3.5　平面図形の計量(2)

(1) 三角比の利用

三角比の応用問題，特に円と関連のある問題について考えてみます。

例1

AB＝8，BC＝5，$\angle B=60^\circ$ の $\triangle ABC$ がある。

(1)　AC＝${}^{ア}\boxed{\quad}$，$\triangle ABC$ の面積は ${}^{イ}\boxed{\quad}\sqrt{{}^{ウ}\boxed{\quad}}$，$\triangle ABC$ の内接円の半径は $\sqrt{{}^{エ}\boxed{\quad}}$ である。

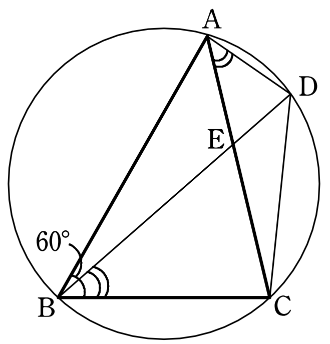
(2)　$\triangle ABC$ の外接円の半径は $\dfrac{{}^{オ}\boxed{\quad}}{{}^{カ}\boxed{\quad}}\sqrt{{}^{キ}\boxed{\quad}}$ である。

(3)　$\triangle ABC$ の外接円の点 B を含まない弧 AC 上に AD＝3 となる点 D をとる。このとき，CD＝${}^{ク}\boxed{\quad}$ である。

(4)　$\cos\angle BAD=\dfrac{{}^{ケ}\boxed{\quad}}{{}^{コ}\boxed{\quad}}$，$BD=\dfrac{{}^{サ}\boxed{\quad}}{{}^{シ}\boxed{\quad}}$ である。

(5)　AC と BD の交点を E とするとき，$\cos\angle AED=\dfrac{{}^{ス}\boxed{\quad}}{{}^{セ}\boxed{\quad}}$ である。

解説



(1) 余弦定理より

$$AC^2=8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ=49$$

AC＞0 より，AC＝${}^{ア}7$

$\triangle ABC$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60^\circ={}^{イ}10\sqrt{{}^{ウ}3}$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおくと，

$$10\sqrt{3}=\frac{1}{2}(8+5+7)r \text{ より，}\quad r=\sqrt{{}^{エ}3}$$

(2) △ABCの外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$R=\frac{7}{2\sin 60^\circ}=\frac{^{オ}7}{^{カ}3}\sqrt{^{キ}3}$$

(3) 四角形 ABCD は，円に内接するから，

$\angle \mathrm{ADC}=180^\circ-\angle \mathrm{ABC}=120^\circ$

$\mathrm{CD}=x$ とおくと，△ADC において，余弦定理より

$7^2=3^2+x^2-2\cdot 3x\cos 120^\circ$

$x^2+3x-40=0$

$(x+8)(x-5)=0$

$x>0$ より，$x=5$

よって，$\mathrm{CD}={}^{ク}5$

(4) $\angle \mathrm{BAD}=\theta$ とすると，$\angle \mathrm{BCD}=180^\circ-\theta$

△ABD と △CBD に余弦定理を用いると

$\mathrm{BD}^2=8^2+3^2-2\cdot 8\cdot 3\cos\theta=73-48\cos\theta$

$\mathrm{BD}^2=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cos(180^\circ-\theta)=50+50\cos\theta$

より

$73-48\cos\angle \mathrm{BAD}=50+50\cos\angle \mathrm{BAD}$

$$\therefore \cos\angle \mathrm{BAD}=\frac{^{ケ}23}{^{コ}98},$$

$$\mathrm{BD}^2=50\left(1+\frac{23}{98}\right)=\frac{25\cdot 121}{49}$$

$\mathrm{BD}>0$ より，$\mathrm{BD}=\dfrac{5\cdot 11}{7}=\dfrac{^{サ}55}{^{シ}7}$

(5) $\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=5$ より，$\angle \mathrm{CBD}=\angle \mathrm{CDE}$

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角より，$\angle \mathrm{CBD}=\angle \mathrm{CAD}$

よって，$\angle \mathrm{CDE}=\angle \mathrm{CAD}$

また，$\angle \mathrm{DCE}=\angle \mathrm{ACD}$ であるから，$\triangle \mathrm{CDE}\backsim\triangle \mathrm{CAD}$ より

$\angle \mathrm{CED}=\angle \mathrm{CDA}=120^\circ$

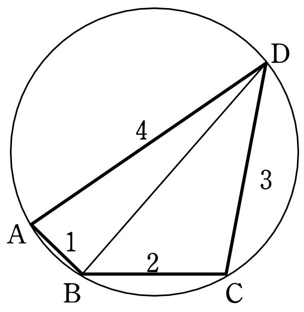
$\angle \mathrm{AED}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ より

$$\cos\angle \mathrm{AED}=\frac{^{ス}1}{^{セ}2}$$

例2
円に内接する四角形 ABCD があり，AB＝1，BC＝2，CD＝3，DA＝4 のとき
(1)　$\cos A$ の値を求めよ.
(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ.

(解説)

(1) △ABD において，余弦定理より



$$\begin{aligned}BD^2&=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A\\&=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cos A\\&=17-8\cos A\end{aligned}$$

△BCD において，余弦定理より

$$\begin{aligned}BD^2&=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C\\&=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos(180^\circ-A)\\&=13+12\cos A\end{aligned}$$

よって，

$$17-8\cos A=13+12\cos A\quad\therefore\ \cos A=\frac{1}{5}$$

(2) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\triangle ABD+\triangle BCD\\&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4\cdot\sin A+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin(180^\circ-A)\\&=5\sin A=5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

例3
円に内接する四角形 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA の長さをそれぞれ a，b，c，d で表す。
(1)　∠B の大きさを B で表すとき，$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ を示せ。
(2)　四角形 ABCD の面積 S は，$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおくとき，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

で与えられることを示せ。

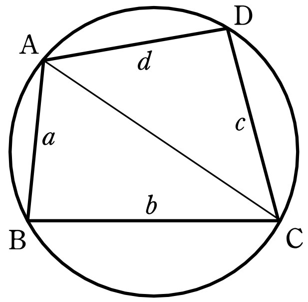
(解説)

(1) △ABC において，余弦定理より

$$CA^2=a^2+b^2-2ab\cos B$$

△ACD において，余弦定理より

$$\begin{aligned} CA^2&=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-B)\\ &=c^2+d^2+2cd\cos B \end{aligned}$$



よって，

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$$

$$2(ab+cd)\cos B=a^2+b^2-c^2-d^2$$

$$\therefore\ \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

(2) 四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin(180^\circ-B)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$$

$0<B<180^\circ$ であるから，$\sin B>0$ より

$$\begin{aligned} \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}&=\sqrt{1-\left\{\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\}^2}\\ &=\frac{\sqrt{(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(ab+cd)} \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} &(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\ &=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)\\ &=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}\\ &=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)\\ &=(2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)\\ &=2^4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sin B&=\frac{\sqrt{2^4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{2(ab+cd)}\\ &=\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd} \end{aligned}$$

したがって，

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

円に内接する四角形において，4 辺の長さから面積を求める公式です。この公式を**ブラーマグプターの公式**といいます。ヘロンの公式と形が似ているので，ヘロンの公式とセットで覚えておくと覚えやすいです。
例2 に適用すると，

$$s=\frac{1+2+3+4}{2}=5$$

よって，

$$S=\sqrt{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}=2\sqrt{6}$$

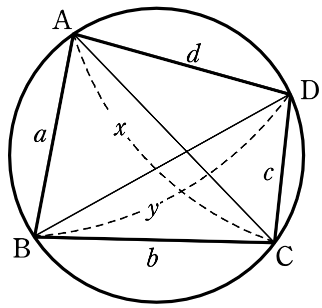
この公式も辺の長さに $\sqrt{\ }$ が入ると計算が面倒になり，使い勝手はよくありません。

(2) トレミーの定理

例4
4 辺の長さが $\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$\mathrm{CD}=c$，$\mathrm{DA}=d$ である四角形 ABCD が円に内接している。$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BD}=y$ とおくとき，次の問いに答えよ。
(1)　△ABC と △CDA に余弦定理を適用して，x を a，b，c，d で表せ。また，y を a，b，c，d で表せ。
(2)　xy を a，b，c，d で表すと，$xy=ac+bd$ となる。このことを (1) を用いて示せ。

解説
(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$D=180°-B$$



△ABC において，余弦定理より

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos B$$

△ACD において，余弦定理より

$$\begin{aligned}x^2&=c^2+d^2-2cd\cos D\\&=c^2+d^2-2cd\cos(180°-B)\\&=c^2+d^2+2cd\cos B\end{aligned}$$

よって，

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$$

$$\therefore \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

したがって，

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$=a^2+b^2-\frac{ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$$

ここで

$$(a^2+b^2)ab+(a^2+b^2)cd-ab(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$$
$$=(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)$$
$$=cda^2+b(c^2+d^2)a+b^2cd$$
$$=(ac+bd)(ad+bc)$$

よって

$$x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

$x>0$ より，$x=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ ……③

yについても同様で，a を b，b を c，c を d，d を a におき換えればよいから

$$y=\sqrt{\frac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}}=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

(2) (1) より

$$xy=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}=\sqrt{(ac+bd)^2}$$

a，b，c，$d>0$ より

$$xy=ac+bd$$

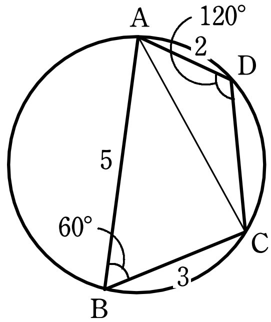
円に内接する四角形において，

　対角線の長さの積＝対辺の長さの積の和

という関係式が成り立ちます。これを**トレミーの定理**といいます。

例5
円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝3，DA＝2，$\angle$ABC＝60° であるとき，次の問いに答えよ。
(1)　辺 CD の長さを求めよ。
(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。
(3)　△BCD の面積を求めよ。
(4)　対角線 BD の長さを求めよ。

(解説)



(1) △ABC において，余弦定理より

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos 60^\circ$$
$$=5^2+3^2-2\cdot5\cdot3\cdot\frac{1}{2}=19$$

四角形 ABCD は，円に内接するから

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=120^\circ$$

CD＝x とおく

△ACD において，余弦定理より

$$AC^2=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA\cos 120^\circ$$

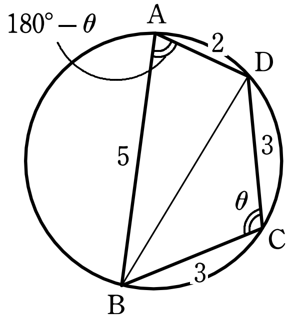
よって，

$$19=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x^2+2x-15=0$$
$$(x+5)(x-3)=0$$

$x>0$ より，　$x=3$　　∴ CD＝3

(2) 四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\sin 120^\circ$$
$$=\frac{21\sqrt{3}}{4}$$



(3) $\angle BCD=\theta$ とおくと，$\angle BAD=180^\circ-\theta$

△BCD において，余弦定理より

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\theta$$
$$=3^2+3^2-2\cdot3\cdot3\cos\theta$$
$$=18-18\cos\theta$$

△ABD において，余弦定理により

$$BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2AB \cdot DA\cos(180° - \theta)$$
$$= 5^2 + 2^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos\theta$$
$$= 29 + 20\cos\theta$$

よって

$$18 - 18\cos\theta = 29 + 20\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta = -\frac{11}{38}$$

$0° < \theta < 180°$ であるから，$\sin\theta > 0$ より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{38}\right)^2} = \frac{21\sqrt{3}}{38}$$

したがって

$$\triangle BCD = \frac{1}{2}BC \cdot CD\sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{21\sqrt{3}}{38} = \frac{189\sqrt{3}}{76}$$

(4) $BD^2 = 18(1 - \cos\theta) = 18\left\{1 - \left(-\frac{11}{38}\right)\right\} = \frac{9 \cdot 49}{19}$

$BD > 0$ より，$BD = \sqrt{\frac{9 \cdot 49}{19}} = \frac{21\sqrt{19}}{19}$

別解

トレミーの定理より

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

$$\sqrt{19}\,BD = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \qquad \therefore BD = \frac{21\sqrt{19}}{19}$$

確認問題1

$\triangle$ABC の 3 辺の長さがそれぞれ AB$=5$，BC$=7$，AC$=4\sqrt{2}$ であるとする。この三角形の $\angle$ABC の大きさを B で表すと $\cos B=$ ア$\boxed{}$ であり，$\triangle$ABC の外接円の半径 R は，$R=$ イ$\boxed{}$ である。また，$\angle$ABC の二等分線と $\triangle$ABC の外接円の交点で B と異なる点を D とする。このとき，AD$=$ ウ$\boxed{}$ であり，さらに $\triangle$ABC の外接円の中心を O とすると，$\triangle$AOD の面積は エ$\boxed{}$ となる。

解説

(ア) $\triangle$ABC において，余弦定理より

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{5^2+7^2-(4\sqrt{2})^2}{2\cdot5\cdot7}=\frac{42}{2\cdot5\cdot7}=^{ア}\frac{3}{5}$$ 答

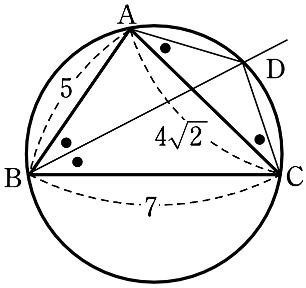
(イ) $0^\circ<B<180^\circ$ であるから， $\sin B>0$ より

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$\triangle$ABC において，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{\mathrm{AC}}{2\sin B}=\frac{4\sqrt{2}}{2\cdot\frac{4}{5}}=^{イ}\frac{5\sqrt{2}}{2}$$ 答



(ウ) 四角形 ABCD は，円に内接するから，
円周角の定理より

$\angle$DCA$=\angle$ABD

$\angle$DAC$=\angle$CBD

BD は，$\angle$ABC の二等分線であるから，

$\angle$ABD$=\angle$CBD

よって， $\angle$DCA$=\angle$DAC

したがって，$\triangle$ACD は，AD$=$CD の二等辺三角形である

四角形 ABCD は，円に内接するから， $\angle$ADC$=180^\circ-B$

AD$=$CD$=x$ とおくと，$\triangle$ACD において，余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

$$(4\sqrt{2})^2=x^2+x^2-2x^2\cos(180^\circ-B)$$

$32=2x^2+2x^2\cos B$

$x^2=10$

$x>0$ より，$x=\sqrt{10}$　　$\therefore$ $\mathrm{AD}={}^{ウ}\sqrt{10}$　答

(エ) 円周角の定理より

$\angle\mathrm{AOD}=2\angle\mathrm{ABD}=B$

よって，$\triangle\mathrm{AOD}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}R^2\sin B$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{5}={}^{エ}5$$ 答

確認問題2

円に内接する五角形 ABCDE において，$AB=7$，$BC=3$，$CD=5$，$DE=6$，$\angle BCD=120°$ とする。

(1)　BD の長さを求めよ。

(2)　$\angle BAD$ の大きさを求めよ。

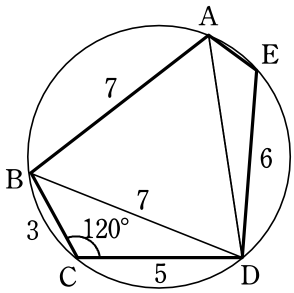
(3)　AE の長さを求めよ。

(解説)

(1) $\triangle BCD$ において，余弦定理より

$$BD^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120°=49$$

$BD>0$ より，$BD=7$　答



(2) 四角形 ABCD は，円に内接するから

$$\angle BAD=180°-\angle BCD$$
$$=180°-120°=60°$$　答

(3) $AB=BD$ より，　$\angle ADB=\angle BAD=60°$

よって，$\triangle ABD$ は，正三角形であるから

$$\angle ABD=60°,\ AD=7$$

四角形 ABDE が円に内接するから

$$\angle AED=180°-\angle ABD=180°-60°=120°$$

$AE=x$ とおくと，

$\triangle ADE$ において，余弦定理より

$$7^2=x^2+6^2-2\cdot x\cdot6\cos120°$$

$$x^2+6x-13=0$$

$x>0$ より，　$x=-3+\sqrt{22}$　　$\therefore\ AE=-3+\sqrt{22}$　答

確認問題3

円に内接する三角形 ABC において，$AB=10$，$BC=6$，$\angle B=120°$ とする．また，弧AC 上に点 P をとる．

(1)　辺 AC の長さを求めよ．

(2)　円の半径を求めよ．

(3)　四角形 ABCP の面積の最大値を求めよ．また，そのときの $\sin\angle BAP$ の値を求めよ．

(解説)

(1) $\triangle ABC$ において，余弦定理より

$$AC^2=10^2+6^2-2\cdot10\cdot6\cdot\cos120°$$

$=100+36+60=196$

AC>0 より， AC$=14$ 答

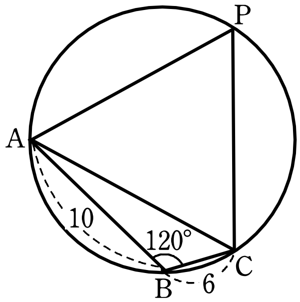
(2) 求める円の半径を R とおくと，正弦定理より

$$2R=\frac{14}{\sin 120^\circ}$$

$$\therefore\ R=\frac{14}{2\sin 120^\circ}=\frac{14}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$$ 答

(3) 四角形 ABCP の面積を S とおくと

$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{APC}$



$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6\cdot\sin 120^\circ=15\sqrt{3}$ (一定)より

△APC の面積が最大のとき，S も最大となる

△APC の面積が最大となるのは，

AC を底辺とすると，高さが最大のとき，

すなわち，点 P が，AC と平行な円の接線の接点となるときである

$\angle\mathrm{APC}=180^\circ-\angle\mathrm{B}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ であるから，△APC は，正三角形である

このとき，

$$S=15\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 14\cdot\sin 60^\circ=64\sqrt{3}$$

$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とおくと，

$S=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{CBP}$

$$64\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 14\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 14\cdot\sin(180^\circ-\theta)$$

$$64\sqrt{3}=112\sin\theta$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}\qquad\therefore\sin\angle\mathrm{BAP}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$ 答

確認問題4

AB＝2，BC＝3，CD＝6，DA＝5 である四角形 ABCD があり，この四角形は円 O に内接している。

(1)　$\cos\angle B=$ ア$\boxed{}$ であり，AC＝ イ$\boxed{}$ である。

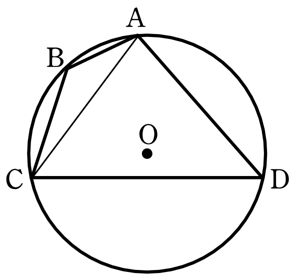
(2)　円 O の半径は ウ$\boxed{}$ である。

(3)　四角形 ABCD の面積は エ$\boxed{}$ である。

(4)　四角形 ABCD は，ある円に外接している。この円の半径は オ$\boxed{}$ である。

解説

(1) △ABC において，余弦定理より



$$AC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos\angle B$$
$$=13-12\cos\angle B$$

$\angle D=180°-\angle B$ であるから，

△ACD において，余弦定理より

$$AC^2=6^2+5^2-2\cdot6\cdot5\cos(180°-\angle B)$$
$$=61+60\cos\angle B$$

よって

$$13-12\cos\angle B=61+60\cos\angle B$$

$$\therefore \cos\angle B= {}^{ア}-\frac{2}{3}$$

したがって

$$AC^2=13-12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=13+8=21$$

AC＞0 より，　AC＝ イ$\sqrt{21}$　答

(2) $0°<\angle B<180°$ であるから，$\sin\angle B>0$ より

$$\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

円 O の半径を R とすると，

△ABC において，正弦定理より

$$2R=\frac{AC}{\sin\angle B}$$

$\therefore\ R=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{5}}=^{ウ}\dfrac{3\sqrt{105}}{10}$ 答

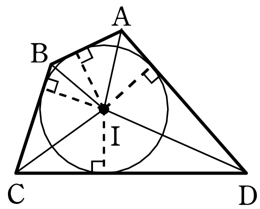
(3) 四角形 ABCD の面積 S は

$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin\angle\mathrm{B}+\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\sin(180°-\angle\mathrm{B})$

$=18\sin\angle\mathrm{B}=18\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=^{エ}6\sqrt{5}$ 答

(4) 四角形 ABCD が外接している円の中心を I,
半径を r とすると,



$S=\triangle\mathrm{IAB}+\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICD}+\triangle\mathrm{IDA}$ より

$6\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot r+\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot r+\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot r+\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot r$

$6\sqrt{5}=8r\quad\therefore\ r=^{オ}\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ 答