第2章　確率

2.1　確率(1)

(1) **確率の定義**

　1個のさいころを投げるとき，出る目の数は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のうちのどれかですが，そのどれであるかは偶然によって決まります。このように，同じ状態のもとで繰り返すことができ，その結果が偶然によって決まる実験や観測などを**試行**といい，その結果として起こる事柄を**事象**といいます。

　一般に，ある試行において，起こりうる場合全体の集合を全体集合 U とするとき，この試行におけるどの事象も U の部分集合で表すことができます。全体集合 U で表される事象を**全事象**，U の1個の要素からなる集合で表される事象を**根元事象**といいます。1個のさいころを投げる試行の根元事象は，

　$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

です。

　1個のさいころを投げるとき，どの目が出ることも同程度に期待できます。一般に，ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**といいます。根元事象が同様に確からしい試行で，起こりうるすべての場合の数を N，事象 A の起こる場合の数を a とするとき，$\dfrac{a}{N}$ を事象 A の**確率**といい，$P(A)$ と表します。

確率の定義

$$P(A) = \frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{a}{N}$$

定義からわかるように，確率 $P(A)$ とは，全事象に対する事象 A が起こる割合です。

例1
各面に $1,1,1,2,2,3$ と書かれたサイコロがある。
(1) 目の出方は全部で何通りか。
(2) 1 が出る確率を求めよ。

解説
(1) $1,2,3$ の 3 通り
(2) 根元事象を $\{1\},\{2\},\{3\}$ として，求める確率は

$$\frac{1}{3}$$

とするのは誤りです。
根元事象を $\{1\},\{2\},\{3\}$ とすると，これらの目が出る比は $3:2:1$ であり，これらは同様に確からしくはありません。
この場合，根元事象を $\{1_1\},\{1_2\},\{1_3\},\{2_1\},\{2_2\},\{3\}$ とすると，これらは同様に確からしい。よって，求める確率は，

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

このように，確率では区別できないものも区別して考えること (この場合，1, 2 の目は区別できないが区別する) が基本となります。場合の数と確率では数え方が異なるので注意が必要です。

(2) サイコロと確率

例2
2 個のサイコロを同時に投げるとき，目の和が 7 となる確率を求めよ。

解説
(解A)
目の出方は
例えば，$(1,2)$ と $(2,1)$ は見分けがつかないので，
全部で

$$6+\frac{36-6}{2}=21 \text{ 通り}$$

そのうち，目の和が 7 となるのは，
$(1,6),(2,5),(3,4)$
の 3 通り
よって，求める確率は

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

(解B)

目の出方は全部で 36 通り

そのうち，目の和が 7 となるのは，

$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

の 6 通り

よって，求める確率は

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

解A と解Bのどちらが正しいか，よく考えてみてください。

解Bの方が正解です。解A のように根元事象を見た目の 21 通りとしてしまうと，サイコロの目が同じ場合 (ゾロ目) と異なる場合の出る比が 1 : 2 となり，21 通りがそれぞれ同様に確からしくありません。

それに対して，解Bのように根元事象を $(1,2)$ も $(2,1)$ も区別して考えて 36 通りとすれば，この 36 通りはそれぞれ同様に確からしくなります。

このように，サイコロの問題は，サイコロに区別があってもなくてもサイコロを区別して考えることが基本となります。

例3
3 個のサイコロを同時に投げるとき，次の確率を求めよ．
(1)　出た目の数の和が 10 である確率
(2)　出た目の数の和が偶数である確率
(3)　偶数の目が少なくとも 1 つ出る確率

解説

(1) 目の数の和が 10 となる組合せは

$(1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 2,\ 6),\ (2,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 4)$

よって，求める確率は

$$\frac{3!\times3+\dfrac{3!}{2!}\times3}{6^3}=\frac{(6+3)\times3}{6^3}=\frac{1}{8}$$

(2) 目の数の和が偶数となるとき，

3 つとも偶数か1 つが偶数で 2 つが奇数となればよいから，

求める確率は

$$\frac{3^3+{}_3\mathrm{C}_1\times3\times3^2}{6^3}=\frac{1+3}{2^3}=\frac{1}{2}$$

(3) 3 個すべて奇数の目が出る事象の余事象の確率より

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{7}{8}$$

注 後ほど詳しく扱いますが，事象 A に対して， A が起こらないという事象を A の余事象といい， $\overline{A}$ と表します。このとき，事象 A は起こるか起こらないかのどちらかであるから，

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad \therefore P(\overline{A})=1-P(A)$$

となります。

例4
(1) 1 つのさいころを続けて 3 回投げるとき，出る目の数を順に X, Y, Z とする．このとき$X<Y<Z$ である確率を求めよ．
(2) 1 つのサイコロを続けて 3 回投げて，出た目を順に a_1， a_2， a_3 とする。このとき，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ となる確率を求めよ。

解説

(1) 6 つの目から異なる 3 つ選んで小さい順に X, Y, Z とすればよいから，

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{6^3}=\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

(2) 1 から 6 までの 6 つの目から重複を許して 3 つ選んで，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ となるように a_1, a_2, a_3 とすればよいから，

$$\frac{\frac{8!}{3!5!}}{216}=\frac{7}{27}$$

じゃんけんの問題について考えます。じゃんけんは，それぞれの面がグー，チョキ，パーと書かれた 3 面のサイコロを人数分転がすと考えると簡単です。同様に，コイン投げの問題は，2 面のサイコロと考えます。つまり，サイコロ，じゃんけん，コイン投げは同じように考えることができます。

例5

(1)　4人で1回じゃんけんして2人が勝ち，2人が負ける確率を求めよ．

(2)　4人で1回じゃんけんして勝負がつかない確率を求めよ．

(3)　5人で1回じゃんけんして3人が勝ち，2人が負ける確率を求めよ．

(4)　5人で1回じゃんけんして勝負がつかない確率を求めよ．

解説

(1) $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{3^4}=\dfrac{2}{9}$　$\leftarrow\dfrac{\text{だれが勝つか}\times\text{どの手で勝つか}}{\text{手の出方全体}}$

(2) あいこ＝1－勝負がつくより (余事象)

$$1-\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1}{3^4}=1-\frac{3({}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3)}{3^4}$$

$$=1-\frac{2^4-2}{3^3}=\frac{13}{27}$$

別解

勝負がつくとき，手の種類が2種類より，

余事象を利用して，

$$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_2(2^4-2)}{3^4}=\frac{13}{27}$$

(3) $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\dfrac{10}{81}$

(4) $1-\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2(2^5-2)}{3^5}=\dfrac{17}{27}$

例6

n 人がじゃんけんを1回行うとき，あいこになる確率を求めよ．

解説

$$1-\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\times{}_3\mathrm{C}_1}{3^n}$$

$$=1-\frac{3({}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})}{3^n}$$

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$ であるから，

${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^n-2$ より

$$=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$$

別解

$$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)}{3^n}=\frac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$$

(3) 順列と確率

例7
それぞれ A，B，C，D，E，F の 1 文字が書いてあるカード 6 枚を横 1 列に並べるとき，A と B のカードが両端にくる確率は ア$\boxed{}$ である．
また，A が B より左にある確率は イ$\boxed{}$ である．

解説

(ア) $\frac{2!\times 4!}{6!}=\frac{1}{15}$

(イ) $\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times 4!}{6!}=\frac{1}{2}$

例8
$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$，$\boxed{\mathrm{D}}$，$\boxed{\mathrm{E}}$ と書かれた 5 枚のカードを横一列に並べたとき，母音が隣り合うか，または子音が隣り合う確率を求めよ。

解説

5 枚のカードを横一列に並べる並べ方全体を U，
母音が隣り合う並べ方を A，子音が隣り合う並べ方を B とすると，

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$\overline{A}\cap\overline{B}$ は，母音が隣り合わず，かつ，子音も隣り合わない並べ方であるから，まず，子音を並べて，その間に母音を並べると考えて，

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=3!\times 2!=12$$

よって，

$$P(A\cup B)=\frac{5!-12}{5!}=\frac{9}{10}$$

例9
SUCCESS の 7 文字をすべて使ってできる順列のうち，最初の文字と最後の文字がともに C となる確率を分数で答えよ。

(解説)

同じものも区別して考えて，(CはC$_1$, C$_2$，SはS$_1$, S$_2$,, S$_3$とみて)

$$\frac{2\times 5!}{7!}=\frac{1}{21}$$

同じものは区別しないで考えて，

$$\frac{\dfrac{5!}{3!}}{\dfrac{7!}{3!2!}}=\frac{1}{21}$$

としてもできますが，確率では同じものも区別して考えるのが基本です。
この場合，同じものを区別して考えた7! 通りから，同じものを区別しない場合の数を考えるとき， 7! 通りそれぞれが 3!×2! 通りずつ重複しているので，7 文字をランダムに並べたとき，この $\dfrac{7!}{3!2!}$ 通りは，同程度で出現する，すなわち，同様に確からしくなります。
このように，同じものを含む順列でもそのすべてを並べるときは，同じものを区別しないで考えても問題は起こりません。ところが，同じものを含む順列でもその一部を選んで一列に並べるようなときは，同じものを区別しないで考えると問題が起きてしまいます。

例10 KANAGAWAの 8 文字から無作為に 6 文字を取り出し 1 列に並べるとき，KAGAWAと並ぶ確率を求めよ。

(解説)

同じものも区別して考えて，

$$\frac{1\cdot 4\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 2}{{}_8P_6}=\frac{1}{840}$$

これを，同じものを区別しないで考えると，並べ方は全部で，

Aを 2 つ含む場合は， $\dfrac{6!}{2!}=360$ 通り

Aを 3 つ含む場合は， ${}_4C_3\times\dfrac{6!}{3!}=480$ 通り

Aを 4 つ含む場合は， ${}_4C_2\times\dfrac{6!}{4!}=180$ 通り

より， $360+480+180=1020$ 通り

よって，$\dfrac{1}{1020}$

となり，これは誤りです。

同じものを区別した ${}_8P_6=20160$ 通りのうち，

A を 2 つ含む ${}_6C_2\times4\cdot3\cdot4!=4320$ 通りは ${}_4P_2$ 通りずつの重複

A を 3 つ含む ${}_6C_3\times4\cdot3\cdot2\times{}_4P_3=11520$ 通りは ${}_4P_3$ 通りずつ重複

A を 4 つ含む ${}_6C_4\times4!\times{}_4P_2=4320$ 通りは 4! 通りずつ重複しています。

つまり，6 文字をランダムに並べたとき，A を 2 つ含む 360 通りと 3 つ含む 480 通りと 4 つ含む 180 通りのそれぞれは，${}_4P_2:{}_4P_3:4!$ の比で出現します。つまり，同じものを区別しないで考えた 1020 通りは，同様に確からしくありません。よって，この 1020 通りを根元事象の数として確率を求めるのは誤りです。

このように，確率の問題では，同じものを区別しないで考えてもよいこともありますが，区別しないと誤りになってしまうこともあります。

したがって，確率の問題では，同じものも区別して考えることが基本となります。

確認問題1 A, B, Cの3人が同時にさいころを振り，出た目をそれぞれ a, b, c とするとき (1)　$100a+10b+c$ が3で割り切れる確率を求めよ． (2)　$100a+10b+c$ が7で割り切れる確率を求めよ．

(解説)

(1) $100a+10b+c=3(33a+3b)+a+b+c$ であるから，
$a+b+c$ が3の倍数となる場合を考えればよい
任意の (a, b) の組に対して，$a+b+c$ が3の倍数となるような c は2通りあるから，

$$\frac{6^2\times2}{6^3}=\frac{1}{3}$$ 答

(2) $100a+10b+c=7(14a+b)+2a+3b+c$ であるから，
$2a+3b+c$ が7の倍数となる場合を考えればよい
$2a+3b$ が7の倍数とならなければ，$2a+3b+c$ を7の倍数とするような c が1つ存在する
$2a+3b$ が7の倍数となるとき，

$$(a, b)=(1, 4), (2, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 6), (6, 3)$$

よって，

$$\frac{5\times6}{6^3}=\frac{5}{36}$$ 答

確認問題2
1から9までの番号が1つずつ書かれた9枚のカードから無作為に1枚を取り出し，その番号を確認してもとにもどす。この試行を4回行う。カードに書かれた番号を取り出した順に a_1，a_2，a_3，a_4 とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 がすべて異なる確率を求めよ。

(2)　a_1，a_2，a_3，a_4 が異なる2種類の番号をそれぞれ2個ずつ含む確率を求めよ。

(3)　$a_1<a_2<a_3<a_4$ となる確率を求めよ。

(4)　$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ となる確率を求めよ。

解説

(1) $\dfrac{{}_9\mathrm{P}_4}{9^4}=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{9^3}=\dfrac{112}{243}$　答

(2) $\dfrac{{}_9\mathrm{C}_2\times\dfrac{4!}{2!2!}}{9^4}=\dfrac{4\times6}{9^3}=\dfrac{8}{243}$　答

(3) 1から9から異なる4個の数を選んで，
それを小さい方から順に a_1, a_2, a_3, a_4 とすればよいから，

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_4}{9^4}=\frac{\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{9^4}=\frac{2\cdot7}{9^3}=\frac{14}{729}$$ 答

(4) 1から9から重複を許して4個の数を選んで，
$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ となるように a_1, a_2, a_3, a_4 を決めればよいから，

$$\frac{\dfrac{12!}{4!8!}}{9^4}=\frac{\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{9^4}=\frac{11\cdot5}{9^3}=\frac{55}{729}$$ 答

確認問題3
複数の参加者がグー，チョキ，パーを出して勝敗を決めるジャンケンについて，以下の問いに答えよ。ただし，各参加者は，グー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。
(1)　4人で一度だけジャンケンをするとき，1人だけが勝つ確率，2人が勝つ確率，3人が勝つ確率，引き分けになる確率をそれぞれ求めよ。
(2)　n 人で一度だけジャンケンをするとき，r 人が勝つ確率を n と r を用いて表せ。ただし，$n \geqq 2$，$1 \leqq r < n$ とする。
(3)　$\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n - 2$ が成り立つことを示し，n 人で1度だけジャンケンをするとき，引き分けになる確率を n を用いて表せ。ただし，$n \geqq 2$ とする。

(解説)

(1) 1人だけが勝つ確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{3^4} = \dfrac{4}{27}$

2人が勝つ確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1}{3^4} = \dfrac{2}{9}$

3人が勝つ確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1}{3^4} = \dfrac{4}{27}$

引き分けになる確率は，$1 - \left(\dfrac{4}{27} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27}\right) = \dfrac{13}{27}$　(答)

(2) $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_r \times {}_3\mathrm{C}_1}{3^n} = \dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{3^{n-1}}$　(答)

(3) $2^n = (1+1)^n$

$$= {}_n\mathrm{C}_0 \cdot 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 1^n$$

$$= 1 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + 1 = 2 + \sum_{r=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_r$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n - 2$$

n 人が一度だけジャンケンをするとき，引き分けになる確率は

$$1 - \sum_{r=1}^{n-1} \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{3^{n-1}} = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} {}_n\mathrm{C}_r}{3^{n-1}} = 1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$$　(答)

確認問題4

T，O，H，O，K，U，A，O，B，A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる．

(1)　どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ．

(2)　どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ．

解説

(1) O も A も区別して考えて，まず O 以外のものを並べて，その間または両端に O を入れればよいから，

$$\frac{7!\times{}_8P_3}{10!}=\frac{7}{15}$$　答

(2) どこかで同じ文字が隣り合う事象を A とすると，

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$\overline{A}$ はどの同じ文字も隣り合わない事象であるから，

はじめに O 以外を並べて，そのあとに間や両端に O を入れる

(i) A が隣り合うとき

2 つの A の間に O を入れて，1 つのかたまりとみて

$6!\times2!\times3\times7\cdot6$ 通り

(ii) A が隣り合わないとき

$(7!-6!\times2!)\times{}_8P_3$

よって，

$$P(\overline{A})=\frac{6!\times2!\times3\times7\cdot6+(7!-6!\times2!)\times{}_8P_3}{10!}$$

$$=\frac{6!\times2!\times3\times7\cdot6+6!\times5\times8\cdot7\cdot6}{10!}$$

$$=\frac{6!\times7\cdot6\times(6+40)}{10!}=\frac{23}{60}$$

よって

$$P(A)=1-\frac{23}{60}=\frac{37}{60}$$　答

確認問題5

4 個の白球と 6 個の赤球を無作為に並べて，輪をつくる。このとき，白球が隣り合わない確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，4 個の白球がすべて隣り合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

解説

(ア), (イ) 同じ色の球もすべて区別して考える

まず赤球を円形に並べて，間に白球を入れると考えて，

$$\frac{(6-1)!\times{}_6\mathrm{P}_4}{(10-1)!}=\frac{5}{42}$$ 答

(ウ), (エ) 4 個の白球を 1 つのかたまりとみて，白球の並べ方にも注意して，

$$\frac{(7-1)!\times 4!}{(10-1)!}=\frac{1}{21}$$ 答

本問は，サイクルを含む円順列を含むので，同じ色の球を区別しないで考えるととても大変なことになるし，サイクルを含むものと含まないものとで重複の仕方が異なるので，同じ色の玉を区別しないで根元事象を考えるのはそもそも誤りです。