2.3　接線

(1) 接線の方程式

前節までで学習したように，関数 $f(x)$ の微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 A $(a, f(a))$ における曲線の接線の傾きを表します。

よって，曲線上の点における曲線の接線の方程式は，次のようになります。

接線の方程式
曲線 $y=f(x)$ 上の点 A $(a, f(a))$ における曲線の接線の方程式は
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

例1
曲線 $y=x^3-x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線がこの曲線と交わるもう 1 つの点の座標を求めよ。

(解説)

$f(x)=x^3-x$ とおく

$f'(x)=3x-1$

$y=f(x)$ 上の点 $(1, 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=f'(1)(x-1)$$
$$y=2(x-1) \qquad \therefore\ y=2x-2$$

$y=f(x)$ と $y=2x-2$ の共有点の x 座標は

$$x^3-x=2x-2$$
$$x^3-3x+2=0$$
$$(x-1)^2(x+2)=0 \qquad \therefore\ x=1, -2$$

よって，求める点の座標は $(-2, -6)$

また，曲線 $y=f(x)$ 上の点 A $(a, f(a))$ を通り，点 A における接線に垂直な直線を**法線**といいます。法線は接線に直交することから，曲線上の点における法線の方程式は，次のようになります。

法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}\,(a,\,f(a))$ における曲線の法線の方程式は

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

例2

曲線 $y=x^3-x$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を通り，その曲線の点 P における接線と垂直である直線の方程式を求めよ

(解説)

$f(x)=x^3-x$ とおく

$f'(x)=3x^2-1$

$y=f(x)$ 上の点 P における接線と垂直である直線 (法線) の方程式は

$$y-0=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

(2) **曲線上にない点から曲線に引いた接線の方程式**

例3

(1) 点 $(1,\ 1)$ を通り，曲線 $y=x^3-4x+5$ に接する直線の方程式を求めよ。

(2) $f(x)=x^3-2x$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\,f(a))$ (ただし，$a\neq 0$) における法線 [点 $(a,\,f(a))$ における接線と垂直に交わる直線] が原点 $(0,\,0)$ を通るとする．このとき，a の値を求めよ．

(解説)

(1) $f(x)=x^3-4x+5$ とおく

$f'(x)=3x^2-4$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^3-4t+5)=(3t^2-4)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(3t^2-4)x-2t^3+5$$

これが点 $(1, 1)$ を通るとき

$$1=3t^2-4-2t^3+5$$

$$2t^3-3t^2=0$$

$$t^2(2t-3)=0 \quad \therefore\ t=0,\ \frac{3}{2}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=-4x+5,\ y=\frac{11}{4}x-\frac{7}{4}$$

(2) $f(x)=x^3-2x$

$f'(x)=3x^2-2$

(ⅰ) $f'(x)=0$ のとき

$3x^2-2=0 \quad \therefore\ x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$y=f(x)$ の $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ における法線は $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (複号同順) であり，

原点は通らない

(ⅱ) $f'(x)\fallingdotseq 0$ のとき

$y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ ($a \fallingdotseq 0$) における法線は

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y-(a^3-2a)=-\frac{1}{3a^2-2}(x-a)$$

これが原点を通るとき

$$a^3-2a=-\frac{a}{3a^2-2}$$

$$(a^3-2a)(3a^2-2)=-a$$

$$3a^5-8a^3+5a=0$$

$$a(a^2-1)(3a^2-5)=0$$

$a\fallingdotseq 0$ より，　$a=\pm1,\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(ⅰ),(ⅱ) より，　$a=\pm1,\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(3) いろいろな問題

例4

曲線 $y=x^3-x^2-2x$ 上の点 (2，0) における接線 ℓ の方程式は

$y=$ ア$\boxed{}$ である。また，曲線 $y=x^3-x^2-2x$ の接線で，ℓ に平行な

直線は $y=$ イ$\boxed{}$ である。

解説

$f(x)=x^3-x^2-2x$ とおく

$f'(x)=3x^2-2x-2$

接線 l の方程式は

$y-0=f'(2)(x-2)$

$y=6(x-2)$ $\quad\therefore\ y=6x-12$

$y=f(x)$ の接線で l と平行となるとき，l の傾きが 6 より

$f'(x)=6$

$3x^2-2x-2=6$

$3x^2-2x-8=0$

$(x-2)(3x+4)=0$ $\quad\therefore\ x=2,\ -\dfrac{4}{3}$

よって，求める接線は $y=f(x)$ の $x=-\dfrac{4}{3}$ における接線であるから

$$y-f\left(-\frac{4}{3}\right)=6\left(x+\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore\ y={}^{イ}6x+\frac{176}{27}$$

例5

曲線 $y=x^2$ 上の点 A $(-1,\ 1)$ を通る傾き 2 の直線を ℓ とする。

(1)　この曲線と ℓ との，A 以外の交点 B の座標を求めよ。

(2)　点 P はこの曲線上を点 A から点 B まで動く。△ABP の面積が最大となるとき，点 P の座標と △ABP の面積を求めよ。

解説

(1) ℓ の方程式は

$y-1=2(x+1)$ $\quad\therefore\ y=2x+3$

$y=x^2$ と ℓ の共有点の x 座標は

$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1, 3$

よって，点 B の座標は $(3,\ 9)$

(2) $f(x)=x^2$ とおくと $f'(x)=2x$

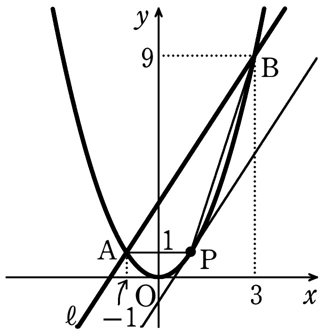
△ABP の面積が最大となるのは

点 P と ℓ との距離が最大となるとき

すなわち，点 P が ℓ と平行な $y=f(x)$ の

接線と $y=f(x)$ との接点となるときである

このとき



$f'(x)=2$

$2x=2 \quad \therefore x=1$

よって，P$(1, 1)$

△ABP の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot8=8$$

例6

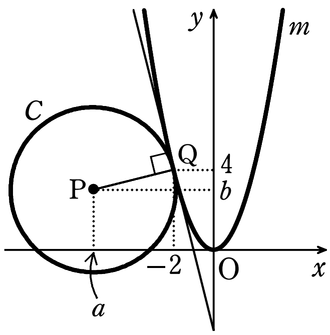
点 P$(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ があり，点 P は直線 l：$y=-x-3$ 上にある．いま，円 C が放物線 m：$y=x^2$ と点 Q$(-2,\ 4)$ で接しているとする．このとき，点 Q における共通接線の方程式を求めよ．また，a，b の値を求めよ．

(解説)

$f(x)=x^2$ とおく

$f'(x)=2x$

点 Q における共通接線は $y=f(x)$ の Q における接線であるから



$y-4=f'(-2)(x+2)$

$y-4=-4(x+2) \quad \therefore y=-4x-4$

また，P は $y=f(x)$ の Q における法線

$$y-4=-\frac{1}{f'(-2)}(x+2)$$

$$\therefore y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$$

と l との交点より

$$\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}=-x-3 \quad \therefore\ x=-6$$

よって， $a=-6, b=3$

(4) **共通接線**

2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ があり，これらが共有点をもち，かつ，その点において共通な接線をもつとき，この接線を共通接線といいます。また，このときの共有点を A とすると， $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は点 A において接するともいいます。このとき，次のことが成り立ちます。

共通接線 1

2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=a$ において共有点をもち，かつ，この点において共通接線をもつ (接する)とき，

$$\begin{cases} f(a)=g(a) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$$

例7

(1) 2 つの放物線 $y=x^2+ax+b$ と $y=-x^2$ が点 $(-2,\ -4)$ で接線を共有するとき，$a=$ ア $\boxed{}$， $b=$ イ $\boxed{}$ である。

(2) 2 つの放物線 $y=x^2+ax+a$ と $y=-2x^2+x+1$ が点 A を共有し，その点で共通な接線をもつとき，点 A の座標を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=-x^2$ とおく

$f'(x)=2x+a, g'(x)=-2x$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $(-2, -4)$ で接線を共有するとき

$$\begin{cases} f(-2)=g(-2) \\ f'(-2)=g'(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-2a+b=-4 \\ -4+a=4 \end{cases}$$

$\therefore\ a=8, b=8$

(2) $f(x)=x^2+ax+a, g(x)=-2x^2+x+1$ とおく

$f'(x)=2x+a, g'(x)=-4x+1$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が点 A を共有し，その点で共通接線をもつから

A の x 座標を t とおくと

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2+at+a=-2t^2+t+1 \cdots ① \\ 2t+a=-4t+1 \cdots ② \end{cases}$$

②より， $a=-6t+1$

①より

$$3t^2+(-6t+1)(t+1)-t-1=0$$

$$-3t^2-6t=0$$

$$t(t+2)=0 \quad \therefore\ t=0,\ -2$$

よって A は，$(0, 1), (-2, -9)$

例8

2 つの放物線 $y=kx^2$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が直交するとき，定数 k の値を求めよ。また，このとき，共有点の座標を求めよ。

解説

$f(x)=kx^2,\ g(x)=-x^2+1$ とおく

$f'(x)=2kx,\ g(x)=-2x$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が直交するとき，共有点の x 座標を t とすると

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)g'(t)=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kt^2=-t^2+1 \cdots ① \\ 2kt\cdot(-2t)=-1 \cdots ② \end{cases}$$

②より， $4kt^2=1$

①より

$$\frac{1}{4}=-t^2+1 \quad \therefore\ t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore\ k=\frac{1}{3}$$

共有点の座標は， $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ があり，$y=f(x)$ に接し，かつ，その接点とは異なる点で $y=g(x)$ にも接する直線が存在することがあります。このときの接線も共通接線というので注意が必要です。このときの共通接線を求める方法は，曲線が2次関数であるか，そうでないかで変わってきます。2次関数を含む場合は重解条件を使うことができますが，2次関数でない場合は重解条件を使うことはできません。

例9
(1) xy 平面において，2つの放物線 $y=-x^2$，$y=x^2+2x+5$ の両方に接する直線の方程式は，傾きの小さい順に $y=$ ア $\boxed{}$，$y=$ イ $\boxed{}$ である。
(2) 3次関数 $y=x^3$ のグラフの接線で，放物線 $y=-\left(x-\frac{4}{9}\right)^2$ にも接するものをすべて求めよ。
(3) 2つの曲線 $y=-2x^3+3$，$y=-2x^3-1$ のどちらにも接する直線の方程式 $y=ax+b$ を求めよ。

解説

$f(x)=-x^2,\ g(x)=x^2+2x+5$ とおく

$f'(x)=-2x,\ g'(x)=2x+2$

[解1]

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(-t^2)=-2t(x-t)$

$\therefore\ y=-2tx+t^2$

これが $y=g(x)$ に接するから

$x^2+2x+5=-2tx+t^2$

$x^2+2(t+1)x+5-t^2=0$

が重解をもてばよいので，判別式を D として，

$$\frac{D}{4}=(t+1)^2-(5-t^2)$$

$$=2t^2+2t-4=0$$

$$t^2+t-2=0$$

$$(t+2)(t-1)=0 \qquad \therefore\ t=-2,1$$

よって，

$y=-2x+1,\ y=4x+4$

[解2]

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(-t^2)=-2t(x-t)$

$\therefore\ y=-2tx+t^2$

$y=g(x)$ の $x=s$ における接線は

$y-g(s)=g'(s)(x-s)$

$y-(s^2+2s+5)=(2s+2)(x-s)$

$\therefore\ y=(2s+2)x-s^2+5$

これらが一致するとき

$$\begin{cases}-2t=2s+2 \cdots① \\ t^2=-s^2+5 \cdots②\end{cases}$$

①より， $s=-t-1$

②より

$t^2=-(-t-1)^2+5$

$2t^2+2t-4=0$

$t^2+t-2=0$

$(t+2)(t-1)=0 \qquad \therefore\ t=-2,1$

よって，

$y=-2x+1,\ y=4x+4$

[解3]

両方に接する直線を $y=ax+b$ とおく

($x=k$ は軸が y 軸に平行である放物線と接することはない)

これが $y=f(x)$ に接するから

$-x^2=ax+b$

$x^2+ax+b=0$

が重解をもてばよいので，判別式を D_1 として

$D_1=a^2-4b=0 \cdots①$

また $y=g(x)$ にも接するから

$x^2+2x+5=ax+b$

$x^2+(2-a)x+5-b=0$

が重解をもてばよいので，判別式を D_2 として

$$D_2=(2-a)^2-4(5-b)=0 \cdots ②$$

①，②より

$$(2-a)^2-20+a^2=0$$

$$2a^2-4a-16=0$$

$$a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0 \qquad \therefore\ a=-2, 4$$

よって

$$y=-2x+1,\ y=4x+4$$

(2) $f(x)=x^3$ とおく

$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-t^3=3t^2(x-t)$$

$$\therefore\ y=3t^2x-2t^3$$

これが $y=-\left(x-\dfrac{4}{9}\right)^2$ にも接するとき

$$-\left(x-\frac{4}{9}\right)^2=3t^2x-2t^3$$

$$-x^2+\frac{8}{9}x-\frac{16}{81}=3t^2x-2t^3$$

$$x^2+\left(3t^2-\frac{8}{9}\right)x^2-\left(2t^3-\frac{16}{81}\right)=0$$

が重解をもてばよいから，判別式を D として

$$D=\left(3t^2-\frac{8}{9}\right)^2+4\left(2t^3-\frac{16}{81}\right)$$

$$=9t^4+8t^3-\frac{16}{3}t^2=0$$

$$t^2(27t^2+24t-16)=0$$

$$t^2(3t+4)(9t-4)=0 \qquad \therefore\ t=0,\ -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}$$

よって

$$y=0,\ y=\frac{16}{3}x+\frac{128}{27},\ y=\frac{16}{27}x-\frac{128}{729}$$

(3) $f(x)=-2x^3+3,\ g(x)=-2x^3-1$ とおく

$f'(x)=-6x^2,\ g(x)=-6x^2$

$y=f(x)$ の $x=s$ における接線は

$$y-f(s)=f'(s)(x-s)$$

$$y-(-2s^3+3)=-6s^2(x-s)$$

$$\therefore\ y=-6s^2x+4s^3+3$$

$y=g(x)$ の $x=t$ における接線は

$$y-g(t)=g'(t)(x-t)$$

$$\therefore\ y=-6t^2x+4t^3-1$$

これらが一致するとき

$$-6s^2=-6t^2\ \cdots①,\ 4s^3+3=4t^3-1\ \cdots②$$

①より，　$t=\pm s$

②より，　$t\neq s$であるから $t=-s$ であり，このとき

$$8s^3=-4$$

$$s^3=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ s=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

よって

$$y=-\frac{6}{\sqrt[3]{4}}x+1\qquad\therefore\ y=-3\sqrt[3]{2}\,x+1$$

例10

円 $x^2+(y+1)^2=1$ の接線 ℓ が，放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ と x 座標が正の点で接するとき，ℓ の方程式を求めよ。

解説

$f(x)=\frac{1}{4}x^2$ とおく

$f'(x)=\frac{1}{2}x$

$y=f(x)$ の $x=t$ ($t>0$) における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2\qquad\therefore\ 2tx-4y-t^2=0$$

これが $x^2+(y+1)^2=1$ にも接するとき
円の中心 $(0,\ -1)$ と直線の距離は円の半径に等しいから

$$\frac{|4-t^2|}{\sqrt{4t^2+16}}=1$$

$$|4-t^2|=\sqrt{4t^2+16}$$

$$(4-t^2)^2=4t^2+16$$

$$t^2(t^2-12)=0$$

$t>0$ より，　$t=2\sqrt{3}$
よって，直線 ℓ の方程式は

$$y=\sqrt{3}x-3$$

例11
曲線 $y=x^4-4x^3+2x^2$ に異なる 2 点で接する直線の方程式と，その接点の x 座標 α，β ($\alpha<\beta$) を求めよ.

解説

求める接線の方程式を $y=ax+b$ とおく
$y=x^4-4x^3+2x^2$ と $y=ax+b$ が異なる 2 点で接するとき

$$x^4-4x^3+2x^2=ax+b$$

$$x^4-4x^3+2x^2-ax-b=0$$

が異なる 2 つの重解 α, β をもてばよいから

$$x^4-4x^3+2x^2-ax-b=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

右辺$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$ より

$$-4=-2(\alpha+\beta) \cdots ①$$

$$2=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2 \cdots ②$$

$$-a=-2\alpha\beta(\alpha+\beta) \cdots ③$$

$$-b=\alpha^2\beta^2 \cdots ④$$

①, ② より，　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$
③, ④ より，　$a=-4$，$b=-1$
よって，求める直線の方程式は，　$y=-4x-1$
α，β は 2 次方程式 $t^2-2t-1=0$ の解より

$$\alpha=1-\sqrt{2},\ \beta=1+\sqrt{2}$$

別解

$f(x)=x^4-4x^3+2x^2$ とおく

$f'(x)=4x^3-12x^2+4x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^4-4t^3+2t^2)=(4t^3-12t^2+4t)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(4t^3-12t^2+4t)x-3t^4+8t^3-2t^2$$

これが $x=t$ 以外の点でもう 1 度 $y=f(x)$ に接するとき

$$x^4-4x^3+2x^2=(4t^3-12t^2+4t)x-3t^4+8t^3-2t^2$$

$$x^4-4x^3+2x^2-(4t^3-12t^2+4t)x+3t^4-8t^3+2t^2=0$$

$$(x-t)^2\{x^2+2(t-2)x+(3t^2-8t+2)\}=0$$

$x^2+2(t-2)x+(3t^2-8t+2)=0$ が重解をもてばよいから

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(t-2)^2-(3t^2-8t+2)$$

$$=-2t^2+4t+2=0$$

$$t^2-2t-1=0$$

このとき，重解は $t-2\ (<t)$ より， $t=1+\sqrt{2}$

これより，直線の方程式と α, β を求めればよい

確認問題1

曲線 $y=x^3$ $(x>0)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における法線を ℓ とし，ℓ と y 軸の交点を Q とする。

(1)　法線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　2 点 P，Q 間の距離を t を用いて表せ。

(3)　点 P が曲線 C 上を動くとき，2 点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=x^3$ ($x>0$)とおく

$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ の $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ ($t>0$)における法線 ℓ の方程式は

$$y-f(t)=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)$$

$$y-t^3=-\frac{1}{3t^2}(x-t) \quad \therefore\ y=-\frac{1}{3t^2}x+t^3+\frac{1}{3t}$$

(2) (1)から，点 Q の座標は $\left(0,\ t^3+\dfrac{1}{3t}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(0-t)^2+\left(t^3+\frac{1}{3t}-t^3\right)^2}=\sqrt{t^2+\frac{1}{9t^2}}$$

(3) $t^2>0$ であるから，相加相乗平均より

$$t^2+\frac{1}{9t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{9t^2}}=\frac{2}{3}$$

等号が成立は，$t^2=\dfrac{1}{9t^2}$ ，すなわち $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

このとき，最小値をとり

最小値 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

確認問題2

曲線 C：$y=x^3-kx$ (k は実数) を考える。C 上に点 A$(a,\ a^3-ka)$ ($a \neq 0$) をとる。次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線を l_1 とする。l_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線を l_2 とする。l_1 と l_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

解説

(1) $f(x)=x^3-kx$ とおく

$f'(x)=3x^2-k$

l_1 の方程式は

$y-(a^3-ka)=f'(a)(x-a)$

$y-(a^3-ka)=(3a^2-k)(x-a)$

$\therefore\ y=(3a^2-k)x-2a^3$

これと C との交点の x 座標は

$x^3-kx=(3a^2-k)x-2a^3$

$(x-a)^2(x+2a)=0$

よって，B の x 座標は $-2a$

(2) l_2 の方程式は

$y=(12a^2-k)x+16a^3$

$l_1 \perp l_2$ のとき

$(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$

$\therefore\ 36a^4-15ka^2+k^2+1=0$ …①

(3) $t=a^2$ とおくと，$t>0$

$36t^2-15kt+k^2+1=0$ …②

①を満たすような a が存在するとき

②を満たす $t>0$ であるような t が存在すればよい

この否定は

(ⅰ) ②を満たす実数が存在しない

(ⅱ) ②を満たす t がともに $t \leqq 0$

(ⅰ)は②の判別式を D として，

$$D=(15k)^2-4\cdot 36(k^2+1)=81k^2-144<0 \qquad \therefore -\frac{4}{3}<k<\frac{4}{3}$$

(ii) ①は $t=0$ を解にもつことはないので,
②の 2 解を α, β として

$$D\geqq 0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$$

$$\therefore k\leqq -\frac{4}{3}, k\geqq \frac{4}{3}, \frac{5}{12}k<0, \frac{k^2+1}{36}>0 \qquad \therefore k\leqq -\frac{4}{3}$$

(i), (ii)より, $k<\frac{4}{3}$

よって, 求める k の範囲は, $k\geqq \frac{4}{3}$

確認問題3

2 曲線 $y=x-x^3$，$y=x^3+px^2+qx+r$ は点 P$(-1, 0)$ で共通接線をもち，その接線上 P 以外の点で交わっている．p，q，r の値を求めよ．

解説

$f(x)=x-x^3$，$g(x)=x^3+px^2+qx+r$ とおく

$f(x)=1-3x^2$, $g(x)=3x^2+2px+q$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が点 P$(-1, 0)$ で共通接線をもつとき

$f(-1)=g(-1)$，$f'(-1)=g'(-1)$

$f(-1)=g(-1)$ より

$0=-1+p-q+r \quad \therefore p-q+r=1$ …①

$f'(-1)=g'(-1)$ より

$-2=3-2p+q \quad \therefore 2p-q=5$ …②

また，曲線 $y=f(x)$ 上の点 P$(-1, 0)$ における接線の方程式は

$y=-2(x+1)$

この接線と曲線 $y=f(x)$ の点 P 以外の共有点 Q は

$x-x^3=-2(x+1)$

$(x+1)^2(x-2)=0 \quad \therefore$ Q$(2, -6)$

曲線 $y=g(x)$ も Q を通るから

$-6=8+4p+2q+r$

$\therefore 4p+2q+r=-14$ …③

①～③より

$p=0$, $q=-5$, $r=-4$

確認問題4

x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。

解説

求める 2次関数を $y=ax^2+bx+c \ (a \neq 0)$ …①とする

①と $y=x^2$ が 2 点で交わるとき

$x^2=ax^2+bx+c$

$(a-1)x^2+bx+c=0$ …②

$a \fallingdotseq 1$，かつ，これが異なる 2 実解をもてばよいから，
判別式を D として，$D>0$ より

$$D=b^2-4\cdot(a-1)\cdot c>0 \quad \therefore b^2-4(a-1)c>0 \cdots ③$$

このとき，②の実数解を α，β $(\alpha \fallingdotseq \beta)$ とする
解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a-1}, \alpha\beta=\frac{c}{a-1}$$

$f(x)=ax^2+bx+c, g(x)=x^2$ とおくと
$f'(x)=2ax+b, g'(x)=2x$
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=\alpha, \beta$ で直交するとき

$$f'(\alpha)\cdot g'(\alpha)=-1, f'(\beta)\cdot g'(\beta)=-1$$

すなわち，

$$2x(2ax+b)=-1$$

$$4ax^2+2bx+1=0$$

が α, β を解にもてばよいから，
$a \fallingdotseq 0$ であり，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{2a}, \alpha\beta=\frac{1}{4a}$$

より

$$-\frac{b}{a-1}=-\frac{b}{2a}, \frac{c}{a-1}=\frac{1}{4a} \quad \therefore b(a+1)=0, c=\frac{a-1}{4a}$$

$b=0$ のとき，③より

$$-\frac{(a-1)^2}{4a}>0 \quad \therefore a<0$$

$a=-1$ のとき，$c=\dfrac{1}{2}$ であるから，③より

$$b^2+4>0 \quad \therefore b \text{ は任意}$$

よって，求める 2次関数は

$$y=ax^2+\frac{a-1}{4a} \ (a<0), y=-x^2+bx+\frac{1}{2} \ (b \text{ は任意})$$

確認問題5

a を定数とする。2つの放物線 C_1：$y=-x^2$，C_2：$y=3(x-1)^2+a$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在するための a の条件を求めよ。

(2)　C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が，直交するときの a の値を求めよ。

(3)　C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=-x^2$ とおくと，$f'(x)=-2x$

C_1 の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y+t^2=-2t(x-t) \quad \therefore\ y=-2tx+t^2$$

これが $y=3(x-1)^2+a$ にも接するとき

$$3x^2-6x+3+a=-2t+t^2$$

$$3x^2+2(t-3)-t^2+a+3=0$$

が重解をもてばよいから，判別式を D_1 として，$D_1=0$ より

$$\frac{D_1}{4}=(t-3)^2+3(t^2-a-3)$$

$$=4t^2-6t-3a=0 \cdots ①$$

C_1，C_2 の両方に接する直線が2本存在するとき，

これを満たす異なる2つの t が存在すればよいから

判別式を D_2 として，$D_2>0$ より

$$D_2=3^2+12a>0 \quad \therefore\ a>-\frac{3}{4}$$

(2) $a>-\dfrac{3}{4}$ のとき，①の異なる2つの実数解を t_1，t_2 とすると，

解と係数の関係により，$t_1+t_2=\dfrac{3}{2}$，$t_1t_2=-\dfrac{3}{4}a$

C_1，C_2 の両方に接する2本の直線が直交するとき

$$f'(t_1)f'(t_2)=-1$$

$$4t_1t_2=-1$$

$-3a=-1 \quad \therefore a=\dfrac{1}{3}$

(3) $y=f(x)$ の $x=t_1, t_2$ における接線とx軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α，βとすると

$\tan\alpha=-2t_1$，　$\tan\beta=-2t_2$，

2 つの接線のなす角が 45 度となるとき

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$$

$$\left|\frac{2(t_1-t_2)}{1+4t_1t_2}\right|=1$$

$$2|t_1-t_2|=|1+4t_1t_2|$$

$$4(t_1-t_2)^2=(1+4t_1t_2)^2$$

$$4\{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2\}=(1+4t_1t_2)^2$$

$$4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{3}{4}a\right)\right\}=\left\{1+4\cdot\left(-\frac{3}{4}a\right)\right\}^2$$

$$9a^2-18a-8=0$$

$a>-\dfrac{3}{4}$ より，　$a=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{3}$