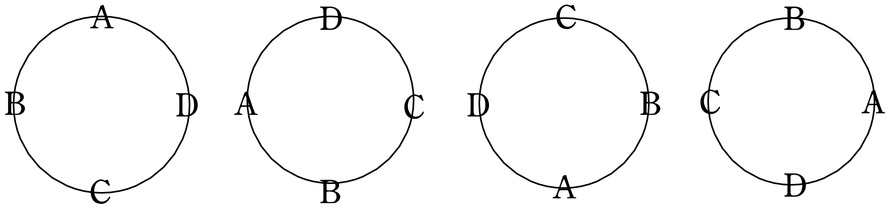
1.5　順列(3)

(1) **円順列**

いくつかのものを円形に並べる配列を**円順列**といいます。円順列では，回転して一致する並び方は同じ並びであると考えます。例えば A, B, C, D の 4 人を円形に並べるとき，



これらは，同じ並びと考えます。
円順列の総数は，まず 4 人で順列を作り，例えば，

ABCD, DABC, CDAB, BCDA　(1 つずつずらしたもの)

の 4 通りは，上から順に左回りにこの両端をつないで輪を作ると，これらは円順列としては同じもので 1 通りです。同様にして，すべての場合について 4 通りずつの重複があるので，

$$\frac{4!}{4}=3!=6 \text{ 通り}$$

となります。
次のように考えても求めることができます。円順列の総数は，A から見た位置関係の数なので，A を固定して残り 3 人の並べ方と考えて，

$$(4-1)!=3!=6 \text{ 通り}$$

としてもよい。どちらも重要な考え方なので，両方とも理解しておくとよい。一般に，次のことが成り立ちます。

> **円順列**
> 異なる n 個のものの円順列の総数は，
> $$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

例1
両親と4人の子供 (息子2人，娘2人) が手をつないで輪を作るとき
(1)　6人の並び方は全部で何通りあるか.
(2)　両親が隣り合う並び方は何通りあるか.
(3)　両親が正面に向き合う並び方は何通りあるか.
(4)　男性と女性が交互に並ぶ並び方は何通りあるか.

(解説)

(1) $(6-1)!=5!=120$ (通り)
(2) 両親を1つのかたまりとみて，両親の並びにも注意して，
$24\times2=48$ (通り)
(3) 両親を固定して，子供たちを並べ方を考えればよいから，
$4!=24$ (通り)
(4) まず男性を並べ，$(3-1)!=2$ (通り)
その間に女性が並べ， $3!$ (通り)
よって，
$2\times3!=12$ (通り)

例2
(1) 赤球1個，白球2個，黒球4個を円形に並べる並べ方は何通りか。
(2) 白球3個，黒球4個を円形に並べる並べ方は何通りか。
(3) 白球2個，黒球4個を円形に並べる並べ方は何通りか。

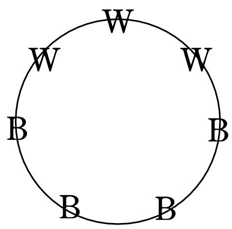
(解説)

(1) 赤球を固定して，残りの白球2個，黒球4個の並べ方を考えればよいから，

$$\frac{6!}{2!4!}=15\text{ 通り}$$

(2) 白球3個，黒球4個の場合，特別な1個が存在しないため，どれかを固定してという考え方では難しい。そこで，回転して同じものは同じと考えて，

$$\frac{7!}{3!4!\cdot7}=5\text{ 通り}$$



Wは白，Bは黒として，Wのどれかを固定したときに，どれを固定してもこのパターンが出てきてしまうので，重複が生じてしまいます。

W の固定の仕方，すなわち，3 通りの重複が生じるので，

$$\frac{(7-1)!}{2!4!\cdot 3}=5 \text{ 通り}$$

としても構いませんが，考え方が少し複雑になるので，回転で考えた方がよい。

また，ほぼ同じ考え方ですが，(1)の赤を白に塗り替えると考えて，上のような配置のとき，塗り替える前のもので塗り替えて同じになるものが 3 通りあるから

$$\frac{15}{3}=5 \text{ 通り}$$

と考えてもよい。

(3) (2)と同様に，

$$\frac{6!}{2!4!\cdot 6}=2.5 \text{ 通り？}$$

これはさらに難しく，白 2 個，黒 4 個のように，個数が互いに素でないときは，繰り返し(サイクル)を作ることができます。つまり，白 2 個，黒 4 個で順列を作ったときに，

WBBWBB

のように，繰り返し(サイクル)ができてしまうものが含まれます。

このような場合，1 つずつずらしていくと

BWBBWB

BBWBBW

WBBWBB

と 3 回目で元に戻ってしまいます。つまり，円順列にするとき，重複が 6 通りではなく 3 通りしかありません。サイクルができない場合，重複は 6 通りです。

よって，白 2 個，黒 4 個の円順列の総数は，$\frac{6!}{2!4!}=15$ 通りであり，

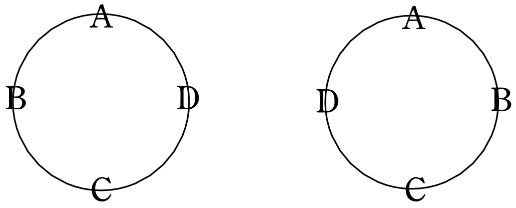
サイクルができる場合が 3 通り，できない場合が 12 通りであるから，

$$\frac{3}{3}+\frac{12}{6}=3 \text{ 通り}$$

となります。

(2) **じゅず順列**

いくつかの玉でじゅずを作る配列を**じゅず順列**といいます。例えば A, B, C, D の 4 つの玉でじゅずを作るとき，



これらは，円順列としては異なるものですが，ひっくり返せば互いに同じものなので，じゅず順列としては同じものです。つまり，円順列において線対称なものは同じものとなるので，じゅず順列の総数は

$$\frac{(4-1)!}{2}=3 \text{ 通り}$$

となります。一般に，次のことが成り立ちます。

じゅず順列

異なる n 個のもののじゅず順列の総数は，

$$\frac{n\,!}{n\cdot 2}=\frac{(n-1)!}{2}$$

例3

7 つの球形のビーズ玉を環状につなげてブレスレットを作る．

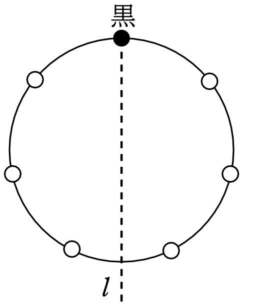
(1)　ビーズ玉が赤色 1 つ，青色 1 つ，黄色 1 つ，緑色 1 つ，茶色 1 つ，白色 1 つ，黒色 1 つのとき，ブレスレットは何通り作ることができるか．

(2)　ビーズ玉が赤色 3 つ，白色 3 つ，黒色 1 つのとき，ブレスレットは何通り作ることができるか．

(解説)

(1) $\frac{(7-1)!}{2}=360$ (通り)

(2) 右図のように，黒色のビーズ玉の位置を固定して，残り 6 個の位置に赤色 3 つと白色 3 つを入れる．



このとき，右図のような直線 l について線対称となるような配置はないから，裏返しても同じになるようなものはないので，

$$\frac{6!}{3!3!\cdot 2}=10\text{（通り）}$$

例4

赤い玉が 4 個，白い玉が 2 個，青い玉が 1 個ある。

(1)　これらの中から 3 個の玉を取り出して円形に並べる方法は $\boxed{}$ 通りある。

(2)　7 個すべての玉を円形に並べる方法は $\boxed{}$ 通りある。

(3)　7 個すべての玉にひもを通し，首飾りを作るとき，$\boxed{}$ 通りの首飾りができる。ただし，裏返して一致する首飾りは同じものとみなす。

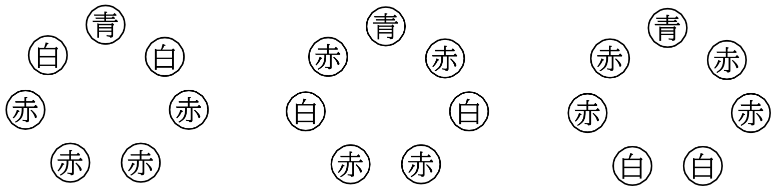
解説

(1) $(3-1)!+4\cdot 1+1=7$（通り）

(2) 青い玉を固定して，残りの 6 ケ所に赤い玉 4 個と白い玉 2 個を並べて，

$$\frac{6!}{4!2!}=15\text{（通り）}$$

(3) (2)の 15 通りのうち，左右対称にできるものは



の 3 通りある。これらは円順列としても，じゅず順列としても 1 通り

左右非対称である 12 通りは円順列としては 12 通りであるが，じゅず順列としてはそれぞれが裏返せば同じになるものが存在するので，

$$3+\frac{12}{2}=9\text{（通り）}$$

例5

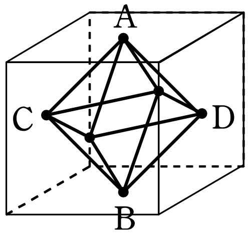
立方体の各面に，隣り合った面の色は異なるように，色を塗りたい．ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす．

(1)　異なる 6 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか.

(2)　異なる 5 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか.

(3)　異なる 4 色をすべて使って塗る方法は何通りあるか.

解説



(1) 右図のような正八面体を考え，その頂点に色を塗ると考える。回転して一致する塗り方は同じ塗り方であるから，
Aに 1 色を固定すると，Bには残りの 5 色が来れ，側面は円順列であるから

$5\cdot(4-1)!=30$ 通り

(2) 隣り合った面には同じ色が塗れないので，
AとBに同じ色を塗って，5 通り
上下をひっくり返しても同じなので，側面はじゅず順列となるから

$5\cdot\dfrac{(4-1)!}{2}=15$ 通り

(3) AとB，CとDにそれぞれ同じ色を塗って，$_4C_2$ 通り
前面と後面に残りの 2 色を塗るが，これらは裏返しても同じものなので，

$_4C_2=6$ 通り

確認問題1

(1)　8 人が円形のテーブルに着席するとき，座り方は全部で何通りあるか。

(2)　大人 4 人，子供 4 人の計 8 人が円形のテーブルに着席するとき，子供 4 人が並んで座る座り方は何通りあるか。

(3)　大人 4 人，子供 4 人の計 8 人が円形のテーブルに着席するとき，子供 4 人が 1 人おきに座る座り方は何通りあるか。

(4)　8 人が正方形のテーブルに，各辺に 2 人ずつ並んで着席するとき，座り方は何通りあるか。

解説

(1) $(8-1)!=7!=5040$（通り）　答

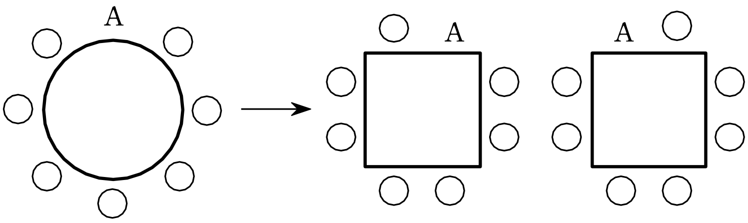
(2) 子供 4 人 1 つのかたまりと考え，子供 4 人の並びがあることにも注意して，

$(5-1)!\times4!=4!\times4!=24\times24=576$（通り）　答

(3) 大人 4 人を円形に並べ，その間に子供を入れると考えて，

$(4-1)!\times4!=3!\times4!=6\times24=144$（通り）　答

(4) 特定の 1 人を A とし，8 人が正方形のテーブルの各辺に 2 人ずつ並んで着席するとき，A は図のように右側か左側のどちらかに座るから，



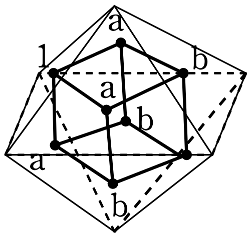
$5040\times2=10080$（通り）　答

確認問題2

正八面体の各面に1から8までの自然数を1つずつ付けることとし，その付け方について考える。適当に回転させて一致するものは同じ付け方と考えることにする。1の面を固定して考える。1の面に平行な面について数字の選び方は $\boxed{}$ 通りある。次に残りの数字のうち1つを選ぶ。その数字の面の選び方は1の面との関係で $\boxed{}$ 通りある。したがって，全部で $\boxed{}$ 通りの付け方がある。

解説

図のような正八面体の各面の正三角形の重心を結んだ立方体の頂点に番号をつけると考える。



1の面に平行な面についての数字の選び方は，

7通りある。答

さらに残りの数字のうち1つを入れる面の選び方は，回転して同じになるものは同じ付け方と見なすので，図のaかbかで2通り　答

(1とつながっているかいないか)。

番号の付け方は全部で，

$7 \cdot 2 \cdot 5! = 1680$ 通り　答