3.6　空間図形の計量

(1) 空間図形の計量

例1

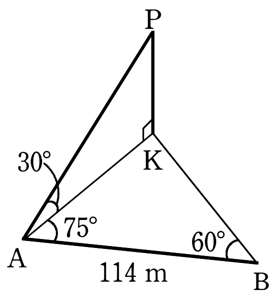
あるタワーが立っている地点 K と同じ標高の地点 A からタワーの先端の仰角を測ると30°であった。また，地点 A から $\mathrm{AB}=114$ (m) となるところに地点 B があり，$\angle\mathrm{KAB}=75^\circ$ および $\angle\mathrm{KBA}=60^\circ$ であった。

このとき，AK の距離は ${}^{ア}\boxed{}$ m，タワーの高さは ${}^{イ}\boxed{}$ m である。

(解説)

$\angle\mathrm{AKB}=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

$\triangle\mathrm{KAB}$において，正弦定理より



$$\frac{\mathrm{AK}}{\sin 60^\circ}=\frac{114}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore\ \mathrm{AK}=\frac{114\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=114\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$={}^{ア}57\sqrt{6}\ \ (\mathrm{m})$$

タワーの先端を P とすると，タワーの高さ PK は

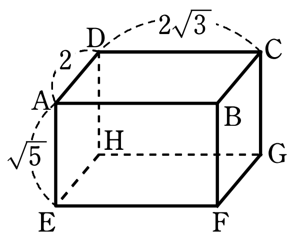
$$\mathrm{PK}=\mathrm{AK}\tan 30^\circ=57\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}={}^{イ}57\sqrt{2}\ \ (\mathrm{m})$$

例2

図のような直方体 ABCD　EFGH がある。

$\angle\mathrm{ACF}=\theta$ とすると，$\cos\theta={}^{ア}\boxed{}$ であり，

$\triangle\mathrm{AFC}$の面積は ${}^{イ}\boxed{}$ である。また，点 B から $\triangle\mathrm{AFC}$に垂線 BP を下ろすとき，BP の長さは ${}^{ウ}\boxed{}$ である。



(解説)

三平方の定理より

$$\mathrm{AC}=4,\quad \mathrm{CF}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3,\quad \mathrm{FA}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{17}$$

$\triangle$ACF において，余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{4^2+3^2-(\sqrt{17})^2}{2\cdot4\cdot3}$$

$$= \frac{8}{24} = {}^{ア}\frac{1}{3}$$

$\triangle$AFC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CF}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = {}^{イ}4\sqrt{2}$$

四面体 B−ACF の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

また，$V = \dfrac{1}{3}S\cdot\mathrm{BP}$ より

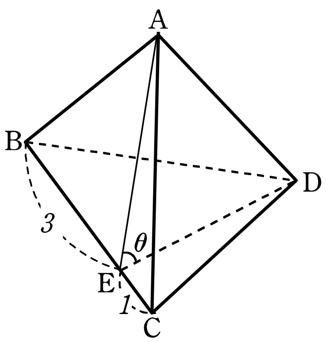
$$\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{2}\cdot\mathrm{BP} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{BP} = {}^{ウ}\frac{\sqrt{30}}{4}$$

例3

正四面体 ABCD の辺 BC を 3：1 に内分する点を E とし，$\angle\mathrm{AED} = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解説



AC$=a$ とすると，EC$=\dfrac{1}{4}a$

$\triangle$ACE において，余弦定理より

$$\mathrm{AE}^2 = a^2+\left(\frac{1}{4}a\right)^2-2\times a\times\frac{1}{4}a\times\cos60^\circ$$

$$= a^2+\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{4}a^2 = \frac{13}{16}a^2$$

AE>0 より，AE$=\dfrac{\sqrt{13}}{4}a$

AE$=$DE より，DE$=\dfrac{\sqrt{13}}{4}a$

△AED において，余弦定理より

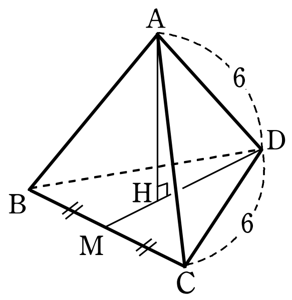
$$\cos\theta=\frac{\frac{13}{16}a^2+\frac{13}{16}a^2-a^2}{2\times\frac{\sqrt{13}}{4}a\times\frac{\sqrt{13}}{4}a}=\frac{5}{13}$$

例4
1 辺の長さが 6 である正四面体 ABCD がある。頂点 A から底面 BCD に下ろした垂線の足を H とするとき，次の問いに答えよ。 (1)　AH の長さを求めよ。 (2)　$\angle \mathrm{ADH}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。 (3)　正四面体の体積を求めよ。

解説

(1) BC の中点を M とすると，

$\mathrm{AM}=\mathrm{DM}=3\sqrt{3}$



△AMD において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{6^2+(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2}{2\cdot6\cdot3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

（$\angle \mathrm{ADH}=\theta$）

$0°<\theta<180°$であるから，$\sin\theta>0$ より

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AD}\sin\theta=6\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$$

別解

H は，△BCD (正三角形) の重心である。

辺 BC の中点を M とすると，H は，線分 DM を 2：1 に内分するから

$$\mathrm{DH}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=2\sqrt{3}$$

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

(2) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) 正四面体の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}$$

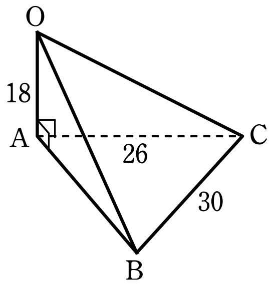
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot6\cdot6\sin60^\circ\right)\times2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$$

例5
四面体 OABC において，BC$=30$，CA$=26$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{5}{13}$，OA$=18$，$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OAC}=90^\circ$ であるとき，辺 AB の長さおよび四面体 OABC の体積を求めよ。

(解説)

AB$=x$ とおくと，

△ABC において，余弦定理より



$$30^2=x^2+26^2-2x\cdot26\cos\angle\mathrm{BAC}$$

$$900=x^2+676-52x\cdot\frac{5}{13}$$

$$x^2-20x-224=0$$

$$(x+8)(x-28)=0$$

$x>0$ より，　$x=28$　　$\therefore$ AB$=28$

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot28\cdot26\cdot\frac{12}{13}=336$$

次に，四面体 OABC の体積を V とすると，

$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OAC}=90^\circ$ であるから，△ABC を底面とみると，辺 OA が高さとなるから，

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{3}\cdot336\cdot18=2016$$

平面 P と直線 l が点 O で交わるとき，l が O を通る P 上の 2 直線に垂直ならば，直線 l と平面 P は垂直となります。

体積の問題では，まず，ある平面に垂直な辺がないかを考えます。あれば，それが高さとなり，すぐに体積が求まります。

例6

四面体 ABCD において，$AB=3$，$AC=AD=5$，$BC=BD=4$，$CD=6$ であるとする。

(1)　三角形 BCD の面積を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の体積を求めよ。

(3)　辺 CD の中点を M，点 B から直線 AM へ下ろした垂線と直線 AM の交点を H とする。このとき，線分 BH の長さを求めよ。

(解説)

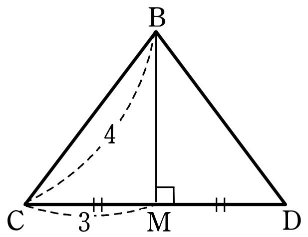
(1) $\triangle$BCD は，$BC=BD=4$ の二等辺三角形であるから，辺 CD の中点を M とすると，

$$BM\perp CD$$

$$BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=\sqrt{7}$$

よって，$\triangle$BCD の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}CD\cdot BM=3\sqrt{7}$$



(2) $\triangle$ABC において

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

$\triangle$ABD において

$$AD^2=AB^2+BD^2$$

よって，

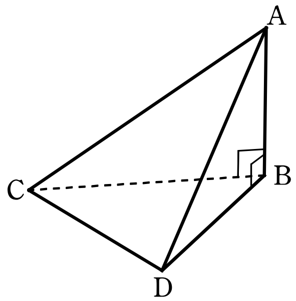
$$\angle ABC=\angle ABD=90^\circ$$

したがって，

$$AB\perp(\text{平面 BCD})$$

よって，四面体 ABCD の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AB=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{7}\cdot 3=3\sqrt{7}$$

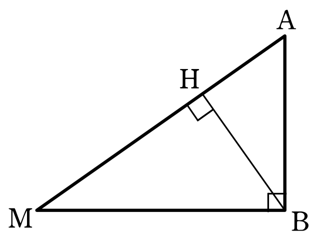


(3) $\triangle$ABM の面積を 2 通りで表して，

$$\frac{1}{2}AM\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 3$$

$AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=4$ より

$$4BH=3\sqrt{7}\qquad\therefore\ BH=\frac{3\sqrt{7}}{4}$$



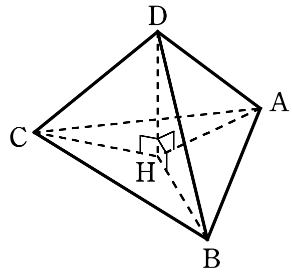
すべての面が，2辺の長さが1，残りの辺の長さが a の二等辺三角形である四面体OABCがある．AB$=a$ とするとき

(1)　辺ABの中点をMとするとき，三角形OMCの面積を a の式で表せ.

(2)　四面体OABCの体積を求めよ.

例7
四面体ABCDにおいて，AB$=3$，BC$=\sqrt{13}$，CA$=4$，DA$=$DB$=$DC$=3$とし，頂点Dから△ABCに垂線DHを下ろす。このとき，DHの長さは ア$\boxed{}$，四面体ABCDの体積は イ$\boxed{}$ である。

解説



DA＝DB＝DCより，
A, B, Cは，Dを頂点とし，3点A, B, Cを通る円の周および内部を底面とする直円錐の底円の周上にあるから，Hは，△ABCの外心である
△ABCにおいて，余弦定理より

$$\cos\angle BAC=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \angle BAC=60^\circ\qquad\therefore\ \sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

△ABCにおいて，正弦定理より

$$AH=\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{13}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2}={}^{ア}\frac{\sqrt{42}}{3}$$

よって，四面体ABCDの体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot DH=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC\times DH$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{42}}{3}={}^{イ}\sqrt{14}$$

1つの頂点から出る3つの辺の長さがすべて同じものがあるとき，それらの3つの辺は，その1つの頂点を頂点とする直円錐の母線となるから，3つの辺の頂点以外の端点は，円錐の底円上にあり，頂点からその底円

に下ろした垂線の足は，底円の中心(3つの辺の頂点以外の3つの端点を結んだ三角形の外心)となります。それを手がかりとして，高さを求めます。

(2) 外接球・内接球

例9
1辺の長さが a の正四面体 ABCD において
(1)　隣り合う2つの面のなす角を θ とするときの $\cos\theta$ の値を求めよ.
(2)　四面体の体積 Vを a を用いて表せ.
(3)　四面体に外接する球の半径 R を a を用いて表せ.
(4)　四面体に内接する球の半径 r を a を用いて表せ.

解説

(1) 頂点 A, D から辺 BC に垂線を下ろすと，各面が正三角形であることから，ともに垂線の足は，辺 BC の中点 M となることより $\theta=\angle\mathrm{AMD}$

$\mathrm{AM}=\mathrm{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ であるから，△AMD において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{3}$$

(2) A から △BCD に下ろした垂線の足を H とすると，
H は，DM 上にあるから，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AM}\sin\theta$$

ここで，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ より

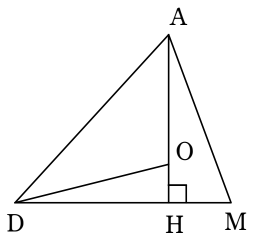
$$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

四面体 ABCD の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

(3) H は，△BCD の重心より

$$\mathrm{DH}=\frac{2}{3}\mathrm{DM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$



$$\mathrm{OH}=\mathrm{AH}-\mathrm{AO}=\frac{\sqrt{6}}{3}a-R$$

△ODH において，三平方の定理より

$$R^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}aR=a^2 \qquad \therefore\ R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

(4) 四面体ABCD＝四面体OABC＋四面体OABD＋四面体OACD＋四面体OBCDより

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\cdot r$$

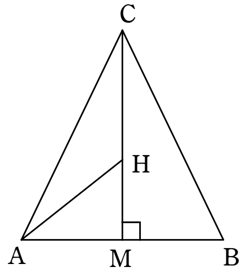
$$\sqrt{2}\,a=4\sqrt{3}\,r \qquad \therefore\ r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$$

例10
半径 r の球面上に 4 点 A，B，C，D がある．四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている．このとき r の値を求めよ．

解説

DA＝DB＝DC より，D から △ABC に下した垂線の足 H は，△ABC の外心に等しい。△ABC は，CA＝CB の二等辺三角形より
C から AB に下した垂線の足を M とすると

$$\mathrm{CM}=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

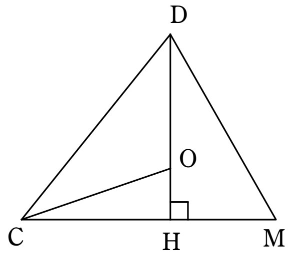


△ABC の外接円の半径を x とすると
△AHMにおいて，三平方の定理より

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{13}\,x=4 \qquad \therefore\ x=\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

また，△DAB も DA＝DB の二等辺三角形より
D から辺 AB に垂線を下ろすと垂線の足は M となる
$\angle\mathrm{CMD}=\theta$ とすると
△CDM において，余弦定理より



$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-2^2}{2\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{5}{13} \qquad \therefore\ \sin\theta=\frac{12}{13}$$

よって

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DM}\sin\theta=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{12}{13}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$$

外接円の中心を O とすると，

△OCH において，三平方の定理より，

$$r^2=\left(\frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{13}}-r\right)^2$$

$$\frac{12}{\sqrt{13}}r=4 \qquad \therefore\ r=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

例11

四角錐 OABCD において，底面 ABCD は 1 辺の長さ 2 の正方形で

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\sqrt{5}$ である。

(1)　四角錐 OABCD の高さを求めよ。

(2)　四角錐 OABCD に内接する球 S の半径を求めよ。

(3)　内接する球 S の表面積と体積を求めよ。

(解説)

(1) O から底面 ABCD に下ろした垂線の足を H とする

A と B の中点を M，C と D の中点を N として，O，M，N を含む平面でこの四角錐を切ると，H は M と N の中点であるから，

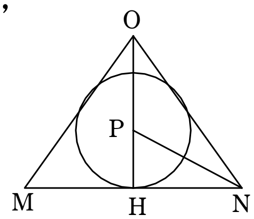
$$\mathrm{MH}=1\ ,\quad \mathrm{OM}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$

$$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

(2) O，M，N を含む平面は，球の中心 P も含むから，

球の半径を r とすると，△PHN において，

△OMN=△POM+△PMN+△PNO より



$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2+2+2)r$$

$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

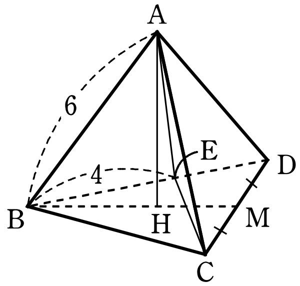
(3) 表面積は，$4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}\pi$

体積は，$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$

(3) 展開図

例12
1辺の長さが6の正四面体 ABCD がある。辺 BD 上に BE$=4$ となるように点 E をとると，四面体 ABCE の体積は $^{ア}\boxed{}$ である。また，辺 AC 上に点 P，辺 AD 上に点 Q をとり，線分 BP，PQ，QE のそれぞれの長さを x，y，z とおく。P と Q を動かして，$x+y+z$ を最小にするとき，$x+y+z$ の値は $^{イ}\boxed{}$ となる。

(解説)



(ア) 点 A から △BCD に下ろした垂線を AH とすると，H は，△BCD の外心かつ重心である
CD の中点を M とすると

$$\mathrm{BH}=\frac{2}{3}\mathrm{BM}=2\sqrt{3}$$

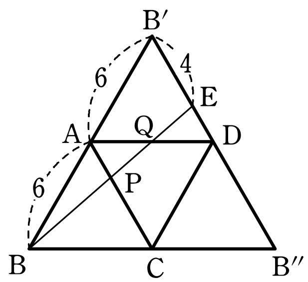
よって

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$$

したがって，四面体 ABCE の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCE}\cdot\mathrm{AH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\sin60^\circ\cdot2\sqrt{6}={}^{ア}12\sqrt{2}$$



(イ) $x+y+z$ が最小となるのは，右の展開図のように B，P，Q，E が一直線上に並ぶときである

右の展開図より，△BB′E において，余弦定理より

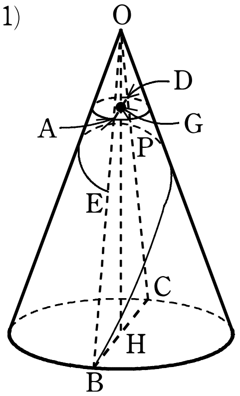
$$\mathrm{BE}^2=12^2+4^2-2\cdot12\cdot4\cos60^\circ=112$$

BE>0 であるから，求める最小値は，BE$={}^{イ}4\sqrt{7}$

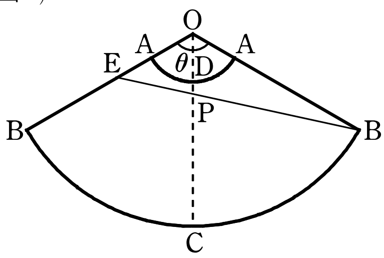
例13

点 H を中心，線分 BC を直径とする円を底面とし，点 O を頂点とする円錐を考える。ただし，線分 OH は底面に対して垂直であるとする。(図 2) は円錐の表面の展開図の底面以外の部分である。(図 1) のように底面に平行な平面で円錐を切断する。この切断面の円と母線 OB との交点を A，母線 OC との交点を D，直線 OH との交点を G とする。さらに，線分 AB 上に点 E をとる。(図 1) で線分の長さが AD$=2$，BC$=8$，GH$=6\sqrt{2}$，AE$=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(図 1)



(図 2)



(1)　線分 AB の長さを求めよ。

(2)　線分 OA の長さと，この展開図の扇形の中心角 θ の大きさを求めよ。

(3)　円錐の表面上で，底面を横切らずに，点 B から母線 OC 上の点を経て点 E に至る最短距離を，この展開図を利用して求めよ。

(4)　母線 OC と (3) の最短距離を与える線の交点を P とする。線分 CP の長さを求めよ。

解説

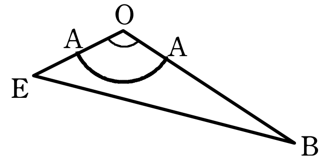
(1) $\triangle$OAG $\backsim$ $\triangle$OBH であり，相似比は 1：4 であるから

　$\mathrm{OH}=8\sqrt{2}$ ，　$\mathrm{OB}=\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}=12$

よって，　$\mathrm{AB}=9$

(2) $\mathrm{OA}=3$

　$2\pi\cdot 12\cdot\dfrac{\theta}{360}=2\pi\cdot 4$　　$\therefore\ \theta=120^\circ$

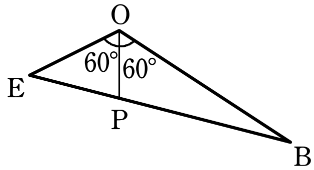


(3) $\mathrm{OE}=\mathrm{OA}+\mathrm{AE}=6$

余弦定理より

　$\mathrm{BE}^2=\mathrm{OE}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OB}\cos 120^\circ$

$$=6^2+12^2-2\cdot 6\cdot 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=252$$



BE>0 より， BE$=\sqrt{252}=6\sqrt{7}$

(4) OP は，∠BOE の二等分線である

OP$=x$ とおくと，

△OBE＝△OEP＋△OBP より

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\cdot\sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot x\cdot\sin 60°$$

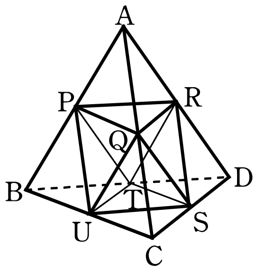
$$18\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{3}x \qquad \therefore\ x=4$$

よって，CP$=$OC$-$OP$=12-4=8$

(4) 正多面体

例14

右の図は，1 辺の長さが 8 である正四面体 ABCD の各辺の中点をとり，それらをそれぞれ P，Q，R，S，T，U として正八面体 PQRSTU を作ったものである。



(1)　2 点 Q，T を結ぶ線分の長さを求めよ。

(2)　正八面体 PQRSTU の体積を求めよ。

(3)　正八面体 PQRSTU の各面の重心をとり，辺を共有している面の重心を線分で結ぶと，正八面体 PQRSTU の内部に立方体を作ることができる。この立方体の体積を求めよ。

解説

(1) 線分 QT は，四角形 QUTR の対角線である

$$\text{QU}=\text{UT}=\text{TR}=\text{RQ}=\frac{1}{2}\text{AB}=4$$

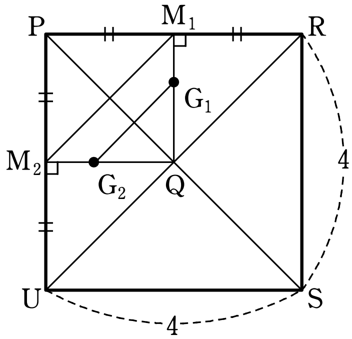
四角形 QUTR は，1 辺が 4 の正方形であるから，

その対角線 QT$=4\sqrt{2}$

(2) 正八面体 PQRSTU は，底面が正方形 PUSR，高さが $\frac{1}{2}$QT の 2 つの正四角錐に分けられる

PU＝US＝SR＝RP＝4 であるから，求める体積 V_1 は

$$V_1=\left(\frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot \frac{4\sqrt{2}}{2}\right)\times 2=\frac{64\sqrt{2}}{3}$$



(3) △QRP，△QPU の重心をそれぞれ G_1，G_2 とする

また，辺 PR，PU の中点をそれぞれ M_1，M_2 とすると

$$M_1M_2=2\sqrt{2}$$

$$G_1G_2=\frac{2}{3}M_1M_2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

これが題意の立方体の 1 辺の長さであるから，求める体積 V_2 は

$$V_2=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^3=\frac{128\sqrt{2}}{27}$$

確認問題1

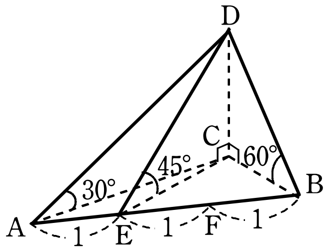
三角錐 ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である．AB＝3 で，辺 AB 上の 2 点 E，F は，AE＝EF＝FB＝1 を満たし，∠DAC＝30°，∠DEC＝45°，∠DBC＝60° である．

(1)　辺 CD の長さを求めよ．

(2)　$\theta=\angle\mathrm{DFC}$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

解説

(1) $\mathrm{CD}=x$ とおくと



$$\mathrm{AC}=\sqrt{3}\,x,\ \mathrm{CE}=x,\ \mathrm{BC}=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

$\angle\mathrm{CAB}=\varphi$ とおくと，

△ACE において，余弦定理より

$$x^2=1^2+(\sqrt{3}\,x)^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}\,x\cdot\cos\varphi$$

$$\therefore\ 2x^2-2\sqrt{3}\cos\varphi\cdot x+1=0\ \cdots①$$

△ACB において，余弦定理より

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=3^2+(\sqrt{3}\,x)^2-2\cdot3\cdot\sqrt{3}\,x\cdot\cos\varphi$$

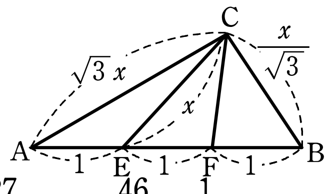
$$\therefore\ 8x^2-18\sqrt{3}\cos\varphi\cdot x+27=0\ \cdots②$$

9×①－②より

$$10x^2-18=0$$

$x>0$ より，$x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　$\therefore\ \mathrm{CD}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　答

(2) (1)より



$$\mathrm{AC}=\frac{3\sqrt{15}}{5},\ \cos\varphi=\frac{23}{6\sqrt{15}}$$

△ACF において，余弦定理より

$$\mathrm{CF}^2=\left(\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{5}\cdot2\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}}=\frac{27}{5}+4-\frac{46}{5}=\frac{1}{5}$$

$\mathrm{CF}>0$ より，$\mathrm{CF}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\mathrm{DF}=\sqrt{\mathrm{CD}^2+\mathrm{CF}^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{2}$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{DF}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\div\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　答

確認問題2

1辺の長さが1の正四面体OABCの辺BC上に点Pをとり，線分BPの長さを x とする．

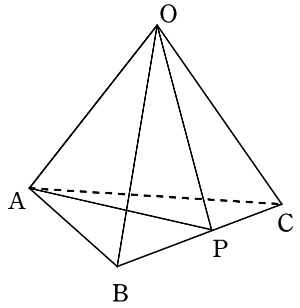
(1)　三角形OAPの面積を x で表せ．

(2)　Pが辺BC上を動くとき三角形OAPの面積の最小値を求めよ．

解説

(1) △ABPにおいて，余弦定理より

$$\mathrm{AP}^2=1^2+x^2-2\cdot1\cdot x\cdot\cos60^\circ$$
$$=x^2-x+1$$



AP>0より， $\mathrm{AP}=\sqrt{x^2-x+1}$

同様に， $\mathrm{OP}=\sqrt{x^2-x+1}$

PからOAに垂線PHを下ろすと，

△OAPは，PO=PAの二等辺三角形より

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{x^2-x+\frac{3}{4}}$$

△OAPの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+\frac{3}{4}}$$ 答

(2) $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}$ $(0\leqq x\leqq1)$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小で，

最小値　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　答

確認問題3

四面体 OABC において，OA＝OB＝BC＝CA＝3，OC＝AB＝$2\sqrt{2}$ とする。また，辺 AB の中点を M とする。

(1)　$\cos\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$，$\mathrm{OM}=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，

三角形 OAB の面積は $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　$\cos\angle\mathrm{OMC}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，三角形 OMC の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(3)　四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(4)　点 P が辺 BC 上を動くとき，OP のとりうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}\leqq \mathrm{OP}\leqq \boxed{\text{ソ}}$$

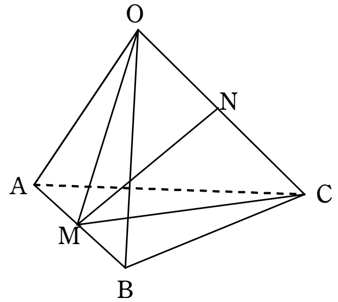
である。

(解説)

(1) △OAB において，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{3^2+(2\sqrt{2})^2-3^2}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{8}{2\cdot3\cdot2\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}3}\sqrt{{}^{ウ}2}\ \text{(答)}$$



△OAB は，二等辺三角形であるから，

OM は，AB の垂直二等分線より

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}\quad\text{(答)}$$

△OAB の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OM}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{{}^{オ}14}\quad\text{(答)}$$

(2) △OAB≡△CAB より， $\mathrm{CM}=\mathrm{OM}=\sqrt{7}$

$\triangle$OMCにおいて，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{OMC}=\frac{(\sqrt{7})^2+(\sqrt{7})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{6}{2\cdot 7}=\frac{^{カ}3}{^{キ}7}$$ 答

辺 OCの中点を Nとすると，
$\triangle$OMCは二等辺三角形で，MNは辺 OCの垂直二等分線より

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{OM}^2-\mathrm{ON}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$$

$\triangle$OMCの面積 S_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{^{ク}10}$$ 答

(3) OM$\perp$AB，CM$\perp$ABより，$\triangle$OMC$\perp$AB
四面体 OABCの体積を V とすると

$$V=2\times(\text{四面体 OAMCの体積})$$
$$=2\times\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OMC}\cdot\mathrm{AM}$$
$$=2\times\frac{1}{3}\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}=\frac{^{ケ}4}{^{コ}3}\sqrt{^{サ}5}$$ 答

(4) $\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{BCO}$ であるから，$\triangle$BCOの面積は $\sqrt{14}$
Oから辺 BCに下ろした垂線の長さを h とすると

$$\triangle\mathrm{BCO}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot h \quad \therefore\ h=\frac{2\sqrt{14}}{3}$$

よって

$$\frac{^{シ}2}{^{ス}3}\sqrt{^{セ}14}\leqq\mathrm{OP}\leqq{}^{ソ}3$$ 答

別解

確認問題4

四面体 ABCD において，AB＝CD＝4，AC＝BD＝6，BC＝5 である。

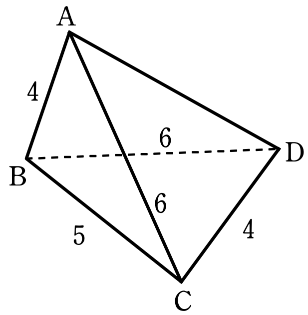
(1) $\cos\angle ABC =$ ア$\boxed{}$ であり，△ABC の面積は イ$\boxed{}$ である。

(2) AD のとりうる長さの範囲は ウ$\boxed{}$ ＜AD＜ エ$\boxed{}$ である。

(3) ABCD の体積は，AD＝ オ$\boxed{}$ のとき最大となり，その最大値は カ$\boxed{}$ である。

解説

(1) △ABC において，余弦定理より



$$\cos\angle ABC = \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5} = {}^{ア}\frac{1}{8}$$ 答

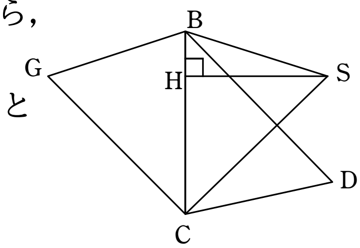
$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\cos^2\angle ABC}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = {}^{イ}\frac{15\sqrt{7}}{4}$$ 答

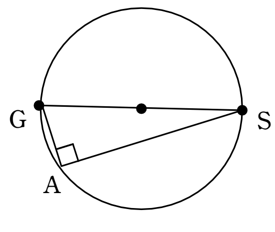
(2) A を平面 BCD に含まれるところ(S)から，BC を軸として，△ABC を A と BC に関して対称であるところ(G)まで回転させると考える



AD を BC を軸として回転させた円柱を考えると，右図において，

三平方の定理より，SG≧SA であるから，

SD＜AD＜GD



$$SH = SB\sin\angle ABC = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$BH = SB\cos\angle ABC = \frac{1}{2}$$ であるから，

$SD = BC-2BH = 4$，　$GD = \sqrt{(3\sqrt{7})^2+4^2} = \sqrt{79}$ より

${}^{ウ}4 < AD < {}^{エ}\sqrt{79}$ 答

(3) AH ⊥平面BCDのとき，体積 V は最大で，このとき，

$$\mathrm{AD}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2+4^2}=\frac{\sqrt{190}}{2}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{2}=\frac{105}{8}$$ 答

確認問題5

AB＝5，BC＝7，CA＝8 および OA＝OB＝OC＝t を満たす四面体 OABC がある。

(1)　∠BAC を求めよ。

(2)　△ABC の外接円の半径を求めよ。

(3)　4 つの頂点 O，A，B，C が同一球面上にあるとき，その球の半径が最小になるような実数 t の値を求めよ。

解説

(1) △ABC において，余弦定理より

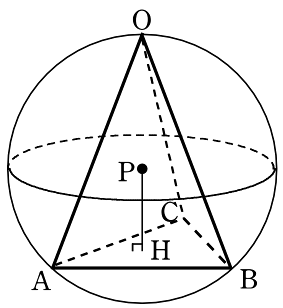
$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ 答

(2) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}=\frac{7}{2\sin 60^\circ}=\frac{7}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$ 答



(3) OA＝OB＝OC より，A, B, C は，O を頂点とし，A, B, C を通る円の内部および周を底面とする直円錐の底円の周上にある

これが球の中心を含む平面となるとき，

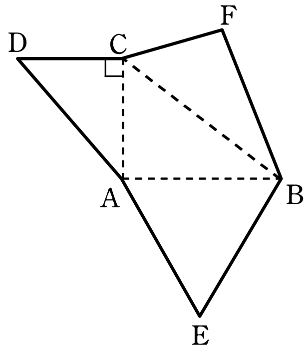
外接球の半径は最小となる

このとき，外接球の半径は $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ より

$$t=\sqrt{2}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}=\frac{7\sqrt{6}}{3}$$ 答

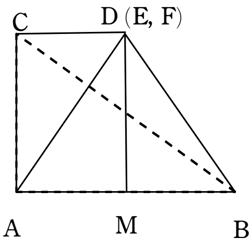
確認問題6

図はある三角錐 V の展開図である。ここで $AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，$\angle ACD=90^\circ$ で $\triangle ABE$ は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。



(解説)

V の底面を $\triangle ABC$ として組み立てたものを上から見ると，図のようになる



D (E, F) から A, B, C を含む平面に下ろした垂線を DH，AB に下ろした垂線を DM とすると，

$$DH=\sqrt{DM^2-HM^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$$

よって，V の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot DH=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$ (答)

確認問題7

1 辺の長さが 1 の正二十面体 W のすべての頂点が球 S の表面上にあるとき，次の問いに答えよ。なお，正二十面体は，すべての面が合同な正三角形であり，各頂点は 5 つの正三角形に共有されている。

(1) 正二十面体の頂点の総数を求めよ。

(2) 正二十面体 W の 1 つの頂点を A，頂点 A からの距離が 1 である 5 つの頂点を B，C，D，E，F とする。$\sin 36^\circ=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を用いて，正五角形 BCDEF の外接円の半径 R と対角線 BE の長さを求めよ。

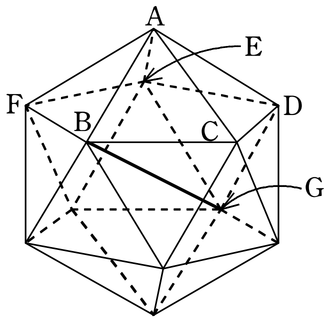
(3) 2 つの頂点 D，E からの距離が 1 である 2 つの頂点のうち，頂点 A でない方を G とする。球 S の直径 BG の長さを求めよ。

(4) 球 S の中心を O とする。$\triangle DEG$ を底面とする三角錐 ODEG の体積を求めよ。

(解説)

(1) 1つの面の頂点の数は3，面の数は20，
1つの頂点に集まる面の数は5より

$$\frac{3\times20}{5}=12\ (\text{個})$$ 答



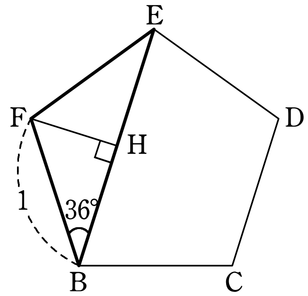
(2) 正五角形BCDEFの外接円は△BEFの外接円と等しい
△BEFにおいて，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{EF}}{\sin 36^\circ}=2R \quad \therefore\ R=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

FからBEに下ろした垂線をFHとする

$$\cos 36^\circ=\sqrt{1-\sin^2 36^\circ}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

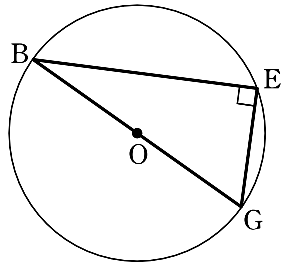
$$\mathrm{BE}=2\mathrm{BH}=2\mathrm{BF}\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ 答



(3)　頂点B，E，Gは球Sの表面上にあり，BGは球Sの直径であるから，△BEGは直角三角形である

$$\mathrm{BG}^2=\mathrm{BE}^2+\mathrm{EG}^2$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{BG}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$ 答

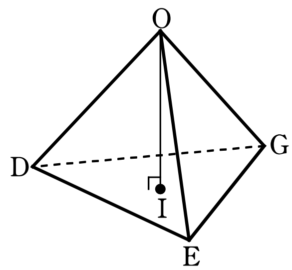


(4) △DEGの外心 (重心) をIとすると，OIが三角錐ODEGの高さである。

$$\mathrm{GI}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{OI}^2=\mathrm{OG}^2-\mathrm{GI}^2=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{1}{3}=\frac{14+6\sqrt{5}}{48}$$

$$\therefore\ \mathrm{OI}=\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$



よって，三角錐ODEGの体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{5}}{48}$$ 答

$\boxed{\text{参考}}$

この結果から，正20面体の体積は，O を頂点として，各面を底面とする三角錐をすべて足したものであるから，

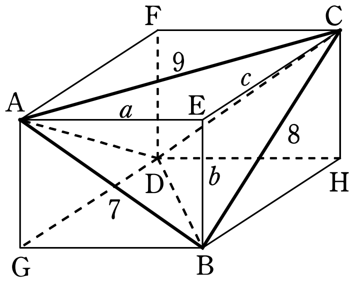
$$20\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{48}=\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$$

発展 等面四面体

4つの面が合同な三角形からなる四面体を**等面四面体**といい，等面四面体は，必ず直方体に埋め込むことができます。この定理を知っていると簡単に解ける問題があるので，知っていて損はない。

例1 四面体 ABCD は，4つの面のどれも3辺の長さが7，8，9の三角形である。この四面体 ABCD の体積は $\boxed{}$ である。

解説



四面体 ABCD は，図のような直方体に埋め込むことができる。

直方体の辺の長さを AE$=a$，BE$=b$，CE$=c$ とおくと

$a^2+b^2=7^2$，$b^2+c^2=8^2$，$c^2+a^2=9^2$

$\therefore\ a^2=33$，$b^2=16$，$c^2=48$

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より

$a=\sqrt{33}$，$b=4$，$c=4\sqrt{3}$

四面体 ABCD は，直方体から，4つの四面体 ABCE，BCDH，ACDF，ABDG を切り取ったものであるから，求める体積は

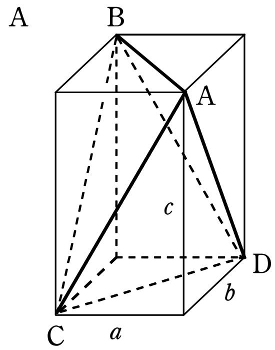
$$abc-4\times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot abc\right)=\frac{1}{3}abc=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{33}\cdot4\cdot4\sqrt{3}=16\sqrt{11}$$

例2
半径 r の球面上に異なる 4 点 A，B，C，D がある。

$$AB=CD=\sqrt{2}，\ AC=AD=BC=BD=\sqrt{5}$$

であるとき，r を求めよ。

解説



四面体 ABCD は，等面四面体より，
右の図のような直方体に埋め込める
直方体3辺の長さを，図のように a, b, c とおくと

$$a^2+b^2=2,\ b^2+c^2=5,\ c^2+a^2=5$$

$$\therefore\ a^2=1,\ b^2=1,\ c^2=4$$

$$\therefore\ a=1,\ b=1,\ c=2$$

この直方体に外接する球の半径が r であるから
直方体の対角線の長さは $\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$ より

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

例3
(1)　半径 1 の球が正四面体のすべての面に接しているとき，この正四面体の 1 辺の長さは $\boxed{}$ である。
(2)　半径 1 の球が正四面体のすべての辺に接しているとき，この正四面体の 1 辺の長さは $\boxed{}$ である。

解説

(1) 正四面体の 1 辺の長さを a とする
正四面体は，等面四面体であるから，
1 辺の長さが $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ の立方体に埋め込める
よって，正四面体の体積 V は，

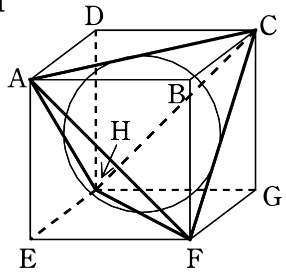
$$V=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

四面体の内接球の中心を O とすると，
四面体 ABCD = 四面体 OABC + 四面体 OABD + 四面体 OACD
+ 四面体 OBCD より

$$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ\cdot 1$$

$$\sqrt{2}\,a=4\sqrt{3} \qquad \therefore\ a=2\sqrt{6}$$

(2) 正四面体は，図のような立方体 ABCD－EFGH に埋め込めるから，



(1)より，正四面体のすべての辺に接する球の半径は $\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ より

$$\frac{a}{2\sqrt{2}}=1 \qquad \therefore\ a=2\sqrt{2}$$

次に，等面四面体ができる条件について考えてみます。一般に，

等面四面体ができる $\Leftrightarrow$ 各面が鋭角三角形である

が成り立ちます。実際に大学入試で出題された問題で確認してみます。例4 は，→ の証明で名古屋大，例5 は，← の証明で京都大で出題されたものです。

例4

四面体 ABCD において，

AB＝CD, AC＝BD, AD＝BC

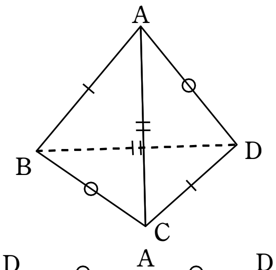
が成立するならば，三角形 ABC は鋭角三角形であることを示せ.

解説

条件より，四面体 ABCD は

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA \equiv \triangle BAD$

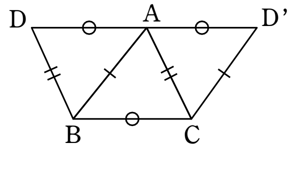
の等面四面体である



$\angle BAC=\alpha,\ \angle ABC=\beta,\ \angle ACB=\gamma$ とすると，

$\angle BAD=\beta,\ \angle CAD'=\gamma$

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ であるから，



$\alpha\geqq 90^\circ$ とすると，$\beta+\gamma\leqq 90^\circ$ であり，

AB と AC を折り目として折っても

AD と AD' を重ねて立体 (四面体) を作ることができないので矛盾

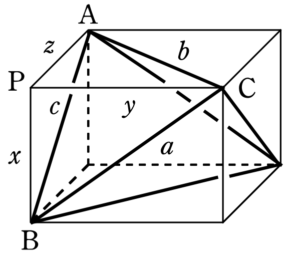
よって，$\alpha<90^\circ$　同様にして，$\beta,\gamma<90^\circ$

したがって，$\triangle$ ABC は鋭角三角形である

例5
△ABCは鋭角三角形とする．このとき，各面すべてが△ABCと合同な四面体が存在することを示せ．

(解説)

(縦，横，高さの長さがそれぞれ x, y, z である直方体から，図のように，4つの四面体を切り取って四面体を作ると，各面すべてが△ABCと合同な四面体が得られる．
また，∠ABC＜∠APCであるから，∠ABCは，鋭角であり，同様に，∠BCA, ∠CABも鋭角なので，△ABCは，鋭角三角形である．
これを前提として，)



BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．
△ABCは，鋭角三角形より

$$a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2 \cdots ①$$

(前提より) $x^2+y^2=a^2$，$y^2+z^2=b^2$，$z^2+x^2=c^2$ とすると

$$\therefore x^2=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2),\ y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),\ z^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

①より，3つの式の右辺は，いずれも正であり，これらを満たす正の数 x，y，z が存在するから，図のような直方体が存在し，そこから図のように4つの四面体を切り取って四面体を作ると，各面すべてが△ABCと合同な四面体が得られる．
したがって，△ABCが鋭角三角形ならば，各面すべてが△ABCと合同な四面体は存在し，その四面体は，直方体に埋め込むことができる。