1.3　場合の数・順列(1)

(1) 樹形図

例1

文字 a, b, c を，重複を許して横 1 列に n 個並べるとき，b, c が隣り合わない並べ方の総数を $f(n)$ とおく．

(1)　$f(2)$ を求めよ．

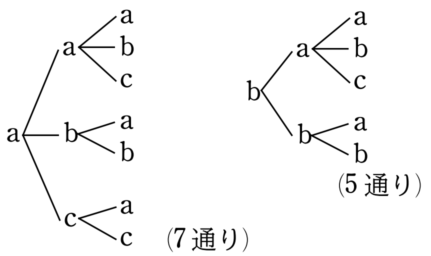
(2)　$f(3)$ を求めよ．

(3)　$f(4)$ を求めよ．

(解説)

(1) aa, ab, ac, ba, bb, ca, cc の 7 通り．よって，$f(2)=7$

(2)



c で始まるのも同様に 5 通り．

よって，$f(3)=7+5+5=17$

(3) 3 個並べたとき最後がa のもの (7通り)　$7\times3=21$ (通り)

b のもの (5通り)　$5\times2=10$ (通り)

c のもの (5通り)　$5\times2=10$ (通り)

よって，$f(4)=41$

(2)で書いた図のように，枝分かれした図を**樹形図**といいます。複雑な場合分けをもれなく，また，重複することなく数え上げるためには，樹形図をかいて考えるとよいことが多い。また，樹形図をある程度かくと，規則性も見えてきます。この問題で一般に $f(n)$ を求めたければ，a の後には 3 通りすべてがこれて，b, c の後には，それぞれ c, b 以外の2 通りしかこれない事と，a がすべての枝の先から出ることを考えると，

$$f(1)=3,\ f(2)=7$$

$$f(n+2)=3f(n)+2\{f(n+1)-f(n)\}$$

$$=2f(n+1)+f(n)\quad (n \text{ は自然数})$$

という関係式が成り立ちます(これを漸化式といいます)。

$n=1$ のとき， $f(3)=2f(2)+f(1)=2\cdot 7+3=17$
$n=2$ のとき， $f(4)=2f(3)+f(2)=2\cdot 17+7=41$
となり，答えが一致します。

(2) 和の法則・積の法則

和集合の要素の個数で学んだように，次の**和の法則**が成り立ちます。

和の法則
2 つの事柄 A, B は同時に起こらないものとする
A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りあるとき，
A または B が起こる場合の数は $a+b$ 通りである

和の法則は，3 つ以上の事柄についても同様に成り立ちます。

例2
異なる 3 個のさいころを同時に投げたとき，目の和が 5 の倍数になる場合は $\boxed{}$ 通りである。

解説
目の和が 5 の倍数となるのは，目の和が 5 または 10 または 15 となるときである
(ⅰ) 目の和が 5 となるとき
目の組合せは，$(1, 1, 3), (1, 2, 2)$
さいころは異なるので，この並びを考えて，$3\times 2=6$ 通り
(ⅱ) 目の和が 10 となるとき
目の組合せは，$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$
この並びを考えて，$6\times 3+3\times 3=27$ 通り
(ⅲ) 目の和が 15 となるとき
目の組合せは，$(3, 6, 6), (4, 5, 6), (5, 5, 5)$
この並びを考えて，$3+6+1=10$ 通り
(ⅰ)～(ⅲ)から和の法則より
$6+27+10=43$ 通り

2 つの事柄 A, B が同時に起こるような場合でも，和集合の要素の個数の求め方と同様にして，場合の数を求めることができます。

例3
さいころを4回投げるとき
(1) 目の出方は全部で $\boxed{}$ 通りある。
(2) 1の目が少なくとも1回出るような目の出方は $\boxed{}$ 通りある。
(3) 1の目も6の目も1回も出ないような目の出方は全部で $\boxed{}$ 通りある。
(4) 1の目か6の目のいずれかが少なくとも1回は出るような目の出方は $\boxed{}$ 通りある。
(5) 1の目も6の目もどちらも少なくとも1回は出るような目の出方は $\boxed{}$ 通りある。

解説

(1) $6^4=1296$ 通り

(2) さいころを 4 回投げることを U，1 の目が少なくとも 1 回出ることを A とし， $n(\mathrm{P})$ を P が起こる場合の数とすると，

$$n(\mathrm{A})=n(\mathrm{U})-n(\overline{\mathrm{A}})$$

$\overline{\mathrm{A}}$ は 1 の目が 1 回も出ないという事柄より

$$=6^4-5^4=(6^2+5^2)(6^2-5^2)=671 \text{ 通り}$$

(3) 6 の目が少なくとも 1 回出ることを B とすると，

$$n(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})=4^4=256 \text{ 通り}$$

(4)
$$\begin{aligned} n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})&=n(\mathrm{U})-n(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}})\\ &=1296-n(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})\\ &=1296-256=1040 \text{ 通り}\end{aligned}$$

(5) $n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ より

$$\begin{aligned} n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})&=n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\\ &=671\cdot2-1040\\ &=302 \text{ 通り}\end{aligned}$$

次は**積の法則**です。

積の法則
事象 A の起こり方が a 通りあり，その各々の場合について，
事象 B の起こり方が b 通りあるとき，
A と B がともに起こる場合の数は ab 通りである

積の法則は，3 つ以上の事柄についても同じように成り立ちます。

例4
$(a+b)(p+2q)(x+2y+3z)$ を展開すると，異なる項は何個できるか．

解説
展開してできるすべての項は，始めの(　)から 1 つ，真ん中の(　)から 1 つ，最後の(　)から 1 つの項を選んでかけて作られるから，異なる項は
　$2\times2\times3=12$ (個)
できる

例5
(1)　10 円硬貨 3 枚と 100 円硬貨 1 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある．
(2)　10 円硬貨 5 枚と 100 円硬貨 14 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある．
(3)　10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 5 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある．
(4)　10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 3 枚，および 500 円硬貨 3 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は $\boxed{}$ 通りある．

解説
(1) 10 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚の 3+1 通り，
100 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚の 1+1 通り，
両方とも 0 枚の場合を除いて
　$(3+1)\times(1+1)-1=7$ 通り
(2) 同様にして　$(5+1)\times(14+1)-1=89$ 通り

(3) 10 円 10 枚で 100 円が作れるから重複が生じます。
最小で 10 円から最大 640 円まで作れ，
10 円が 14 枚あるから 10 円刻みで 0 円から 90 円まですべて作れ，
それに 100 円硬貨を足すと考えて，
100 円玉を 5 枚使ったら最後は残りの 10 円玉も使って，
　64 通り
(4) 同様に 10 円と 100 円で 10 円刻みで 0 円から 440 円まで作ることができて，それに 500 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚の 4 通りより
　$45\times4-1=179$ 通り

例6 1 円玉，5 円玉，10 円玉を使って，100 円支払うことを考える．1 枚も使わない硬貨があってもよいとき，支払い方法は，全部で ア$\boxed{}$ 通りあり，それぞれの支払い方法で使われる 10 円玉の枚数をすべて合計すると イ$\boxed{}$ 枚である．また，どの硬貨も少なくとも 1 枚は使わなければならないとき，支払い方法は，全部で ウ$\boxed{}$ 通りある．

解説

積の法則の問題ではありませんが，例5 と似た問題(合計金額が与えられている)なので扱っておきます。不定方程式の解の個数の問題です。
(ア) 1 円玉を x 枚，5 円玉を y 枚，10 円玉を z 枚使ったとすると，
　$x+5y+10z=100\ (x, y, z\geqq0)$
係数の大きい方から順に数を入れて，
$z=0$ のとき，y には 0 から 20 までの 21 通り入れ，そのそれぞれに対して，x は 1 通りに決まる
$z=1$ のとき，y には 0 から 18 までの 19 通り入れ，そのそれぞれに対して，x は 1 通りに決まる
同様にして，$0\leqq z\leqq10$ で調べてたすと，

$$21+19+17+\cdots+1=\frac{11}{2}\times(21+1)=121\text{ 通り}$$

(イ) 使われる 10 円玉の枚数は

$$1\times19+2\times17+3\times15+4\times13+5\times11+6\times9+7\times7+8\times5+9\times3+10\times1$$

$=19+34+45+52+55+54+49+40+27+10$

$=50\times8+3-5+2+5+4-1-10-13=385$ 枚

(ウ) $x+5y+10z=100\ (x, y, z\geqq1)$

$x'=x-1, y'=y-1, z'=z-1$ とすると

$(x'+1)+5(y'+1)+10(z'+1)=100\ (x', y', z'\geqq0)$

$x'+5y'+10z'=84$

(ア)と同様にして，

$17+15+13+\cdots+1=\dfrac{9}{2}(17+1)=81$ 通り

例7

道を線で表した地図上の地点 A から地点 B に行くのに，途中ですべての道を必ず 1 回だけ通り，交差点以外は同じ道を 2 回以上通ることはできないものとする。

(1)　図 1 のような道の場合，行き方は $\boxed{}$ 通りある。

(2)　図 2 のような道の場合，行き方は $\boxed{}$ 通りある。

(3)　図 3 のような道の場合，行き方は $\boxed{}$ 通りある。

(4)　図 4 のような道の場合，行き方は $\boxed{}$ 通りある。

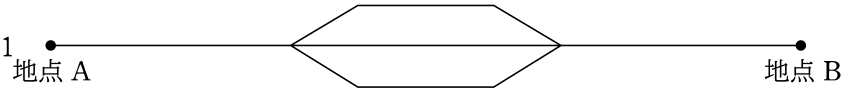
図 1


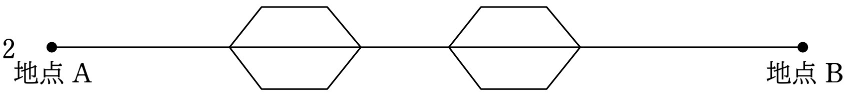
図 2


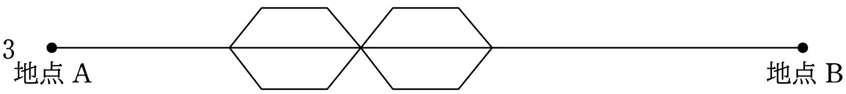
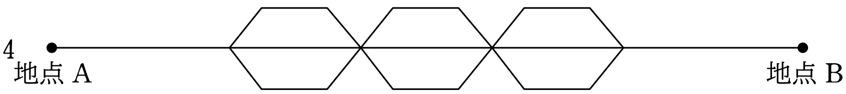
図 3


図 4


(解説)

⑴ 交差点を地点 A に近い方から C，D とする
行き方は
　A→C→D→C→D→B
のみ
行き方の総数は，各地点間の道の選び方を考えて
　$1\times3\times2\times1\times1=6$ 通り
⑵ 交差点を地点 A に近い方から C, D, E, F とする
行き方は
　A→C→D→C→D→E→F→E→F→B
のみ
よって
　$6\times6=36$ 通り
⑶ 交差点を地点 A に近い方から C, D, E とする
行き方は
　A→C→D→C→D→E→D→E→B
　A→C→D→E→D→C→D→E→B
の 2 通り
よって
　$6\times6+3\times3\times2\times2=72$ 通り
⑷ 交差点を地点 A に近い方から C, D, E, F とする
行き方は
　A→C→D→C→D→E→D→E→F→E→F→B
　A→C→D→C→D→E→F→E→D→E→F→B
　A→C→D→E→D→C→D→E→F→E→F→B
　A→C→D→E→F→E→D→C→D→E→F→B
の 4 通り
よって
　$6\times6\times6\times4=864$ 通り

⑶ **順列**
　いくつかのものを順序をつけて 1 列に並べる配列を**順列**といいます。例えば，a, b, c, d の 4 個の文字の中から，異なる 3 個を取って並べる順列は，樹形図を考えれば明らかですが，1 番目の文字は 4 通り，2 番目の文字は 1 文字使っているので残りの 3 通り，3 番目の文字は 2 文字

使っているので残りの2通りがこれるから，順列の総数は積の法則より

$4\times3\times2=24$ 通り

一般に，異なる n 個のものから r 個を取り出して並べる順列の総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ $(n\geqq r)$ と表し，次のことが成り立ちます。

順列の総数

異なる n 個のものから r 個を取り出して並べる順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ $(n\geqq r)$ は

${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(r-1)\}$ （n から順に r 個の整数を降順にかけたもの）

1番目には n 通り，2番目には $n-1$ 通り，…， r 番目には $n-(r-1)$ 通りがこれるから，積の法則より成り立つことが分かります。

特に $r=n$ のとき，異なる n 個のものをすべて並べる順列の総数で，これを $n!$ と表し， n の**階乗**といいます。すなわち，

${}_n\mathrm{P}_n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

となります。ここで， $0!=1$ と定めます。このように定義すると後々色々と都合がよいので，このように定めます。

例8

6個の数字 0，1，2，3，4，5 を使ってできる4桁の整数は全部で $^{ア}\boxed{}$ 個あり，その中で2014以上の整数は $^{イ}\boxed{}$ 個ある。ただし，同じ数字は繰り返し使わないものとする。

（解説）

条件が厳しいところから，ものを入れていくことが定石です。

4桁の整数は千の位に0がこれないことに注意して，

$5\times5\times4\times3=300$ (個)

2014未満の整数は

1*** と 2013

であるから，

$5\times4\times3+1=61$ (個)

よって，2014以上の整数は

$300-61=239$ (個)

例9
SHOJI の 5 文字を全て使用して作成した文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，JISHO となるのは $\boxed{}$ 番目である。

(解説)

H**** 型の文字列は，　$4! = 24$ (個)
I**** 型の文字列は，　$4! = 24$ (個)
JH*** 型の文字列は，　$3! = 6$ (個)
JIH** 型の文字列は，　$2! = 2$ (個)
JIO** 型の文字列は，　$2! = 2$ (個)
その次の文字列が JISHO であるから
　$24 + 24 + 6 + 2 + 2 + 1 = 59$ (番目)

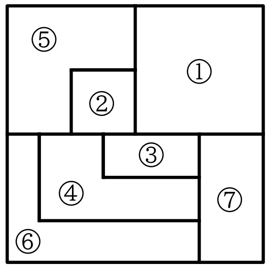
確認問題1
大中小 3 個のサイコロを同時に投げるとき，出る 3 つの目の積が 4 の倍数となる場合は何通りあるか.

(解説)

3 つの目の積が 4 の倍数にならないのは，
(ⅰ) 3 つとも奇数のとき
(ⅱ) 2 つが奇数で残りの 1 つが 2 または 6 のとき
のいずれかである
(ⅰ)は，　$3^3 = 27$ (通り)
(ⅱ)は，　${}_3C_2 \times 3^2 \times 2 = 54$ (通り)
よって，求める場合の数は
　$6^3 - (27 + 54) = 135$ (通り)　答

確認問題2

右の図の ① から ⑦ までの 7 個の領域を A，B，C，D の4 色を用いて塗り分けたい．ただし，隣接する領域は異なる色で塗るものとする．



(1)　領域 ①，②，③ を A，B，C，D の 4 色を用いて塗り分ける方法は何通りあるか.

(2)　領域 ① を色 A，領域 ② を色 B，領域 ③ を色 C で塗るとした場合，領域 ④，⑤，⑥，⑦ を塗り分ける方法をすべて列挙せよ.

(3)　領域 ① から ⑦ を A，B，C，D の 4 色を用いて塗り分ける方法は何通りあるか.

解説

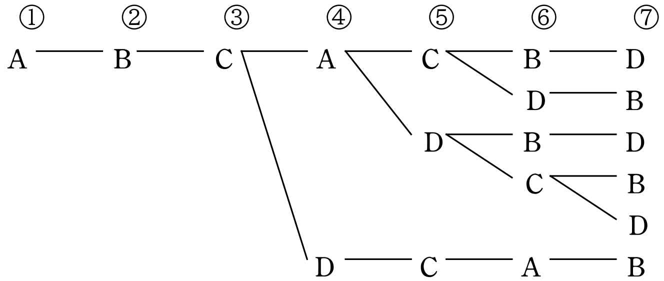
(1) ① には A，B，C，D の 4 色のうち 1 色を塗る

② には ① で用いた色以外の 3 色のうち 1 色を塗る

③ には ①，② で用いた色以外の 2 色のうち 1 色を塗る

したがって，求める塗り分け方は，$4\times3\times2=24$ (通り)　答

(2) 樹形図をかくと以下にようになる



よって

(④，⑤，⑥，⑦)＝(A，C，B，D)，(A，C，D，B)，(A，D，B，D)，(A，D，C，B)，(A，D，C，D)，(D，C，A，B)

答

(3) (1)，(2) より

$24\times6=144$ (通り)　答