therefore \frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)$$

となる t が存在します (積分の平均値の定理)。これは $h<0$ のときも成り立ちます。 $h \to 0$ のとき $t \to x$ であるから， $f(t) \to f(x)$ となり

$$\lim_{h \to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)\text{，すなわち } S'(x)=f(x)$$

が成り立ちます。よって，

面積 $S(x)$ は関数 $f(x)$ の 1 つの不定積分である。

$F(x)$ を $f(x)$ の任意の不定積分とすると，

$$S(x)=F(x)+C \quad (\ C \text{ は定数}\ ) \cdots ①$$

と表されます。 $x=a$ のとき， $S(x)$ の定義より $S(a)=0$ であるから

$$0=F(a)+C \qquad \therefore C=-F(a)$$

よって，①は

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

特に $x=b$ とおくと， $a \leqq x \leqq b$ において曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S は

$$S=F(b)-F(a) \quad \left(\text{ただし，} F(x)=\int f(x)dx\ \right)$$

と表されます。

(2) 定積分

一般に，関数 $f(x)$ の 1 つの不定積分を $F(x)$ とするとき，2 つの実数 a, b に対して， $F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい，記号 $\int_a^b f(x)dx$ と表し，また， $F(b)-F(a)$ を記号 $\Big[F(x)\Big]_a^b$ と表します。

定積分
関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

$F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの不定積分とし， C を定数とすると

$$\begin{aligned}\Big[F(x)+C\Big]_a^b&=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}\\&=F(b)-F(a)\\&=\Big[F(x)\Big]_a^b\end{aligned}$$

であるから， $f(x)$ の定積分を求める場合， $F(x)$ として $f(x)$ のどの不定積分を選んで計算しても結果は変わりません。

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ において， a を定積分の**下端**， b を**上端**といいます。
また，この定積分を求めることを，関数 $f(x)$ を a から b まで**積分する**といいます。

定積分の定義において，関数 $f(x)$ は負の値をとってもよいこととします。また，定積分の下端，上端の大小について， $a<b, a=b, a>b$ のいずれであってもよいものとします。

参考 **微分積分学の基本定理**

高校では，まず不定積分を微分の逆演算として定義をし，それから面積を利用して定積分を定義しますが，一般には，まず定積分を面積として定義して，それから積分は微分の逆演算であることを導きます。
つまり，①より

$$S'(x)=F'(x) \qquad \therefore\ f(x)=F'(x)$$

これを**微分積分学の基本定理**といいます。

(3) **定積分の性質**

関数の定数倍や和の定積分については，次の等式が成り立ちます。

定積分の性質 1(**線形性**)

k, l は定数とする。

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx$

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

$$1.\ \int_a^b kf(x)dx = \Big[kF(x)\Big]_a^b = kF(b)-kF(a) = k\{F(b)-F(a)\} = k\int_a^b f(x)dx$$

2, 3 も同様にして示せます。

例1

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (1-x+x^2-x^3)dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^1 (4x+1)(2x^2+x+9)dx = \frac{^{ア}\boxed{}}{_{イ}\boxed{}}$ である。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3 dx$ の値を求めよ.

(解説)

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x+x^2-x^3)dx = \left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{7}{12}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (4x+1)(2x^2+x+9)dx = \int_0^1 (8x^3+6x^2+37x+9)dx$

$$= \left[2x^4+2x^3+\frac{37}{2}x^2+9x\right]_0^1 = \frac{^{ア}63}{_{イ}2}$$

(3) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \int_0^1 (8x^3+12x^2+6x+1)dx$

$$= \Big[2x^4+4x^3+3x^2+x\Big]_0^1 = 10$$

別解

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \left[\frac{(2x+1)^4}{4\cdot 2}\right]_0^1 = 10$$

例2 (1) 関数 $f(x)$ が $f'(x)=3x+2$ と $\int_0^2 f(x)\,dx=4$ をともに満たすとき， $f(x)=\boxed{}$ である。 (2) $\int_0^a x(x-3)dx=0$ となる a の値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=\int (3x+2)dx=\frac{3}{2}x^2+2x+C$　（C は積分定数）

$\int_0^2 f(x)\,dx=4$ より

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2+2x+C\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^3+x^2+Cx\right]_0^2=2C+8=4 \qquad \therefore C=-2$$

よって

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-2$$

(2) $\int_0^a x(x-3)dx=\int_0^a (x^2-3x)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_0^a=\frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^2=0$$

$a^2(2a-9)=0 \qquad \therefore a=0,\ \frac{9}{2}$

例3

$f(x)$ を $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小となる 3 次関数で $\int_0^2 f'(x)\,dx=-5$ を満たすものとする。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)$ は $x=-1$ で極大，$x=2$ で極小をもつ 3次関数であるから

$f'(x)=a(x+1)(x-2)=a(x^2-x-2)$ $(a>0)$ とおける

$\int_0^2 f'(x)\,dx=-5$ より

$$\int_0^2 a(x^2-x-2)\,dx=a\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2=-\frac{10}{3}a=-5 \quad \therefore\ a=\frac{3}{2}$$

よって

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^2-x-2)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3$$

(2) 極大値と極小値の差は

$$\begin{aligned} f(-1)-f(2)&=\int_2^{-1} f'(x)\,dx \\ &=\int_2^{-1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3\right)dx \\ &=\frac{3}{2}\int_2^{-1}(x^2-x-2)\,dx \\ &=\frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^{-1}=\frac{27}{4} \end{aligned}$$

注 3次関数の極値の差は，本問のように定積分を利用して求めることができます。

注 最後の計算は，後に出てくる 1/6 公式を利用すればもう少し楽に計算できます。

例4

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が，等式 $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 xf(x)\,dx=0$, $\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=1$ を満たすとき，定数 a, b, c の値を求めよ.

(解説)

$\int_0^1 f(x)\,dx=0$ より

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0 \cdots ①$$

$\int_0^1 xf(x)\,dx=0$ より

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\left[\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0 \cdots ②$$

$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx=1$ より

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx&=\int_0^1 f(x)(ax^2+bx+c)\,dx\\&=a\int_0^1 x^2f(x)\,dx+b\int_0^1 xf(x)\,dx+c\int_0^1 f(x)\,dx\\&=a\int_0^1 x^2f(x)\,dx\\&=a\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3\right]_0^1=a\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}\right)=1 \cdots ③\end{aligned}$$

①～③より

$2a+3b+6c=0$，$3a+4b+6c=0$，$a(12a+15b+20c)=60$

$\therefore\ a=\pm 6\sqrt{5}$，$b=\mp 6\sqrt{5}$，$c=\pm\sqrt{5}$　(複号同順)

$\therefore\ (a,\ b,\ c)=(6\sqrt{5},\ -6\sqrt{5},\ \sqrt{5})$，$(-6\sqrt{5},\ 6\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

例5
多項式 $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ が任意の 2 次以下の多項式 $g(x)$ に対して $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx=0$ を満たすとき α，β，γ の値を求めよ。

解説

$g(x)=px^2+qx+r$ とおく。

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx&=\int_0^1 (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)(px^2+qx+r)\,dx\\&=p\int_0^1 (x^5+\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2)\,dx+q\int_0^1 (x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x)\,dx\\&\quad+r\int_0^1 (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx\end{aligned}$$

$$=p\left(\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{3}\right)+q\left(\frac{1}{5}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}\right)+r\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma\right)$$

任意の p, q, r に対して $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx=0$ が成り立つとき

$$\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{3}=0,\ \frac{1}{5}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{2}=0,\ \frac{1}{4}+\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma=0$$

$$\therefore \alpha=-\frac{3}{2},\ \beta=\frac{3}{5},\ \gamma=-\frac{1}{20}$$

関数の定積分について，次のことも成り立ちます。

定積分の性質 2

4. $\int_a^a f(x)dx=0$
5. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

4. $\int_a^a f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^a$

$$=F(a)-F(a)=0$$

5, 6 も同じように計算するだけです。

例6

定積分 $\int_{-2}^0 (x^3+3x^2)dx-\int_2^0 (x^3+3x^2)dx$ を求めよ。

(解説)

$$\int_{-2}^0 (x^3+3x^2)dx-\int_2^0 (x^3+3x^2)dx=\int_{-2}^0 (x^3+3x^2)dx+\int_0^2 (x^3+3x^2)dx$$

$$=\int_{-2}^2 (x^3+3x^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3\right]_{-2}^2=16$$

注 偶関数･奇関数の積分を用いればもう少し楽に計算できます。

例7

(1)　すべての実数 k に対して，$\int_{k-1}^{k}(x^2+ax+b)dx=k^2$ を満たすような定数 a，b の値を求めよ。

(2)　n を自然数とするとき，和 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を (1) で求めた等式を用いて計算せよ。

(解説)

(1) $\int_{k-1}^{k}(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{k-1}^{k}$

$$=k^2+(a-1)k-\frac{a}{2}+b+\frac{1}{3}$$

すべての実数 k に対して $k^2+(a-1)k-\frac{a}{2}+b+\frac{1}{3}=k^2$ が成り立つとき

$$a-1=0,\ -\frac{a}{2}+b+\frac{1}{3}=0 \quad \therefore a=1,\ b=\frac{1}{6}$$

(2) (1)より

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\\
&=\int_0^1\left(x^2+x+\frac{1}{6}\right)dx+\int_1^2\left(x^2+x+\frac{1}{6}\right)dx\\
&\quad+\int_2^3\left(x^2+x+\frac{1}{6}\right)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}\left(x^2+x+\frac{1}{6}\right)dx\\
&=\int_0^n\left(x^2+x+\frac{1}{6}\right)dx\\
&=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right]_0^n\\
&=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

(3) **奇関数･偶関数の積分**

一般に，任意の x に対して，$f(-x)=-f(x)$ を満たす関数を**奇関数**，$f(-x)=f(x)$ を満たす関数を**偶関数**といいます。奇関数のグラフは原点対称であり，偶関数のグラフは y 軸対称です。ここでは，一般の奇関数や偶関数についてではなく，多項式で表される関数について，

$x, x^3, x^5, \cdots$ のグラフは原点対称であるので奇関数， $1, x^2, x^4, x^6, \cdots$ のグラフは y 軸対称であるので偶関数であり，次のことが成り立ちます。

奇関数・偶関数の積分

n は自然数とする。

1. $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=0$

2. $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^{2n}dx=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$

$$1.\ \int_{-a}^{a} x^{2n-1}dx=\left[\frac{x^{2n}}{2n}\right]_{-a}^{a}=\frac{a^{2n}-(-a)^{2n}}{2n}=\frac{a^{2n}-a^{2n}}{2n}=0$$

$$2.\ \int_{-a}^{a} x^{2n}dx=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-a}^{a}=\frac{a^{2n+1}-(-a)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{a^{2n+1}+a^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=2\int_{0}^{a} x^{2n}dx$$

注 一般の奇関数･偶関数についても同様のことが成り立つが，置換積分法というものを用いるため，理系の微積分の範囲で学習します。

例8

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)(x-1)dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+x^2+x+|x|)dx$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x-1)(x+4)(x-a)dx=66$ の解は $a=\boxed{}$ である。

解説

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x-3)(x-1)dx=\int_{-2}^{2}(x^2-4x+3)dx$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2+3)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{0}^{2}=\frac{52}{3}$$

(2) (与式) $\displaystyle=2\int_{0}^{2}(x^2+|x|)dx$　（$|x|$ は偶関数）

$$=2\int_{0}^{2}(x^2+x)dx \quad (\ x\geqq 0 \text{ で } |x|=x\ )$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=\frac{28}{3}$$

(3) $\int_{-3}^{3}(x-1)(x+4)(x-a)dx=\int_{-3}^{3}\{x^3+(3-a)x^2-(3a+4)x+4a\}dx$

$$=2\int_0^3\{(3-a)x^2+4a\}dx$$

$$=2\left[\frac{3-a}{3}x^3+4ax\right]_0^3$$

$$=6a+54=66 \quad \therefore a=2$$

例9

関数 $f(x)=ax+b$ が $\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$, $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=-4$ を満たすとき，

定数 a, b の値はそれぞれ $a=$ ア $\boxed{}$, $b=$ イ $\boxed{}$ である．

解説

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=5$ より

$$\int_{-1}^{1}(ax+b)dx=2\int_0^1 bdx=2\Big[bx\Big]_0^1=2b=5 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$$

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=-4$ より

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^1=\frac{2a}{3}=-4 \quad \therefore a=-6$$

例10

(1) 直線 $y=ax+b$ が点 $(1, 1)$ を通り，$\int_{-1}^{1}(ax+b)^2dx$ の値が最小になるような a, b の値を求めよ．

(2) $f(a,\ b)=\int_{-1}^{1}(x^2-ax-b)^2dx$ を最小にする実数 a，b の値，および，そのときの $f(a,\ b)$ の値を求めよ。

解説

(1) 直線 $y=ax+b$ が点 $(1, 1)$ を通るから

$$1=a+b \quad \therefore b=1-a$$

$$\int_{-1}^{1}(ax+b)^2dx=\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)dx$$

$$=2\int_0^1(a^2x^2+b^2)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}a^2x^3+b^2x\right]_0^1=\frac{2}{3}a^2+2b^2$$

$$=\frac{2}{3}a^2+2(1-a)^2$$

$$=\frac{8}{3}a^2-4a+2=\frac{8}{3}\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$$

これを最小にする a, b の値は，　$a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{4}$

(2) $f(a,\ b)=\int_{-1}^{1}\{x^4-2ax^3+(a^2-2b)x^2+2abx+b^2\}dx$

$$=2\int_0^1\{x^4+(a^2-2b)x^2+b^2\}dx$$

$$=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{1}{3}(a^2-2b)x^3+b^2x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}(a^2-2b)+b^2\right\}=\frac{2}{3}a^2+2\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45}$$

$a=0$，$b=\frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{8}{45}$ をとる。

(4) 1/6 **公式**

　計算を簡便にするために，次のような公式があります。いわゆる 1/6 公式や 1/12 公式…といわれるものです。これらは，面積を求めるときによく現れる積分なので記憶しておくとよいというものです。一般には，ベータ関数と呼ばれるものたちです。

1/6 公式

1. $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

2. $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

3. $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

符号については，被積分関数のグラフが x 軸より上にあるか下にあるかで判断すればよい。ただし，α, β の大小について注意が必要です。

例11

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は，2 つの実数解 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ をもつとする.

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x^2+ax+b)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_\gamma^\beta (x^2+ax+b)dx=0$ となる $\gamma\,(\gamma<\beta)$ を，α, β を用いて表せ.

(解説)

(1) $x^2+ax+b=0$ の 2 つの実数解が α, β であるから

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x^2+ax+b)dx&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx\\&=\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx\\&=\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}+(\beta-\alpha)\frac{(x-\beta)^2}{2}\right]_\alpha^\beta=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

注 同様にして，公式 2, 3 も導けるので，各自やってみて下さい。

(2) 同様にして

$$\begin{aligned}\int_\gamma^\beta (x^2+ax+b)dx&=-\frac{(\gamma-\beta)^3}{3}-(\beta-\alpha)\frac{(\gamma-\beta)^2}{2}\\&=-\frac{(\gamma-\beta)^2}{6}\{2(\gamma-\beta)+3(\beta-\alpha)\}=0\end{aligned}$$

$\gamma\neq\beta$ より

$$2\gamma+\beta-3\alpha=0 \qquad \therefore\ \gamma=\frac{3\alpha-\beta}{2}$$

注 本問は面積の 2 等分に関わる問題です。γ から α における放物線と x 軸とで囲まれる部分の面積と， α から β における放物線と x 軸とで囲まれる部分の面積が等しくなるような γ を α と β を用いて表すというものです。

例12

定積分 $\displaystyle\int_2^8 (2x^2-20x+32)dx$ の値を求めよ.

(解説)

$$\int_2^8(2x^2-20x+32)dx=2\int_2^8(x^2-10x+16)dx$$
$$=2\int_2^8(x-2)(x-8)dx$$
$$=-\frac{2}{6}(8-2)^3=-72$$

例13

a，b は定数で $a \neq b$ とする。関数 $f(x)=x(x-a)(x-b)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx=0$ のとき，$a+b$ の値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=x(x-a)(x-b)=x^3-(a+b)x^2+abx$

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+b)x^3+\frac{1}{2}abx^2+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

(2) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x(x-a)(x-b)dx$$
$$=\int_a^b\{(x-b)+b\}(x-a)(x-b)dx$$
$$=\int_a^b\left\{(x-a)(x-b)^2+b(x-a)(x-b)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{12}(b-a)^4-\frac{b}{6}(b-a)^3$$
$$=\frac{(b-a)^3\{(b-a)-2b\}}{12}$$
$$=\frac{(a-b)^3(a+b)}{12}=0$$

$a \neq b$ より

$a+b=0$

注 本問も 3次関数の面積の 2 等分に関わる問題です。

本問より，一般に次の公式が成り立ちます。

$$\boxed{4. \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=\frac{1}{12}(2\gamma-\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^3}$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)-(\gamma-\beta)\}\,dx\\&=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)(x-\beta)^2-(\gamma-\beta)(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx\\&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4+\frac{\gamma-\beta}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\{(\beta-\alpha)+2(\gamma-\beta)\}\\&=\frac{1}{12}(2\gamma-\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

確認問題1

a, b を定数とする．

(1)　不等式 $\left\{\int_0^1 (x+a)(x+b)dx\right\}^2 \leqq \left\{\int_0^1 (x+a)^2 dx\right\}\left\{\int_0^1 (x+b)^2 dx\right\}$ を示せ．

(2)　(1) で等号が成立するための a, b の条件を求めよ．

(解説)

(1) $\int_0^1 (x+a)^2 dx = A$, $\int_0^1 (x+a)(x+b)dx = B$, $\int_0^1 (x+b)^2 dx = C$ とおく

t を任意の実数とすると $\{t(x+a)+(x+b)\}^2 \geqq 0$ より

$$\int_0^1 \{t(x+a)+(x+b)\}^2 dx = \int_0^1 \{t^2(x+a)^2 + 2t(x+a)(x+b) + (x+b)^2\} dx$$

$$= t^2 \int_0^1 (x+a)^2 dx + 2t\int_0^1 (x+a)(x+b)dx + \int_0^1 (x+b)^2 dx$$

$$= At^2 + 2Bt + C \geqq 0$$

$A>0$ であるから， $At^2+2Bt+C=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = B^2 - AC \leqq 0 \quad \therefore B^2 \leqq AC$$

$$\therefore \left\{\int_0^1 (x+a)(x+b)dx\right\}^2 \leqq \left\{\int_0^1 (x+a)^2 dx\right\}\left\{\int_0^1 (x+b)^2 dx\right\}$$

別解 愚直に定積分を計算して示してもよい。

(2) 等号が成り立つとき，

$0 \leqq x \leqq 1$ である任意の x の値について

常に $t(x+a)+(x+b)=0$ であればよいから

$$t+1=0,\ at+b=0 \quad \therefore a=b$$

参考 本問の不等式を積分のシュワルツの不等式，シュワルツの不等式 (積分型) などといいます。

確認問題2

(1)　すべての自然数 k に対して $\int_k^{k+1}(x^3+ax^2+bx+c)dx=k^3$ が成り立つように定数 a，b，c の値を定めよ．

(2)　(1) を用いて次の和を求めよ．

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$$

解説

(1) $\int_k^{k+1}(x^3+ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_k^{k+1}$

$=\frac{1}{4}\{(k+1)^4-k^4\}+\frac{a}{3}\{(k+1)^3-k^3\}+\frac{b}{2}\{(k+1)^2-k^2\}+c\{(k+1)-k\}$

$=\frac{1}{4}(4k^3+6k^2+4k+1)+\frac{a}{3}(3k^2+3k+1)+\frac{b}{2}(2k+1)+c$

$=k^3+\left(a+\frac{3}{2}\right)k^2+(a+b+1)k+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c+\frac{1}{4}$

これが恒等的に k^3 に等しいとき

$a+\frac{3}{2}=0$，$a+b+1=0$，$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c+\frac{1}{4}=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=0$

(2) $1^3+2^3+\cdots+n^3$

$=\int_1^2\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx+\cdots+\int_n^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx$

$=\int_1^{n+1}\left(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_1^{n+1}$

$=\frac{1}{4}\{(n+1)^4-1\}-\frac{1}{2}\{(n+1)^3-1\}+\frac{1}{4}\{(n+1)^2-1\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

確認問題3

2 次式 $f(x)=ax^2+bx+c,\ a>0$ が次の 3 つの条件を満たしている.

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$　　(B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=8$

(C) x の関数 $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ の極大値が 0 である.

(1) 2 次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ の値を求めよ.

解説

(1) (A)より

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)dx=2\int_{0}^{1}(ax^2+c)dx=2\left(\frac{a}{3}+c\right)=0$$

$\therefore\ a=-3c$　　ここで，$a>0$ より $c<0$

(B)より

$$\int_{-1}^{1}x(ax^2+bx+c)dx=2\int_{0}^{1}bx^2dx=\frac{2}{3}b=8 \quad \therefore\ b=12$$

よって，$f(x)=-3cx^2+12x+c$ とおける

(C)より，$F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$ とおくと

$F'(x)=-3cx+12x+c$

$F'(x)=0$ となるとき，

$$-3cx^2+12x+c=0$$

この方程式は 2 実解をもち，それらを $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$x=\alpha$ のとき極大となる

極大値が 0 より

$$F(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}(-3ct^2+12t+c)dt=\Big[-ct^3+6t^2+ct\Big]_{-1}^{\alpha}$$

$$=-c\alpha^3+6\alpha^2+c\alpha-6=(1-\alpha^2)(c\alpha-6)=0 \quad \therefore\ \alpha=\pm1,\ \frac{6}{c}$$

また，$-3c\alpha^2+12\alpha+c=0$ より

$\alpha=1$ のとき，$c=6$

$\alpha=-1$ のとき，$c=-6$

$\alpha=\dfrac{6}{c}$ のとき，$c=\pm6$

$c<0$ より，$c=-6$

よって

$$f(x)=18x^2+12x-6$$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(18x^2+12x-6)^2dx=36\int_{-1}^{1}(3x^2+2x-1)^2dx$

$$=36\times2\int_{0}^{1}(9x^4-2x^2+1)dx$$

$$=72\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{768}{5}$$