2.3　独立試行 (試行の独立)

(1) 独立な試行

2 つの試行が互いに他方の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は**独立**であるといいます。例えば，サイコロを 2 回投げるとき，1 回目にどの目が出たかは，2 回目に影響を及ぼしません。よって，これらの 2 回(2 つ)の試行は独立です。

次に，独立な試行の確率の求め方について考えます。例えば，サイコロを 2 回投げたとき，2 回とも奇数の目が出る確率について考えます。サイコロは区別して考えて，さいころの目の出方は全体で 6×6 通り，うち，2 回とも奇数の目が出るのは 3×3 通りです。よって，

$$\frac{3\times3}{6\times6}=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

です。いま，

A ：1 回目に奇数の目が出る事象
B ：2 回目に奇数の目が出る事象
C ：1 回目に奇数の目が出て，2 回目にも奇数の目が出る事象

とすると，

$$P(C)=P(A)P(B)$$

が成り立つことが分かります。一般に，次のことが成り立ちます。

独立な試行の確率
2 つの独立な試行 S, T を行うとき，S では事象 A が起こり，T では事象 B が起こるという事象を C とすると，事象 C の確率は

$$P(C)=P(A)P(B)$$

3 つ以上の試行において，どの試行の結果も他の試行の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は独立であるといい，3 つの独立な試行 T_1, T_2, T_3 において， T_1 では事象 A が起こり， T_2 では事象 B が起こり， T_3 では事象 C が起こるという事象を D とするとき，

$$P(D)=P(A)P(B)P(C)$$

が成り立ちます。
4 つ以上の独立な試行についても同様の等式が成り立ちます。

例1
A，B，Cの3人がある大学の入学試験を受けるとき，A，B，Cの合格する確率はそれぞれ$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{5}$である．
(1)　A，B，Cのうち，Aだけが合格する確率を求めよ．
(2)　A，B，Cのうち，2人だけ合格する確率を求めよ．

解説
Aの合否とBの合否とCの合否は互いに影響を及ぼさないと考えると，
A, B, Cがある大学の入学試験を受けるという試行は独立である

(1) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{20}$

(2) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(1-\dfrac{2}{5}\right)+\dfrac{3}{4}\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{5}+\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{7}{15}$

例2
2つの袋A, Bがあり，Aには赤球3個と白球7個，Bには赤球5個と白球5個が入っている．それぞれの袋から同時に2個ずつ球を取り出す場合を考える．次の確率を求めよ．
(1)　少なくとも1個の赤球が含まれている確率
(2)　すべて同じ色の球である確率
(3)　赤球2個と白球2個が含まれている確率

解説

(1) $1-\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=1-\dfrac{14}{135}=\dfrac{121}{135}$

(2) $\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}+\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{14}{135}+\dfrac{2}{135}=\dfrac{16}{135}$

(3) $\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}+\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_2}+\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}$

$=\dfrac{2}{135}+\dfrac{35}{135}+\dfrac{14}{135}=\dfrac{51}{135}=\dfrac{17}{45}$

例3
1 個のサイコロを 3 回投げて，出る目の数を順に a，b，c とする。
$A=(a-2)(b-2)(c-2)$ とおくとき，次の問いに答えよ。
(1)　$A=0$ となる確率を求めよ。
(2)　$A>0$ となる確率を求めよ。
(3)　$A>2$ となる確率を求めよ。

解説

(1) a，b，c のうち少なくとも 1 つが 2 となればよいから，

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

(2) $a\geqq 3, b\geqq 3, c\geqq 3$ ，または， a, b, c のうち 1 つは 3 以上で，他の 2 つは 1 となればよいから，

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{4}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{19}{54}$$

(3) $A>0$ となる確率から， $A=1, A=2$ となる確率を除けばよい
$A=1$ となるとき
$a=3, b=3, c=3$ ，または， a, b, c のうち 1 つは 3 で，他の 2 つは 1 となればよいから，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{54}$$

$A=2$ となるとき，
a, b, c のうち 1 つは 4 で，他の 2 つは 3，または，
a, b, c のうち 1 つは 4 で，他の 2 つは 1 となればよいから

$${}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 2=\frac{1}{36}$$

よって，

$$\frac{19}{54}-\frac{1}{54}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$$

(2) 独立試行のいろいろな問題

例4

3人でジャンケンを行う。負けた人から抜けていき最後に残った1人を勝者とする。ただし，あいこも1回のジャンケンとして数える。また，各人がジャンケンでグー，チョキ，パーのうちどの手を出すかは同様に確からしいとする。

(1)　ジャンケンを1回行って，勝者が決まる確率は $\boxed{}$ である。

(2)　ジャンケンを2回行って，初めて勝者が決まる確率は $\boxed{}$ である。

(3)　ジャンケンを3回行って，初めて勝者が決まる確率は $\boxed{}$ である。

解説

(1) $\dfrac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{3^3} = \dfrac{1}{3}$

(2) (i) 3人 → 3人 → 1人

(ii) 3人 → 2人 → 1人

のいずれかである

3人 → 1人は $\dfrac{1}{3}$，3人 → 2人は $\dfrac{{}_3C_2 \times {}_3C_1}{3^3} = \dfrac{1}{3}$

3人 → 3人は $1 - \dfrac{1}{3} \times 2 = \dfrac{1}{3}$，2人 → 1人は $\dfrac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{3^2} = \dfrac{2}{3}$ より

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(3) (i) 3人 → 3人 → 3人 → 1人

(ii) 3人 → 3人 → 2人 → 1人

(iii) 3人 → 2人 → 2人 → 1人

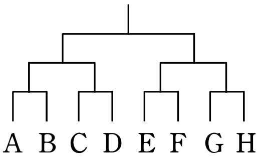
のいずれかである

2人 → 2人は $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{27}$$

例5

A，B，C，D，E，F，G，H の 8 人の選手が右図の組み合わせでトーナメント戦を行う。A と A 以外の選手との試合で A が勝つ確率を p $(0<p<1)$ とし，A 以外の選手同士の試合では互いに勝つ確率は等しいものとする。また，いずれの試合においても引き分けはないものとする。



(1)　B が優勝する確率を求めよ。

(2)　C が優勝する確率を求めよ。

(3)　A が準優勝する確率と H が準優勝する確率が等しくなるような p の値をすべて求めよ。ここで，準優勝とは決勝戦で敗れることをいう。

解説

トーナメント戦の問題です。

(1) $(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(1-p)$

(2) (i) B に勝った A と対戦して 優勝する

(ii) A に勝った B と対戦して 優勝する

場合があるから，

$$p\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}+(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(1-p)(2p+1)$$

(3) Aが準優勝する確率は，

$$p\cdot p\cdot(1-p)=p^2-p^3$$

Hが準優勝する確率は，

決勝でA と対戦するか，A 以外と対戦するかで場合分けして考えて，

$$p\cdot p\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot p+(1-p^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(2p^3-p^2+1)$$

よって，

$$p^2-p^3=\frac{1}{8}(2p^3-p^2+1)$$

$$10p^3-9p^2+1=0$$

$$(2p-1)(5p^2-2p-1)=0$$

$0\leqq p\leqq 1$ より

$$p=\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{6}}{5}$$

例6

A，B，C，D，E，Fの6チームがあり，それぞれのチームは他のチームと1試合ずつ試合を行う．各試合において，両チームの勝つ確率はどちらも $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1)　試合数は全部で何試合あるか．

(2)　5戦全勝のチームが現れる確率を求めよ．

(3)　6チームの勝ち数がすべて異なる確率を求めよ．

(4)　A，B，Cの3チームがともに4勝1敗となる確率を求めよ．

(5)　4勝1敗のチームがちょうど3チーム現れる確率を求めよ．

解説

リーグ戦の問題です。リーグ表を頭の片隅において考えるとよい。条件を満たすリーグ表が何通りあるかと考えると分かりやすいです。

(1) ${}_6C_2=15$ 試合

(2) Aが全勝する場合，Aが関係している5試合はすべてAが勝ち，それ以外の10試合は，どちらが勝ってもよく，B～Fまで誰が全勝してもよいので，

$$\frac{1^5\times 2^{10}\times 6}{2^{15}}=\frac{3}{16}\quad \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 1^{10}\cdot 6=\frac{3}{16}\text{ としてもよい}\right)$$

(3) A～Fが，5−0, 4−1, 3−2, 2−3, 1−4, 0−5のどれになってもよいので，

$$\frac{6!}{2^{15}}=\frac{45}{2048}$$

(4) AがB, Cに2勝したとすると，BとCの試合で負けてしまった方が2敗となってしまうので矛盾するから，A, B, Cは，この3人内の試合は3人とも1勝1敗であり，D, E, Fには全勝している。D, E, F 3人内の試合の勝敗は，どちらが勝ってもよいから，

(ⅰ) AがBに勝ち，Cに負けるとき，BはCに勝つ

(ⅱ) AがBに負け，Cに勝つとき，CはBに勝つ

場合があるので，

$$\frac{2\times 2^3}{2^{15}}=\frac{1}{2048}$$

(5) $\frac{1}{2048}\times {}_6C_3=\frac{5}{512}$

例7

A，B，C の 3 人が次のように勝負を繰り返す．1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める．2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが 2 連勝するか，または，4 回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．

(1)　A，B，C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ．

(2)　A が 2 連勝して終了する確率を求めよ．

(解説)

巴戦の問題です。

(1) 余事象を考えて，A, B, C のうち誰も2連勝しないのは，勝者が毎回変わればよいから，勝者$_{\text{敗者}}$ と表記すると

$A_B \to C_A \to B_C \to A_B$，　$B_A \to C_B \to A_C \to B_A$

の 2 通りより

$$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

(2) A が 2 連勝して終了するのは，

$A_B \to A_C$，　$B_A \to C_B \to A_C \to A_B$

の 2 通りより

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$$

同様にBが 2 連勝して終了するのは，　$\frac{5}{16}$

Cが 2 連勝して終了するのは，　$1-\frac{1}{8}-2\times\frac{5}{16}=\frac{1}{4}$

です。よって，巴戦では 3 人の実力が等しければ，最初に対戦した 2 人の方が有利であることが分かります。

確認問題1

2つのさいころを同時に振るという試行を独立に3回行う．1回目に出た目を a_1，b_1，2回目に出た目を a_2，b_2，3回目に出た目を a_3，b_3 とする．

(1)　$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=0$ となる確率を求めよ．

(2)　$(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)=100$ となる確率を求めよ．

解説

(1) 2つのさいころが少なくとも1回同じ目が出ればよいので，

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{91}{216}$$ 答

(2) $100=2^2\cdot 5^2$ より，3回の目の和の組合せが

$(2,5,10),(4,5,5)$

より，

$$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{12}\times 3!+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\times\frac{3!}{2!}=\frac{1}{216}$$ 答

確認問題2

A，B，Cの3人でじゃんけんをする．一度じゃんけんで負けたものは，以後のじゃんけんから抜ける．残りが1人になるまでじゃんけんを繰り返し，最後に残ったものを勝者とする．ただし，あいこの場合も1回のじゃんけんを行ったと数える．

(1)　1回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

(2)　2回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

(3)　3回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

(4)　$n\geqq 4$ とする．n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ．

解説

(1) $\dfrac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{3^3}=\dfrac{1}{3}$ 答

(2) 勝者の数が

3人 → 3人 → 1人，3人 → 2人 → 1人

となればよい。

3人 → 1人は $\dfrac{1}{3}$，3人 → 2人は $\dfrac{{}_3C_2\times{}_3C_1}{3^3}=\dfrac{1}{3}$，

3人→3人は $1-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，2人→1人は $\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{3^2}=\frac{2}{3}$ より，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$ 答

(3) 勝者の数が

3人 → 3人 → 3人 → 1人，3人 → 3人 → 2人 → 1人，

3人 → 2人 → 2人 → 1人

となればよい

2人 → 2人は $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ より，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{27}$$ 答

(4) 勝者の数が

3人 → 3人 → 3人 → … → 3人 → 1人，

3人 → 3人 → 3人 → … → 3人 → 2人 → 1人

3人 → 3人 → … → 3人 → 2人 → 2人 → 1人

…

3人 → 2人 → … → 2人 → 1人

となればよい

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n-1}{3^n}$$ 答

確認問題3
ある競技の大会に A，B，C，D の 4 チームが参加し，2 チームずつが試合をする。このうちチーム A は，他のチームに対して確率 p $(0<p<1)$ で勝つ。その他の 3 チーム B，C，D の強さはすべて同じであり，勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である。試合に引き分けはないものとする。
この 4 チームが総当たりのリーグ戦を行う。すなわち，すべてのチームが 3 試合を行い，総勝利数が最も多いチームを優勝とする。総勝利数が最も多いチームが複数ある場合には，そのすべてのチームを優勝とする。
(1)　チーム A が全勝して優勝する確率を求めよ。
(2)　チーム A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求めよ。
(3)　チーム A が 1 勝 2 敗で優勝する確率を求めよ。
(4)　チーム A が優勝する確率の高い競技方式は，総当たりのリーグ戦と勝ち残りのトーナメント戦のどちらか。まず結論を示し，次にその理由を述べよ。ただし，勝ち残りのトーナメント戦とは，2 試合の準決勝を行い，それぞれで勝った 2 チームが決勝で戦い優勝を決める競技方式を指す。

解説
(1) 試合は全部で ${}_4C_2=6$ 試合
A を含む試合では A が勝ち，あとの試合はどちらが勝ってもよいから，

$p^3\cdot1^3=p^3$　答

(2) A が B と C に勝ち，D に負けるとき，D は，B または C に負け，
B 対 C は，どちらが勝ってもよい
同様に，A が B, C に負ける場合も考えて，

$3\times p^2(1-p)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot1\times3=\frac{9}{4}p^2(1-p)$　答

(3) A が 1 勝 2 敗で優勝すると仮定すると，B ,C ,D は多くとも 1 勝しかしてはならず，このとき，勝利数の合計は最大で 4 であるが，試合は 6 試合あるため，勝利数の合計は 6 であり，これに矛盾する。
よって，求める確率は

0　答

(4) トーナメント戦で A が優勝する確率は　p^2
リーグ戦で A が優勝する確率は　$p^3+\frac{9}{4}p^2(1-p)=\frac{9}{4}p^2-\frac{5}{4}p^3$

$$p^2-\left(\frac{9}{4}p^2-\frac{5}{4}p^3\right)=\frac{5}{4}p(p-1)<0 \qquad \therefore\ p^2<\frac{9}{4}p^2-\frac{5}{4}p^3$$

よって，リーグ戦の方が優勝する確率が高い　答

確認問題4

A，B，Cの3人が次のように勝負を繰り返す．1回目にはAとBの間で硬貨投げにより勝敗を決める．2回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの1人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが2連勝するか，または，100回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ$\frac{1}{2}$である．

(1)　4回以内の勝負でAが2連勝する確率を求めよ．

(2)　$n=2$，3，……，100とする．n回以内の勝負で，A，B，Cのうち誰かが2連勝する確率を求めよ．

解説

(1) 勝者$_{\text{敗者}}$と表すとすると，

$$A_B \to A_C,\quad B_A \to C_B \to A_C \to A_B$$

の2通りより

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$$　答

(2) n回目の勝負を終えても終了しないのは，1回目はどちらが勝ってもよくて，その後，毎回勝者が異なるときであるから，

$$1-1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$　答