4.3　証明法(1)

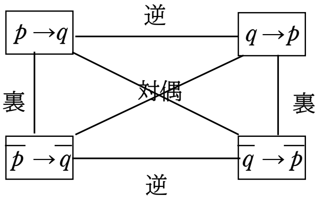
(1) **逆・裏・対偶**

　命題 $p \to q$ に対して，

　$q \to p$ を $p \to q$ の逆(命題)，

　$\overline{q} \to \overline{p}$ を $p \to q$ の対偶(命題)，

　$\overline{p} \to \overline{q}$ を $p \to q$ の裏(命題)

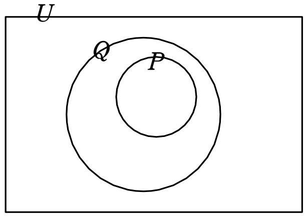


といいます。これらは，互いに右の図式の関係にあります。

全体集合を U とし，条件 p, q を満たすもの全体の集合を，それぞれ P, Q とします。このとき，

命題 $p \to q$ が真と $P \subset Q$ は同じことです。

また，その対偶 $\overline{q} \to \overline{p}$ が真と $\overline{Q} \subset \overline{P}$ は同じことです。



また，右のベン図から分かるように，

$$P \subset Q \Leftrightarrow \overline{Q} \subset \overline{P}$$

が成り立ちます。

また，$p \to q$ が偽，すなわち p であって q でないもの (P の要素で Q からはみ出すもの) が存在するとき，$\overline{q}$ であって $\overline{p}$ でないものが存在します。すなわち，$\overline{q} \to \overline{p}$ も偽となります。よって，次のことが成り立ちます。

命題とその対偶の真偽

命題 $p \to q$ とその対偶 $\overline{q} \to \overline{p}$ の真偽は一致する

例1

2 つの実数 x，y に対する次の命題の逆と対偶を述べよ。そして，それらの真偽を述べよ。ただし，証明または反例を記入する必要はない。

「$x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば $xy \neq 0$ である」

(解説)

逆「$xy \neq 0$ ならば $x \neq 0$ または $y \neq 0$ である」

逆は真　逆の対偶「$x = 0$ かつ $y = 0$ ならば $xy = 0$」が真

対偶「$xy = 0$ ならば $x = 0$ かつ $y = 0$ である」

対偶は偽　(反例) $x = 0$，$y = 3$

例2
命題「$x+y\leqq 4$ ならば $x\leqq 2$ あるいは $y\leqq 2$ である」について
(1)　上の命題の逆，裏，対偶を述べよ．
(2)　(1)の各命題の真偽を調べよ．

解説
(1) 逆「$x\leqq 2$ あるいは $y\leqq 2$ ならば $x+y\leqq 4$ である」
裏「$x+y>4$ ならば $x>2$ かつ $y>2$ である」
対偶「$x>2$ かつ $y>2$ ならば $x+y>4$ である」
(2) 命題の逆は偽　(反例) $(x, y)=(1, 4)$
命題の裏は偽　(反例) $(x, y)=(1, 4)$
命題の対偶は真

例3
実数 x, y について，次の命題の逆および対偶を作り，それぞれの命題について真のときはそれを証明し，偽のときはその反例をあげよ．
命題：「xy が無理数ならば，x, y の少なくとも一方は無理数である．」

解説
逆「x, y の少なくとも一方が無理数ならば，xy は無理数である」は偽
(反例) $x=\sqrt{2}, y=0$
対偶「x, y がともに有理数ならば，xy は有理数である」　真．
(証明)
$x=\dfrac{b}{a}, y=\dfrac{d}{c}$ $(a, b, c, d$ は整数，$a, c\fallingdotseq 0)$ とおくと

$$xy=\frac{bd}{ac}$$

ac, bd はそれぞれ整数より，
xy は有理数である

例4

a，b，c は実数とする。命題「$ac<0$ ならば，x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数解をもつ」…… ① について，次の問いに答えよ。

(1)　命題 ① の真偽を調べ，真のときには証明し，偽のときには反例を 1 つ示せ。

(2)　命題 ① の逆を作り，その真偽を調べ，真のときには証明し，偽のときには反例を1 つ示せ。

(3)　命題 ① の裏を作り，その真偽を調べ，真のときには証明し，偽のときには反例を1 つ示せ。

(解説)

(1) 命題①は真

$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると， $D=b^2-4ac$

$ac<0$ のとき， $D>0$ であるから，命題 ① は真である

(2) 逆「x についての 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつならば，$ac<0$ である」は偽

(反例) $a=1$，$b=1$，$c=0$

(3) 裏「$ac \geqq 0$ ならば，x についての 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は実数解をもたない」は偽

(反例) $a=1$，$b=1$，$c=0$

(2) 対偶法

命題 $p \to q$ とその対偶 $\overline{q} \to \overline{p}$ の真偽は一致するので，命題の証明について，次のことがいえます。

対偶法 (対偶証明法)

命題 $p \to q$ を証明するのに，その対偶 $\overline{q} \to \overline{p}$ を証明してもよい

命題 $p \to q$ を証明するのに，p を仮定して q を直接導くのが難しい場合に対偶法は有効です。 もとの命題を直接証明する証明法を**直接証明法**というのに対し，対偶法のように，間接的にもとの命題を証明する証明法を**間接証明法**といいます。

例5

整数 m の平方が 3 の倍数ならば，m は 3 の倍数であることを，対偶によって証明せよ．

(解説)

もとの命題の対偶は，

「整数 m が 3 の倍数でないならば，m^2 は 3 の倍数でない」である

整数 m が 3 の倍数でないとき，

$m=3n+1$ または $m=3n+2$ (n は整数) とおける

$m=3n+1$ のとき，$m^2=(3n+1)^2=9n^2+6n+1=3(3n^2+2n)+1$

$m=3n+2$ のとき，$m^2=(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1$

よって，m^2 は 3 の倍数でない

対偶が真であるから，もとの命題も真，すなわち，

整数 m の平方 が 3 の倍数ならば，m は 3 の倍数である

例6

次の各命題について，正しい場合はそれを証明し，正しくない場合は反例をあげよ．ただし，a，b は自然数とする．

(1)　a が奇数かつ b が奇数ならば，a^2+b^2 が偶数．

(2)　a^2+b^2 が偶数ならば，a が奇数かつ b が奇数．

(3)　a^2+b^2 が奇数ならば，a が奇数または b が奇数．

(解説)

(1) 正しい

(証明)

$a=2m-1$，$b=2n-1$ (m，n は自然数)とおくと

$$a^2+b^2=(2m-1)^2+(2n-1)^2=2(2m^2-2m+2n^2-2n+1)$$

よって，a^2+b^2 は偶数である

(2) 正しくない

(反例) $a=2$，$b=4$

(3) 正しい

(証明)

対偶は「a が偶数かつ b が偶数ならば，a^2+b^2 が偶数」である

$a=2m$，$b=2n$ (m，n は自然数) とおくと

$$a^2+b^2=(2m)^2+(2n)^2=2(2m^2+2n^2)$$

よって，a^2+b^2 は偶数である

したがって，対偶が正しいから，もとの命題も正しい.

例7
a，b を実数とするとき，次の命題の真偽を答えよ。また真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ。
(1)　$a+b$ と ab がともに無理数ならば，a，b はともに無理数である。
(2)　a^3 と a^5 がともに有理数ならば，a は有理数である。
(3)　$a+b>2$ かつ $ab>1$ ならば，$a>1$ かつ $b>1$ である。

解説
(1) 偽
(反例) $a=1$，$b=\sqrt{2}$
対偶「 a または b が有理数ならば， $a+b$ または ab は有理数」で考えてもよい。
(2) 真
(証明)
a^3 と a^5 がともに有理数のとき，
$a=\frac{a^6}{a^5}=\frac{(a^3)^2}{a^5}$ より，a は有理数である
(3) 偽
(反例) $a=4$，$b=\frac{1}{2}$
対偶「 $a\leqq 1$ または $b\leqq 1$ ならば， $a+b\leqq 2$ または $ab\leqq 1$ 」で考えてもよい。

確認問題1
次の命題の真偽を調べ，真であるときは証明を与え，偽であるときは反例をあげよ。ただし，m，n は自然数とする。
(1)　n^2 が 4 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。
(2)　m^2+n^2 が偶数ならば，$m+n$ は偶数である。

解説

(1) 偽　(反例) $n=2$

(2) 真

(証明)

対偶は「$m+n$ が奇数ならば， m^2+n^2 は奇数である」

$m+n=2k+1$ (k は整数) とおくと

$$\begin{aligned} m^2+n^2 &= (m+n)^2-2mn \\ &= (2k+1)^2-2mn \\ &= 2(2k^2+2k-mn)+1 \end{aligned}$$

$2k^2+2k-mn$ は自然数なので， m^2+n^2 は奇数である

よって，対偶が真であるから，与えられた命題も真である

確認問題2

次の命題が正しいかどうか判定し，正しいならば証明を与え，正しくないならば反例を挙げよ．

命題「a，b，c を自然数とする．$a+b+c$，$ab+bc+ca$ がともに偶数ならば，a，b，c はいずれも偶数である．」

(解説)

対偶は「 a, b, c の少なくとも 1 つが奇数ならば， $a+b+c$ または $ab+bc+ca$ は奇数である」

a, b, c のうち奇数が 1 つか 3 つのとき， $a+b+c$ は奇数である

a, b, c のうち奇数が 2 つのとき， ab, bc, ca のうちどれか 1 つが奇数となり，他の 2 つは偶数となるので， $ab+bc+ca$ は奇数である

対偶が真であるから，もとの命題も真である

確認問題3
次の命題の真偽を述べよ。また，真であるときは証明し，偽であるときは反例 (成り立たない例) をあげよ。ただし，x，y は実数とし，n は自然数とする。
(1)　x が無理数ならば，x^2 と x^3 の少なくとも一方は無理数である。
(2)　$x+y$，xy がともに有理数ならば，x，y はともに有理数である。
(3)　n^2 が 8 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。

(解説)
(1) 真
(証明)
対偶は「 x^2 と x^3 がともに有理数ならば， x は有理数である」
x^2 と x^3 がともに有理数であるとき
$x=0$ のとき，真
$x\neq 0$ のとき，

$$x=\frac{x^3}{x^2}$$

は有理数であるので，真
対偶が真であるから，元の命題も真である
(2) 偽　(反例) $x=\sqrt{2}$， $y=-\sqrt{2}$
(3) 真
(証明)
対偶は「n が 4 の倍数でないならば，n^2 は 8 の倍数でない」
n が 4 の倍数でないとき，n は

$4k\pm 1, 4k+2$ (k は自然数。ただし， $4k+1, 4k+2$ は $k=0$ も含む)

のいずれかで表される

$$(4k\pm 1)^2=8(2k^2\pm k)+1$$

$$(4k+2)^2=8(2k^2+2k)+4$$

よって，n^2 は 8 の倍数でない
したがって，対偶が真であるから，もとの命題も真である