2.6　条件付き確率(2)

(1) 原因の確率

　次のような問題を考えてみます。

0，1 という 2 つの信号をそれぞれ確率 0.4，0.6 で送信する。しかし，受信時に正しく 0, 1 の信号を受け取る確率は 0.9 であり，残りの 0.1 の確率で逆の信号を受け取ってしまう。

この場合，受信信号が 0 となる確率は $\dfrac{\overset{\text{ア}}{\boxed{}}}{100}$ である。また，0 が受信された場合に送信信号が 0 である確率は $\dfrac{\overset{\text{イ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{ウ}}{\boxed{}}}$ である。

(解説)

A ：0 という信号を送信した，
B ：1 という信号を送信した，
C ：0 という信号を受信した，
D ：1 という信号を受信した，という事象とする.

(ア) $P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{10}=\frac{42}{100}$$

(イ), (ウ) 求める確率は $P_C(A)$ である

$$P_C(A)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$=\frac{\frac{36}{100}}{\frac{42}{100}}=\frac{6}{7}$$

この条件付き確率 $P_C(A)$ は，事象 C が起こる原因として事象 A, B の 2 つが考えられるとき，事象 C が起こったことを知って，それが原因 A から起こったと考えられる確率です。このことから，$P_C(A)$ を**原因の確率**といいます。時間が逆行していて分かりづらいかもしれませんが，ベン図を考えれば，成り立つことはすぐに分かります。

例1
ある電器店が，A 社，B 社，C 社から同じ製品を仕入れた．A 社，B 社，C 社から仕入れした比率は，4：3：2 であり，製品が不良品である比率はそれぞれ 3 %, 4 %, 5 % であるという．いま，よく混ぜられた 3 社の製品 9900 個から任意に 1 個抜き取って調べたところ，不良品であった．これが A 社から仕入れたものである確率を求めよ．

(解説)

抜き出した品が A，B，C 社の製品であるという事象を A, B, C とし，
抜き出した品が不良品であるという事象を D とすると，
求める確率は $P_D(A)$ である

$$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}$$

ここで，

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{100}+\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{100}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{100}=\frac{34}{900}$$

よって，

$$P_D(A)=\frac{12}{34}=\frac{6}{17}$$

合計の個数が分かっているので，

$$P_D(A)=\frac{n(A\cap D)}{n(D)}$$

でも処理できますが，無駄な計算が増えるだけです。

例2
10 本のくじの中に当たりくじが 4 本ある。引いたくじは，もとに戻さないものとして，A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつ引く。
(1)　A が当たり，B がはずれる確率を求めよ。
(2)　C がはずれる確率を求めよ。
(3)　C がはずれたとき，A が当たっている確率を求めよ。

(解説)

(1) $\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$

(2) くじは，当たりもはずれもすべて区別して考えて，Cがはずれれば，あとは，あたりでもはずれでもよいので，

$$\frac{6\cdot 9!}{10!}=\frac{3}{5}$$

(3) A ：Aが当たる事象
B ：Cがはずれる事象とする

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ここで，

$$P(A\cap B)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{4}{15}$$

よって，

$$P_B(A)=\frac{4}{9}$$

例3
箱Aには3個の赤い球と2個の白い球が，箱Bには5個の赤い球と5個の白い球が入っている。箱を1つ選び，その中から球を1つ取り出したところ，その球の色は赤であった。このとき，選んだ箱がAであった確率は $\boxed{}$ である。

(解説)
箱A，Bを選ぶという事象をそれぞれ A，B とし，赤い球を取り出すという事象を C とすると，求める確率は $P_C(A)$ である

$$P_C(A)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

ここで，

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{11}{20}$$

よって，

$$P_C(A)=\frac{6}{11}$$

例4

サイコロを2回投げるとき，出た目の和が3の倍数である確率は ア $\boxed{}$ である。また，出た目の和が3の倍数であるとき，1回目に出た目が3の倍数でない条件付き確率は イ $\boxed{}$ である。

解説

(ア) 出た目の和が3の倍数である目の出方は，

和が3　(1，2)，(2，1) の2通り

和が6　(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1) の5通り

和が9　(3，6)，(4，5)，(5，4)，(6，3) の4通り

和が12　(6，6) の1通り の計12通り

よって，$\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

(イ) A ：出た目の和が3の倍数であるという事象，

B ：1回目に出た目が3の倍数でないという事象とする

$P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cap B)=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$ より

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{9}\div\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

例5

Aさんは訪れる場所で確率 $\dfrac{2}{5}$ でカバンを置き忘れる。Bさんは訪れる場所で確率 $\dfrac{1}{6}$ でカバンを置き忘れる。ある日，AさんとBさんはそれぞれカバンを持って自宅を出て，映画館，レストラン，図書館の順に訪れ，帰宅した。ただし，AさんもBさんもカバンを置き忘れたことに気がつくのは帰宅したときとする。

(1)　Aさんがカバンを置き忘れずに帰宅する確率は $\boxed{}$ である。

(2)　AさんとBさんが同じ場所でカバンを置き忘れる確率は $\boxed{}$ である。

(3)　Aさんが帰宅したときにカバンを置き忘れていることに気がついた。このとき，レストランでカバンを置き忘れた確率は $\boxed{}$ である。

(解説)

(1) $\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$

(2) $\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(1-\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{15}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{7}{60}$

(3) 映画館，レストラン，図書館にカバンを忘れる事象をそれぞれ A, B, C とすると，求める確率は $P_{A\cup B\cup C}(B)$ である

$$P_{A\cup B\cup C}(B)=\frac{P((A\cup B\cup C)\cap B)}{P(A\cup B\cup C)}=\frac{P(B)}{P(A\cup B\cup C)}$$

ここで，

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=1-P(\overline{A\cup B\cup C})\\&=1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=1-\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{98}{125}\end{aligned}$$

$$P(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

よって，

$$P_{A\cup B\cup C}(B)=\frac{15}{49}$$

別解 事象を次のようにとってもよい。

A ：カバンをレストランに忘れたという事象

B ：カバンをどこかに忘れたという事象とすると，

求める確率は $P_B(A)$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ここで，

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})\\&=1-\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{98}{125}\end{aligned}$$

$$P(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

よって，

$$P_B(A)=\frac{15}{49}$$

(2) **事象の独立・従属**

2 つの事象 A, B があって，一方の事象が起こることが他方の事象が起こる確率に影響を与えないとき，すなわち，

$P_A(B)=P(B)$， $P_B(A)=P(A)$

が成り立つとき，事象 A と事象 B は互いに**独立**であるといいます。
このとき，確率の乗法定理より

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

が成り立ちます。

独立事象の乗法定理
2つの事象 A, B が互いに独立$\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$

事象 A, B が独立でないとき， A と B は互いに**従属**であるといいます。
このとき， A は B に従属， B は A に従属であるともいいます。
試行の独立･従属の判定については，感覚的に判断することができますが，事象の独立･従属の判定は，感覚的には判断しづらいです。
また，一般に 3 つの事象 A, B, C があって，そのうちのどの 2 つ事象も互いに独立であり，また，どの 2 つの積事象も残り 1 つの事象と独立であるとき，事象 A, B, C は互いに独立であるといいます。このとき，

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

が成り立ちます。4 つ以上の事象の独立性についても同様に考えることができます。

例6
さいころ投げの試行に関し，事象 $A=\{$奇数の目$\}, B=\{$4以上の目$\}$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．
(1)　確率 $P(A\cap B)$ を求めよ．
(2)　条件付き確率 $P_B(A)$ を求めよ．
(3)　A と B が独立であるか否か理由を付して答えよ．

(解説)

(1) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

(2) $P_B(A)=\dfrac{1}{3}$

(3) $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2}$

$P(A\cap B)\fallingdotseq P(A)P(B)$ より， A と B は独立でない(従属である)。

例7
表が出る確率が p で裏が出る確率が $1-p$ のコインを 3 回投げる試行を考える．ただし,$0<p<1$ とする．1 回目に表が出る事象を A，3 回のうちちょうど 2 回だけ表が出る事象を B とする．
(1)　確率 $P(\mathrm{B})$，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ を求めよ．
(2)　$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})$ が成り立つような p の値を求めよ．

解説

(1) $P(\mathrm{B})={}_3\mathrm{C}_2p^2(1-p)=3p^2(1-p)$

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p\cdot{}_2\mathrm{C}_1p(1-p)=2p^2(1-p)$

(2) $P(\mathrm{A})=p$ より

$2p^2(1-p)=p\cdot 3p^2(1-p)$

$p^2(1-p)(3p-2)=0$

$0<p<1$ より

$p=\dfrac{2}{3}$

このとき，A と B は独立です。

確認問題1

ある病気 X にかかっている人が 4 % いる集団 A がある。病気 X を診断する検査で，病気 X にかかっている人が正しく陽性と判定される確率は 80 % である。また，この検査で病気 X にかかっていない人が誤って陽性と判定される確率は 10 % である。

(1)　集団 A のある人がこの検査を受けたところ陽性と判定された。この人が病気 X にかかっている確率はいくらか。

(2)　集団 A のある人がこの検査を受けたところ陰性と判定された。この人が実際には病気 X にかかっている確率はいくらか。

(解説)

(1) X ：病気 X にかかっているという事象

Y ：陽性と判定されるという事象とする

求める確率は $P_Y(X)$

$$P_Y(X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$$

ここで，

$$\begin{aligned}P(Y)&=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)\\&=\frac{4}{100}\cdot\frac{80}{100}+\frac{96}{100}\cdot\frac{10}{100}=\frac{1280}{10000}\end{aligned}$$

よって，

$$P_Y(X)=\frac{320}{1280}=\frac{1}{4}\quad \boxed{答}$$

(2) 求める確率は $P_{\overline{Y}}(X)$

$$P_{\overline{Y}}(X)=\frac{P(X\cap \overline{Y})}{P(\overline{Y})}$$

ここで，

$$\begin{aligned}P(\overline{Y})&=P(X\cap \overline{Y})+P(\overline{X}\cap \overline{Y})\\&=\frac{4}{100}\cdot\frac{20}{100}+\frac{96}{100}\cdot\frac{90}{100}=\frac{8720}{10000}\end{aligned}$$

よって，

$$P_{\overline{Y}}(X)=\frac{80}{8720}=\frac{1}{109}\quad \boxed{答}$$

確認問題2

白い球が4個，青い球が6個入った箱から，元に戻さずに球を取り出す。1個目が白だったとき，2個目が青となる確率は $^{ア}\boxed{}$，2個を続けて取り出して，2個目の色が青だったとき，1個目が白である確率は $^{イ}\boxed{}$ である。

解説

(ア) A ：1個目が白である事象，

B ：2個目が青である事象とする

求める確率は $P_A(B)$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ここで，

$$P(A)=\frac{2}{5},P(A\cap B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

よって，

$$P_A(B)=\frac{2}{3}$$ 答

(イ) 求める確率は $P_B(A)$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ここで，

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{27}{45}\end{aligned}$$

よって，

$$P_B(A)=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$ 答

確認問題3

袋の中に，両面とも赤のカードが2枚，両面とも青，両面とも黄，片面が赤で片面が青，片面が青で片面が黄のカードがそれぞれ1枚ずつの計6枚のカードが入っている.

その中の1枚を無作為に選んで取り出し机の上に置くとき，表が赤の確率は ア $\boxed{}$，両面とも赤の確率は イ $\boxed{}$ である．表が赤であることが分かったとき，裏も赤である確率は ウ $\boxed{}$ である．最初のカードは袋に戻さずに，もう1枚カードを取り出して机の上に置くことにする．最初のカードの表が赤と分かっているとき，2枚目のカードの表が青である確率は エ $\boxed{}$ である．最初のカードの表が赤で，2枚目のカードの表が青であることが分かったとき，最初のカードの裏が赤である確率は オ $\boxed{}$ である.

解説

(ア) 同じ種類のカードも面もすべて区別して考える

$$\frac{5}{12}$$ 答

(イ) $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ 答

(ウ) $\frac{4}{5}$ 答

(エ) A ：最初のカードの表が赤である事象

B ：2枚目のカードの表が青である事象とする

求める確率は $P_A(B)$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

ここで,

$$P(A)=\frac{5}{12},\ P(A\cap B)=\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{10}=\frac{19}{120}$$

よって,

$$P_A(B)=\frac{19}{50}$$ 答

(オ) C ：最初のカードの裏が赤である事象とする

求める確率は $P_{A\cap B}(C)$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B)}$$

ここで，

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{4}{12}\cdot\frac{4}{10}=\frac{16}{120}$$

よって，

$$P_B(A)=\frac{16}{19}$$ 答

確認問題4

2つの箱 A，B があり，箱 A の中には赤球が 4 個，白球が 3 個入っている。箱 A から 2 球を取り出し，色を確かめずに箱 B に入れた。(最初，箱 B は空っぽであったとして考えよ。)

(1)　箱 B に赤球が含まれない確率を求めよ。

(2)　箱 B に白球が含まれる確率を求めよ。

(3)　箱 B から 1 球を取り出したとき，それが赤球である確率を求めよ。

(4)　箱 B から 1 球を取り出すとき，それが白球であったという条件のもとで箱 B の残りの 1 球が赤球である確率を求めよ。

(解説)

(1) 2 球とも白球であればよいから，

$$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$$ 答

(2) 余事象は白球が含まれない事象であるから，

$$1-\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{5}{7}$$ 答

(3) $\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}\times 1+\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$

(4) A ：箱 A から赤球 1 個，白球 1 個を取り出す事象

B ：箱 B から白球を取り出す事象とする

求める確率は $P_B(A)$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

ここで，

$$P(B)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7},\ P(A\cap B)=\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$$

よって，

$$P_B(A)=\frac{2}{3}$$ 答

確認問題5

ある町の住人を任意に 3 人選んで 1, 2, 3 と番号をつけ，それぞれの人の生まれた曜日を調べる．ただし，町の人口は十分多く，その中でどの曜日に生まれた人も同じ割合でいるとする．3 人のうち少なくとも 2 人が同じ曜日生まれであるという事象を A，1 番の人が日曜日生まれであるという事象を B, また 3 人全員が同じ曜日生まれであるという事象を C とする．

(1)　事象 A の確率を求めよ．

(2)　事象 A と B とは独立であることを示せ．

(3)　事象 C が起こらないことがあらかじめわかったときの事象 A の条件つき確率を求めよ．

(解説)

(1) $P(\mathrm{A})=1-P(\overline{\mathrm{A}})=1-\dfrac{7\cdot6\cdot5}{7^3}=\dfrac{19}{49}$　答

(2) $P(\mathrm{B})=\dfrac{1}{7}$

$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=1-P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})$

ここで，

$$P(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}})=P(\overline{\mathrm{A}})+P(\overline{\mathrm{B}})-P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})$$
$$=\frac{7\cdot6\cdot5}{7^3}+\frac{6}{7}-\frac{6\cdot6\cdot5}{7^3}=\frac{324}{343}$$

よって，

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{19}{343}$$

よって，$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P(\mathrm{B})$ より，事象 A と B とは独立である　終

(3) 求める確率は $P_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A})$

$$P_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}})}{P(\overline{\mathrm{C}})}$$

ここで，

$$P(\overline{\mathrm{C}})=1-\frac{7}{7^3}=\frac{48}{49},$$

$$P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}})=P(\mathrm{A})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\frac{19}{49}-\frac{1}{49}=\frac{18}{49}$$

よって，$P_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{A})=\dfrac{18}{48}=\dfrac{3}{8}$　答