4.2　集合と論理(2)

(1) ならば

条件 p, q に対して，

p を満たすものはすべて q を満たす (全称命題) という条件を，

条件「 p ならば q」

と定義し，$p \Longrightarrow q$ と表します。

このとき， p をこの命題の**仮定**， q を**結論**といいます。

条件 p, q を満たすもの全体の集合を

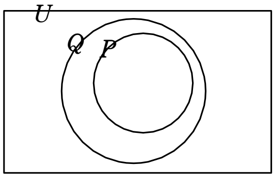
それぞれ P, Q とすると，定義より，

$p \Longrightarrow q$ と $P \subset Q$ が成り立つは同じこと

です。すなわち，次のことがいえます。

$p \Longrightarrow q$　ならば　$P \subset Q$ が成り立つ

$P \subset Q$ が成り立つ　ならば　$p \Longrightarrow q$



命題 $p \to q$ が偽であるとき，$P \subset Q$ が成り立たないから，P の中に Q からはみ出すもの，すなわち $P \cap \overline{Q}$ の要素 (p であって q でないもの) が存在する (特称命題) ということです。この要素が反例です。

同様に，「 p ならば q」の否定は，

「 p であって q でないものが存在する。」です。

注 $p \to q$ が真であるとき， $p \Longrightarrow q$ と表します。また， $p \to q$ の真偽が不確定のときは $p \to q$ と表すことにします。

例1 整数 m，n に関する次の命題について，正しければ ○，誤っていれば × と答えよ。 (1)　$m+n$ が 2 で割り切れないならば，mn は 2 で割り切れる。 (2)　mn が 2 で割り切れないならば，$m+n$ は 2 で割り切れない。 (3)　$m+n$ が 2 で割り切れるならば，mn は 2 で割り切れる。

(解説)

(1) $m+n$ が 2 で割り切れないとき，m，n のうち一方が奇数で他方が偶数であるから，mn は 2 で割り切れる　○

(2) mn が 2 で割り切れないとき，m，n はともに奇数であり，$m+n$ は 2 で割り切れる　×

(3) $m+n$ が 2 で割り切れるとき，m，n はともに奇数，または，m，n はともに偶数である

m，n がともに奇数のとき mn は 2 で割り切れない　×

別解

(3) は (2) の対偶であるから，命題の真偽は一致する。よって，×

例2

A　$x \leqq 2$ ならば，$x^2 \leqq 4$ である。　B　$x^2 \leqq 4$ ならば，$x \leqq 2$ である。

C　$x^2 < 4$ ならば，$x < 2$ である。　D　$x^2 > 4$ ならば，$x > 2$ である。

命題 A，B，C，D のうち，真であるものは $^{ウ}\boxed{}$ で，他は偽である。

解説

$A=\{x \mid x \leqq 2\}$，　$B=\{x \mid x^2 \leqq 4\}=\{x \mid -2 \leqq x \leqq 2\}$

$C=\{x \mid x<2\}$，　$D=\{x \mid x^2<4\}=\{x \mid -2<x<2\}$

$E=\{x \mid x>2\}$，　$F=\{x \mid x^2>4\}=\{x \mid x<-2, x>2\}$

命題 A は，$A \not\subset B$ より偽

命題 B は，$B \subset A$ より真

命題 C は，$D \subset C$ より真

命題 D は，$F \not\subset E$ より偽

よって，真である命題は，B，C

例3

整数 n に関する次の命題が真となるために実数 k が満たすべき条件を求めよ。

$$n^2-5n+4<0 \quad \text{ならば} \quad |n-3| \leqq k$$

解説

$n^2-5n+4<0$

$(n-1)(n-4)<0$　$\therefore 1<n<4$

n は整数より，$n=2$，3

このとき，$0 \leqq |n-3| \leqq 1$

よって，満たすべき条件は，$k \geqq 1$

例4
次の命題について以下の(ア)，(イ)に答えよ(ただし x，yは実数，m，n は整数とする).

(A)　$|x|<1$ ならば，$x^2<1$ である.

(B)　m が 4 の倍数ならば，m は 2 の倍数である.

(C)　$x>y$ ならば，$x^2>y^2$ である.

(D)　mn が 6 の倍数ならば，m または n は 6 の倍数である.

(ア)　命題が真であるものは $\boxed{}$ である.(記号で答えよ)

(イ)　命題の逆が偽であるものは $\boxed{}$ である.(記号で答えよ)

(解説)

(A) $|x|<1 \iff -1<x<1$

$x^2<1 \iff -1<x<1$

よって，命題(A)もその逆も真

(B) $m=4k=2(2k)$ (k は整数)より，命題(B)は真

その逆は偽　(反例) $m=2$

(C) 命題(C)は偽　(反例) $x=-1, y=-2$

その逆も偽　(反例) $x=-2, y=1$

(D) 命題(D)は偽　(反例) $m=2, n=3$

その逆は真

よって，

(ア)　命題が真であるのものは，(A)，(B)

(イ)　命題の逆が偽であるものは，(B)，(C)

命題 $p \to q$ に対して，$q \to p$ を $p \to q$ の**逆**(**命題**)といいます。本問からも分かるように，$p \to q$ が真であっても，$q \to p$ が真であるとは限りません。

(2) **必要条件・十分条件**

2 つの条件 p, q に対して，命題 $p \to q$ が真であるとき，

q は p であるための**必要条件**である，

p は q であるための**十分条件**である

といいます。

どちらが主語かでどちらの条件か変わってくるので，まず，主語は何なのか注意して下さい。また，$p \to q$ が真であるとき，$P \subset Q$ という包含

関係が成り立つので，主語の集合が対象となるものの集合よりも大きな集合のとき，主語は対象であるための必要条件(主語であるためには，少なくとも述語が成り立つ必要がある)，主語の集合が対象となるものの集合よりも小さな集合のとき，主語は対象であるための十分条件(主語であるためには，述語が成り立てば十分)と覚えておくとよい。

2つの命題 $p \to q$ かつ $q \to p$ を $p \Leftrightarrow q$ と表します。命題 $p \to q$ と $q \to p$ がともに真，すなわち，命題 $p \Leftrightarrow q$ が成り立つとき，

q は p であるための**必要十分条件**である

といいます。このとき， p は q であるための必要十分条件でもあります。また，このとき， p と q は**同値**であるともいいます。
さらに，このとき， $P \subset Q$ かつ $Q \subset P$ であるから， $P = Q$ です。

例5
次の p は q にとっての
(ア) 必要条件，(イ) 十分条件，(ウ) 必要十分条件，
(エ) 以上のいずれでもない，
のいずれであるかを答えよ．ただし，a, b, c は実数とする．

(1) $p : a = b$ $\quad$ $q : ac = bc$
(2) $p : a^2 > b^2$ $\quad$ $q : a > b$
(3) $p : a > 0, b > 0$ $\quad$ $q : a + b > 0, ab > 0$
(4) $p : a + b, ab$ は整数 $\quad$ $q : a, b$ は整数
(5) $p : ab > 0$ $\quad$ $q : \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} > 0$

解説
(1) $p \to q$ は真， $q \to p$ は偽 (反例) $c = 0, a = 1, b = 2$ (イ)
(2) $p \to q$ は偽 (反例) $a = -2, b = -1$
$q \to p$ は偽 (反例) $a = -1, b = -2$ (エ)
(3) $p \to q$ は真，
$q \to p$ も真 (証明) $ab > 0$ より， $a > 0, b > 0$ または $a < 0, b < 0$
$a + b > 0$ より， $a > 0, b > 0$ (ウ)
(4) $p \to q$ は偽 (反例) $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$
$q \to p$ は真 (ア)
(5) $p \to q$ は真 (証明) $\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} > 0$ $(a^2 + b^2 > 0\ (a, b \fallingdotseq 0))$
逆をたどれば， $q \to p$ も真 (ウ)

例6

実数 x，y について，「x，y はともに整数」は「$x+y$，xy はともに整数」であるための $^{ア}\boxed{}$ 。また，「$x+y>2$ かつ $xy>1$」は「$x>1$ かつ $y>1$」であるための $^{イ}\boxed{}$ 。

$^{ア}\boxed{}$，$^{イ}\boxed{}$ にあてはまるものを，それぞれ次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが，十分条件でない
② 十分条件であるが，必要条件でない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

解説

(ア)「x，y はともに整数」$\Leftrightarrow$「$x+y$，xy はともに整数」
→は真
←は偽 (反例) $x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$
よって，②

(イ)「$x+y>2$ かつ $xy>1$」$\Leftrightarrow$「$x>1$ かつ $y>1$」
→は偽 (反例) $x=2,\ y=\dfrac{1}{3}$
←は真
よって，①

例7

以下の $\boxed{}$ にあてはまるものを，例6 の①～④のうちから1つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。また，a は実数である。

(1) $|a+1|=2$ は $a^2+2a-3=0$ であるための $\boxed{}$。

(2) $|a-1|<2$ は $a^2-1<0$ であるための $\boxed{}$。

(3) $1<|a|<2$ は $-1<a<2$ であるための $\boxed{}$。

解説

(1) $A=\{a \mid a\in\mathbb{R}, |a+1|=2\}$ とすると， $A=\{-3, 1\}$

$B=\{a \mid a\in\mathbb{R}, a^2+2a-3=0\}$ とすると， $B=\{-3, 1\}$

$A=B$ より， ③

(2) $C=\{a \mid a\in\mathbb{R}, |a-1|<2\}$ とすると， $C=\{a \mid a\in\mathbb{R}, -1<a<3\}$

$D=\{a \mid a\in\mathbb{R}, a^2-1<0\}$ とすると， $D=\{a \mid a\in\mathbb{R}, -1<a<1\}$

$C\supset D$ より， ①

(3) $E=\{a \mid a\in\mathbb{R}, 1<|a|<2\}$ とすると，

$E=\{a \mid a\in\mathbb{R}, -2<a<-1, 1<a<2\}$

$F=\{a \mid a\in\mathbb{R}, -1<a<2\}$

$E\not\subset F$ かつ $E\not\supset F$ より， ④

例8

a は正の定数とする。実数 x についての条件 p，q を

$$p : a<x<2a \qquad\qquad q : 2<x<3$$

と定めるとき，p が q であるための必要条件となるような a の値の範囲を求めよ。

解説

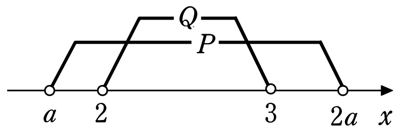
$P=\{x \mid a<x<2a\}$，$Q=\{x \mid 2<x<3\}$

とすると，$Q\subset P$ となればよいから

$a\leqq 2$ かつ $3\leqq 2a$

よって，

$$\frac{3}{2}\leqq a\leqq 2$$



例9

自然数 n に関する次の命題を証明せよ。

(1)　n を 3 で割った余りが 1 ならば，n^2 を 3 で割った余りは 1 である。

(2)　n が 3 の倍数であることは，n^2 が 3 の倍数であるための必要十分条件である。

解説

(1) $n=3k+1$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$ とおける

$n^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$

$3k^2+2k$ は整数より， n^2 を 3 で割った余りは 1 である

(2) $n=3l$ (l は整数) のとき，

$n^2=3(3l^2)$

$3l^2$ は整数より， n^2 は 3 の倍数である

n は $3l, 3l+1, 3l+2$ (l は整数)のいずれかで表すことができ，

$n=3l$ のとき， $n^2=3(3l^2)$

$n=3l+1$ のとき， $n^2=(3l+1)^2=3(3l^2+2l)+1$

$n=3l+2$ のとき， $n^2=(3l+2)^2=3(3l^2+4l+1)+1$

であるから，逆に n^2 が 3 の倍数であるとき， n は 3 の倍数である

よって，示された

確認問題1

次の各組で，P は Q であるためのどんな条件か，あてはまるものを A，B，C，D から選び，記号で答えよ．ただし，小文字はすべて実数とする．

A：必要　　B：十分　　C：必要十分　　D：いずれでもない

(1)　P：$x+y$ は偶数　　Q：x と y は偶数

(2)　P：$a<0$，$b^2-4ac<0$　　Q：すべての x に対して $ax^2+bx+c<0$

(3)　P：$ab \neq 0$　　Q：$|a|+|b|>|a+b|$

(4)　P：$x>y$　　Q：$ax>ay$

(5)　P：$a^2+b^2+c^2=0$　　Q：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

解説

(1) $P \to Q$ は偽　(反例) $x=1, y=1$

$Q \to P$ は真

よって，A

(2) $P \to Q$ は真，$Q \to P$ も真

よって，C

(3) $P \to Q$ は偽　(反例) $a=1, b=1$

$Q \to P$ は真

(証明)

対偶 $ab=0 \to |a|+|b| \leqq |a+b|$ は真より，元の命題も真

よって，A

(4) $P \to Q$ は偽　反例 $x=2, y=1, a=-1$

$Q \to P$ は偽　反例 $a=-1, x=1, y=2$

よって，D

(5) $P \to Q$ は真

(証明)

a, b, c は実数，$a^2+b^2+c^2=0$ より，$a=b=c=0$ から明らか

$Q \to P$ は偽　反例 $a=b=c=1$

よって，B

確認問題2
次の文中の空欄にあてはまるものを，下の(ア)～(エ)のうちから1つ選び，記号で答えよ。

(ア)　必要条件であるが十分条件でない
(イ)　十分条件であるが必要条件でない
(ウ)　必要十分条件である
(エ)　必要条件でも十分条件でもない

α，β を実数でない複素数とする。$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ がともに実数であることは，α は β に共役な複素数であるための $\boxed{}$。

(解説)

p ：$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ がともに実数である
q ：α は β に共役な複素数である　　とする
$p \to q$ について
$\alpha+\beta=s, \alpha\beta=t$ (s, t は実数)とおくと，
α, β を2解とする2次方程式の1つは

$$x^2-sx+t=0$$

である
α, β は虚数であり，2次方程式が虚数解 α をもつとき，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解にもつから，真である
$q \to p$ について
$\alpha=a+bi, \beta=a-bi$ (a, b は実数， $b \neq 0$) とおくと，

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a \text{ (実数)}$$

$$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \text{ (実数)}$$

より，真である
よって，(ウ)

確認問題3

$^{ア}\boxed{}$，$^{イ}\boxed{}$ には，下の選択肢 (a)，(b)，(c)，(d) から正しいものを選べ．

(1)　a，b，c，d は定数で，$a<b$，$c<d$ とする．2 つの不等式 $a<x<b$，$c<x<d$ を同時に満たす実数 x が存在するためには，$c<b$ であることは $^{ア}\boxed{}$.

(2)　m を自然数とする．m^2 を 7 で割ると余りが 1 であることは，m を 7 で割ると余りが 1 となるための $^{イ}\boxed{}$.

選択肢：

(a)　必要十分条件である

(b)　必要条件ではあるが十分条件ではない

(c)　十分条件ではあるが必要条件ではない

(d)　必要条件でも十分条件でもない

解説

(1) p ： $c<b$ である

q ： $a<x<b$，$c<x<d$ を同時に満たす実数 x が存在する　とする

$p \to q$ は偽　(反例) $a=3, b=4, c=1, d=2$

$q \to p$ は真

よって，(b)

(2) p ： m^2 を 7 で割ると余りが 1 である

q ： m を 7 で割ると余りが 1 である　とする

すべての整数は，$7k, 7k\pm1, 7k\pm2, 7k\pm3$ (k は整数)のいずれかで表せる

$m=7k$ (k は整数)のとき，　$m^2=7(7k^2)$

$m=7k\pm1$ (k は整数)のとき，　$m^2=7(7k^2\pm2k)+1$

$m=7k\pm2$ (k は整数)のとき，　$m^2=7(7k^2\pm4k)+4$

$m=7k\pm3$ (k は整数)のとき，　$m^2=7(7k^2\pm6k+1)+2$

$p \to q$ は偽　(反例) $m=6$

$q \to p$ は真

よって，(b)

確認問題4
$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$a \leqq b$ と $a^2 \leqq b^2$ とは互いに同値であることを示せ。

解説

p ： $a \leqq b$

q ： $a^2 \leqq b^2$ とする

$p \rightarrow q$

$a \leqq b$ より， $b-a \geqq 0$

$b^2-a^2=(b+a)(b-a)$

$a, b \geqq 0$ であるから， $b+a \geqq 0$ かつ $b-a \geqq 0$ より

$b^2-a^2 \geqq 0 \quad \therefore a^2 \leqq b^2$

$q \rightarrow p$

$b^2-a^2 \geqq 0$

$(b+a)(b-a) \geqq 0$

$a, b \geqq 0$ であるから， $b+a \geqq 0$ より

$b+a=0$ のとき， $a=b=0$ となり $a \leqq b$ ($a=b$)

$b+a>0$ のとき， $b-a \geqq 0$ となり $a \leqq b$

よって示された