1.8　二項定理

(1) 二項定理

$(a+b)^n$ の展開式は，一般に，C(コンビネーション)を用いて表すことができます。この等式を**二項定理**といいます。
例えば，

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

について，その係数がどのようにして定まるかを考えます。

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ba+b^2\\&=a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

2 行目から分かるように，展開してできる項は，すべて前の(　)から 1 つの項，後ろの(　)から 1 つの項を選んでかけてできています。その結果，すべての 2 次の項が重複を含めて 2^n 個出てきます。そして，その係数は，それぞれの項をつくる組合せが何通りあるかということです。
a^2 の項は，2 個の(　)から a を 2 回選んでできているから，2 個の(　)から b を 0 個選ぶ選び方だけできるので，係数は ${}_2\mathrm{C}_0$，
ab の項は，2 個の(　)から a を 1 回，b を 1 回選んでできているから，2 個の(　)から b を 1 個選ぶ選び方だけできるので，係数は ${}_2\mathrm{C}_1$，
b^2 の項は，2 個の(　)から b を 2 回選んでできているから，2 個の(　)から b を 2 個選ぶ選び方だけできるので，係数は ${}_2\mathrm{C}_2$ となります。
よって

$$(a+b)^2={}_2\mathrm{C}_0a^2+{}_2\mathrm{C}_1ab+{}_2\mathrm{C}_2b^2$$

となります。 b を何個選んだかに着目をするのは， ${}_n\mathrm{C}_k$ の k が昇順になるようにするためです。 a を何個選んだかに着目して，

$$(a+b)^2={}_2\mathrm{C}_2a^2+{}_2\mathrm{C}_1ab+{}_2\mathrm{C}_0b^2$$

としても ${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ が成り立つことから同じことです。$(a+b)^3$ については，各自で考えてみて下さい。一般に，次のことが成り立ちます。

二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ka^{n-k}b^k+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

二項定理における ${}_n\mathrm{C}_k a^{n-k} b^k$ の項を，$(a+b)^n$ の展開式の**一般項**といい，係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を**二項係数**といいます。
一般に，$(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-k}b^k$ の項は，n 個の(　)から b を k 個選ぶ選び方だけできるので，係数は，${}_n\mathrm{C}_k$ となります。

例1
次の式の展開式を求めよ。
(1) $(a+b)^5$
(2) $(x-2)^5$

解説

(1) $(a+b)^5={}_5\mathrm{C}_0a^5+{}_5\mathrm{C}_1a^4b+{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2+{}_5\mathrm{C}_3a^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4ab^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5$
$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

(2) $(x-2)^5=\{x+(-2)\}^5$
$={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4\cdot(-2)+{}_5\mathrm{C}_2x^3(-2)^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2(-2)^3+{}_5\mathrm{C}_4x(-2)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-2)^5$
$=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

例2
$(x-2y)^8$ の展開式における x^5y^3 の係数を求めよ。
$(3x-1)^5$ の展開式における x^2 の係数を求めよ。

解説

(1) 展開式の x^5y^3 の項は
${}_8\mathrm{C}_3x^5(-2y)^3=-448x^5y^3$
よって，係数は-448

(2) 展開式の x^2 の項は
${}_5\mathrm{C}_3(3x)^2(-1)^3=-90x^2$
よって，係数は-90

例3
(1) $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ を展開したときの x を含まない項を求めよ.
(2) $\left(2x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^5$ の展開式における x^5 の係数と定数項を求めよ.

解説

(1) 展開式の定数項は，

$${}_6\mathrm{C}_2 x^4\left(-\frac{5}{x^2}\right)^2=375$$

(2) 展開式の x^5 の項は，

$${}_5\mathrm{C}_2(2x^3)^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2=80x^5$$

よって，係数は 80

定数項は，

$${}_5\mathrm{C}_3(2x^3)^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3=-40$$

例4

$(2x+y)^{10}$ の展開式における $x^{10-k}y^k$ の係数を $f(k)$ で表す．ただし，$k=0$，1，2，……,10 とする．

(1)　$f(k)<f(k+1)$ を満たす k をすべて求めよ．

(2)　$f(k)$ の最大値はいくらか．

解説

(1) $f(k)={}_{10}\mathrm{C}_k\cdot 2^{10-k}=\dfrac{10!\cdot 2^{10-k}}{k!(10-k)!}$ ，

$f(k+1)={}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\cdot 2^{9-k}=\dfrac{10!\cdot 2^{9-k}}{(k+1)!(9-k)!}$

$f(k)<f(k+1)$ のとき， $f(k)>0$ より

$$\frac{f(k+1)}{f(k)}>1$$

$$\frac{(10-k)}{2(k+1)}>1 \qquad 10-k>2(k+1) \qquad \therefore\ k<\frac{8}{3}$$

よって， $k=0,1,2$

次のように差の形にしてもよい。

$$f(k)-f(k+1)<0$$

$$\frac{10!\cdot 2^{10-k}}{k!(10-k)!}-\frac{10!\cdot 2^{9-k}}{(k+1)!(9-k)!}<0$$

$$\frac{10!\cdot 2^{9-k}}{(k+1)!(10-k)!}\{2(k+1)-(10-k)\}<0$$

$$\frac{10!\cdot 2^{9-k}}{(k+1)!(10-k)!}(3k-8)<0$$

$\dfrac{10!\cdot 2^{9-k}}{(k+1)!(10-k)!}>0$ より， $k<\dfrac{8}{3}$

よって，$k=0, 1, 2$

(2) (1) より

$k\leqq 2$ のとき， $f(k)<f(k+1)$

$k\geqq 3$ のとき， $f(k)>f(k+1)$ より

$$f(0)<f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots>f(10)$$

よって， $k=3$ のとき最大

このとき，最大値は

$$f(3)={}_{10}\mathrm{C}_3\cdot 2^7=120\cdot 128=15360$$

本問のように， C(コンビネーション)を含む最大最小の問題は， $f(k)$ と $f(k+1)$ の間に共通にかけられているものが多くあるので，商をとると多くのものが約分でき，差をとると多くのものが共通にくくれるので，商か差をとって，それぞれ 1, 0 と比べるのが定石となります。

(2) 多項定理

$(a+b+c)^n, (a+b+c+d)^n, \cdots$ の展開式を一般的に表したものを**多項定理**といいます。 項が 3 つの場合，次のことが成り立ちます。項が 4 つ以上の場合も同様のことが成り立ちます。

多項定理

$(a+b+c)^n$ の展開式の $a^p b^q c^r$ ($p\geqq 0, q\geqq 0, r\geqq 0, p+q+r=n$) の項は，

$\dfrac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$ (これを一般項といいます)

考え方は，二項定理と同じです。$(a+b+c)^n$ の展開式の $a^p b^q c^r$ の項は，n 個の(　)から a を p 個， b を q 個， c を r 個選ぶ選び方だけできるので，その係数は， a を p 個， b を q 個， c を r 個の計 n 個を並べる並べ方の個数に等しいから，

$$\frac{n!}{p!q!r!}$$

となります。$(a+b+c)^n$ の展開式は， p, q, r を $p\geqq 0, q\geqq 0, r\geqq 0, p+q+r=n$ を満たすように動かしてすべて足したものになります。

例5

(1) $(2x-y-3z)^6$ を展開して整理すると，項の数は全部で $^{ア}\boxed{}$，

xy^3z^2 の係数は $^{イ}\boxed{}$ である．

(2) $(x+1)^8(x-1)^4$ を展開したとき，x^{10} の項の係数は $^{ア}\boxed{}$ である。

また，$(x^2+x+1)^6$ を展開したとき，x^{10} の項の係数は $^{イ}\boxed{}$ である。

(3) $\left(x^2+x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ を展開したときの x の係数を求めよ。

解説

(1) 項の数は，｜を2個用意して，x ｜ y ｜ z と部屋を作り，○を6個並べて，それぞれの部屋に入る○の数がそれぞれの次数になると考えて，これらを並べる並べ方だけ異なる項ができるから，

$$\frac{8!}{6!2!}=28\text{ 個}$$

xy^3z^2 の項は

$$\frac{6!}{1!3!2!}(2x)(-y)^3(-3z)^2=-1080xy^3z^2$$

よって，係数は -1080

(2) まず，$(x+1)^8(x-1)^4$ の $(x+1)^8, (x-1)^4$ をそれぞれ展開して，x^{10} の項を作るには，前の(　)と後の(　)から次数がそれぞれ $(8, 2), (7, 3), (6, 4)$ の項を選べばよいから，

$${}_8\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2(-1)^2+{}_8\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1(-1)+{}_8\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0=6-32+28=2$$

別解

$(x+1)^8(x-1)^4=(x+1)^4(x^2-1)^4$

後は同様にして，

$${}_4\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_1(-1)+{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0=-4+6=2$$

さらに，

$$(x+1)^8(x-1)^4=(x+1)^4(x^2-1)^4=(x^3+x^2-x-1)^4$$

として，多項定理を用いてもできます。

$(x^2+x+1)^6$ の展開式の一般項は，

$$\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p x^q=\frac{6!}{p!q!r!}x^{2p+q}\ (0\leqq p, q, r\leqq 6,\ p+q+r=6)$$

$2p+q=10$ となるとき，

$(p, q, r)=(4, 2, 0), (5, 0, 1)$

よって，x^{10} の係数は

$$\frac{6!}{4!2!0!}+\frac{6!}{5!0!1!}=15+6=21$$

(3) 展開式の一般項は，

$$\frac{8!}{p!q!r!}(x^2)^p x^q \left(\frac{1}{x}\right)^r=\frac{8!}{p!q!r!}x^{2p+q-r}, 0 \leqq p, q, r \leqq 8, p+q+r=8$$

$2p+q-r=1$ となるとき，

$(p, q, r)=(1, 3, 4), (3, 0, 5)$

よって，x の係数は

$$\frac{8!}{3!0!5!}+\frac{8!}{1!3!4!}=56+280=336$$

(3) **二項定理の利用**

二項定理は，剰余の問題，整数問題，微分法等様々な場面で利用されます。

例6
次の値の十進数での下位 5 桁を求めよ．
(1)　101^{100}　　　(2)　99^{100}　　　(3)　3^{2001}

(解説)

(1) $101^{100}=(100+1)^{100}$

$={}_{100}C_0 100^{100}+{}_{100}C_1 100^{99}+\cdots+{}_{100}C_{97}100^3+{}_{100}C_{98}100^2+{}_{100}C_{99}100+{}_{100}C_{100}$

$=10^6 N+49500000+10000+1$ (Nは自然数)

よって，下 5 桁は 10001

(2) $99^{100}=(100-1)^{99}$

$={}_{100}C_0 100^{100}-{}_{100}C_1 100^{99}+\cdots-{}_{100}C_{97}100^3+{}_{100}C_{98}100^2-{}_{100}C_{99}100+{}_{100}C_{100}$

$=10^6 M+49500000-10000+1$ (Mは自然数)

よって，下 5 桁は 90001

(3) $3^{2001}=3\cdot 9^{1000}=3(10-1)^{1000}$

${}_{1000}C_{997}={}_{1000}C_3=1000\cdot 333\cdot 499,\ {}_{1000}C_{996}={}_{1000}C_4=250\cdot 333\cdot 199\cdot 997$ より

$=3({}_{1000}C_0 10^{1000}+\cdots+{}_{1000}C_{996}10^4-{}_{1000}C_{997}10^3+{}_{1000}C_{998}10^2-{}_{1000}C_{999}10$

$+{}_{1000}C_{1000})$

$=3(10^5 L+49950000-10000+1)$ (Lは自然数)

$=3(10^5 L+49940001)$

$=3\cdot 10^5 L+149820003$

よって，下 5 桁は 20003

例7
$(100.1)^7$ の百の位の数字を求めよ。また，小数第 4 位の数字を求めよ。

(解説)

$(100.1)^7=(10^2+0.1)^7$

$={}_7C_0(10^2)^7+{}_7C_1(10^2)^6\cdot 0.1+{}_7C_2(10^2)^5(0.1)^2+{}_7C_3(10^2)^4(0.1)^3+{}_7C_4(10^2)^3(0.1)^4$

$+{}_7C_5(10^2)^2(0.1)^5+{}_7C_6\cdot 10^2(0.1)^6+{}_7C_7(0.1)^7$

$=10^{14}+7\cdot 10^{11}+21\cdot 10^8+35\cdot 10^5+35\cdot 10^2+21\cdot 0.1+7(0.1)^4+(0.1)^7$

$=10^5 N+35\cdot 10^2+21\cdot 0.1+7(0.1)^4+(0.1)^7$ (Nは自然数)

$=10^5N+3500+2.1+0.0007+0.0000001$

$=10^5N+3502.1007001$

よって，

百の位の数字は 5，小数第 4 位の数字は 7

例8

一般に ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ という和の結果を利用すれば，

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n={}^{ア}\boxed{}$$ であることがわかる.

また，前式の各項に，交互に正負をつけた次のような場合も簡単になる.

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n={}^{イ}\boxed{}$$

(解説)

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n=(1+x)^n$

(ア) $x=1$ を代入して，

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n$$

(イ) $x=-1$ を代入して，

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0$$

(ア)については， n 人から何人かを選ぶとき，その選び方は，0 人を選ぶ，1 人を選ぶ，…， n 人を選ぶの $n+1$ 通りあり，これらの組合せの総数は，

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$ 通り

です。一方， n 人から何人かを選ぶ選び方は， n 人それぞれが，選ばれるか，選ばれないかのそれぞれ 2 通りあるので， 2^n 通りの選び方があります。よって，

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$$

が成り立つと考えてもよい。

例9

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$ を示せ.

(2)　$1 \leqq k \leqq n$ のとき $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}$ を簡単にせよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot 2^{n-1}$ を示せ．

（解説）

(1) $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ に $x=1$ を代入して，

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = 2^n$$

(2) ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ より

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}} = \frac{\dfrac{n!}{k!}}{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!}} = \frac{n}{k}$$

（$\therefore\ k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$）これもよく用いられる公式です。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = 1 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n$

(2)から，　$k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ より

$$= n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_0 + n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_1 + \cdots + n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k$$

(1) から，　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k = 2^{n-1}$ より

$$= n \cdot 2^{n-1}$$

別解

次のように，微分を利用して求めることもできます。

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

両辺 x で微分して，

$$n(1+x)^{n-1} = {}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n x^{n-1}$$

$x=1$ を代入して，

$${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n x^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

例10

(1)　整数 n，r が $n \geqq 2$，$1 \leqq r \leqq n$ を満たすとする。このとき，$r \cdot {}_n\mathrm{C}_r$

$=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ が成り立つことを示せ。

(2)　p を素数とし，整数 r が $1\leqq r\leqq p-1$ を満たすとする。このとき，${}_p\mathrm{C}_r$ が p で割り切れることを示せ。

(3)　p を 3 以上の素数とする。二項定理を用いた式 $(x+1)^p=\sum_{r=0}^{p}{}_p\mathrm{C}_r x^r$ を利用して，2^p を p で割った余りが 2 であることを示せ。

(4)　p を 5 以上の素数とする。3^p を p で割った余りを求めよ。

解説

(1) ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n\,!}{r\,!(n-r)!}=\dfrac{n}{r}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=\dfrac{n}{r}{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

$\therefore\ r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(2) (1)より

$r\cdot{}_p\mathrm{C}_r=p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$

${}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$ は整数であるから， $r\cdot{}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数である

p は素数，$1\leqq r\leqq p-1$ であるから， r と p は互いに素より，

${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数，すなわち， p で割り切れる

(3) $2^p={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}+{}_p\mathrm{C}_p$

(2)から， ${}_p\mathrm{C}_r(r=1,2,\cdots,n-1)$ は p の倍数より

$2^p=pN+2$ (N は自然数)

$p\geqq 3$ より， 2^p を p で割った余りは 2

(4) $3^p={}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1\cdot 2+{}_p\mathrm{C}_2\cdot 2^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\cdot 2^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_p\cdot 2^p$

(2)から， ${}_p\mathrm{C}_r(r=1,2,\cdots,n-1)$ は p の倍数より

$3^p=pM+2^p+1$ (M は自然数)

$p\geqq 5$ ，(2)から 2^p を p で割った余りは 2 より

3^p を p で割った余りは 3

一般に， p が素数のとき，任意の整数 n に対して，n^p を p で割った余りは n であるという定理が成り立ちます。これを**フェルマーの小定理**といいます。

確認問題1

(1)　$(a-2b)^6$ の展開式で，a^5b の係数は ア$\boxed{}$，a^2b^4 の係数は イ$\boxed{}$ である．また $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ の展開式で，x^6 の係数は ウ$\boxed{}$，定

数項は $^{エ}\boxed{}$ である．

(2)　m を 6 以下の正の整数とする．$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^m$ の展開式で 0 でない定数項が出てくるような m の値をすべて求めると $^{オ}\boxed{}$ である．また $\left(x^2-\dfrac{2}{x}+1\right)^6$ の展開式の定数項は $^{カ}\boxed{}$ である．

解説

(1)(ア) ${}_6C_1\cdot1^5\cdot(-2)=-12$　答

(イ) ${}_6C_4\cdot1^2\cdot(-2)^4=240$　答

(ウ) ${}_6C_2\cdot1^4\cdot(-2)^2=60$　答

(エ) ${}_6C_4\cdot1^2\cdot(-2)^4=240$　答

(2) $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^m$ の展開式の一般項は

$$ {}_mC_r(x^2)^{m-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_mC_r(-2)^r\cdot\frac{x^{2m-2r}}{x^r} $$

$2m-2r=r$，すなわち，$2m=3r$ となるとき

2 と 3 は互いに素であるから，m は 3 の倍数より　$m={}^{オ}3,\ 6$　答

$\left(x^2-\dfrac{2}{x}+1\right)^6=\left\{\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)+1\right\}^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6C_k\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^k $$

$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^k$ の 0 でない定数項は，$k=3,6$ のときに現れるから，

$$ {}_6C_3\cdot{}_3C_2(-2)^2+{}_6C_6\cdot{}_6C_4(-2)^4+1=481 $$　答

確認問題2

(1)　式 $(a+b)^6$ を展開したときの a^3b^3 の項の係数を求めよ。

(2)　6 個の引き出しがあり，そのすべてに書類 a と書類 b が 1 部ずつ入っている。書類 a を 4 部と書類 b を 2 部取り出したい。

（ア）　1 個の引き出しから，書類 a または書類 b のどちらかしか取り出せないとき，取り出し方は何通りあるか。

（イ）　1 個の引き出しから，書類 a と書類 b の両方を取り出してもよいし，片方のみを取り出してもよいし，どちらも取り出さなくてもよいとき，取り出し方は何通りあるか。

(3)　(2)(イ) における書類の取り出し方の場合の数は，式 $(ab+a+b+1)^6$ を展開したときの a^4b^2 の項の係数に等しくなる。その理由を述べよ。

(解説)

(1) ${}_6\mathrm{C}_3=20$　答

(2)（ア）${}_6\mathrm{C}_4=15$（通り）　答

(イ) a を取り出すことを a， b を取り出すことを b，両方取り出すことを c，どちらも取り出さないことを d とするとき，

起こる回数が

$$(a, b, c, d)=(4, 2, 0, 0), (3, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2)$$

となればよくて，これらの並べ方だけ取り出し方はあるから，

$$\frac{6!}{4!2!}+\frac{6!}{3!}+\frac{6!}{2!2!2!}=15+120+90=225 \text{（通り）}$$　答

(3) a を m 部取り出すことを a^m， b を n 部取り出すことを b^n のようにその文字の積で表すことにすれば，

ab は a と b を 1 部ずつ， a は a を 1 部， b は b を 1 部，1 はどちらも取り出さないことに相当する。

a^4b^2 は a を 4 部， b を 2 部取り出すことに相当し，$(ab+a+b+1)^6$ の展開式の a^4b^2 の係数は，6 つの(　)から $ab, a, b, 1$ のいずれかを選びそれらをかけたときの $ab, a, b, 1$ の選び方の総数に等しいから，(2)の(イ)の場合の数に等しい。　終

確認問題3

n を自然数とし，整式 $(2x+1)^n$ を展開した式を $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ とする。

(1) $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を n を用いて表せ。

(2) $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}$ $(1\leqq k\leqq n)$ を n と k を用いて表せ。

(3) $a_k=a_{k-1}$ $(1\leqq k\leqq n)$ を満たす k が存在するための n の条件を求めよ。

(4) $n=101$ のとき，a_k が a_0，a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_n の中で最大となる k をすべて求めよ。

解説

(1) $(2x+1)^n=(1+2x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2x+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot 2^nx^n$ より

$a_0+a_1+\cdots+a_n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot 2^n=(1+2)^n=3^n$ 答

(2) $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k}{{}_n\mathrm{C}_{k-1}\cdot 2^{k-1}}=\dfrac{2(n-k+1)}{k}$ 答

(3) $a_k=a_{k-1}$ のとき，$\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=1$ より

$\dfrac{2(n-k+1)}{k}=1 \quad \therefore\ k=\dfrac{2(n+1)}{3}$

$a_k=a_{k-1}$ $(1\leqq k\leqq n)$ を満たす k が存在するための条件は，

$k=\dfrac{2(n+1)}{3}$ が 1 以上 n 以下の自然数となればよいから

$1\leqq\dfrac{2(n+1)}{3}\leqq n \quad \therefore\ n\geqq 2$

$\dfrac{2(n+1)}{3}$ が自然数となるとき，

2 と 3 は互いに素であるから，$n+1$ は 3 の倍数より

$n+1=3l$ (l は自然数) $\quad\therefore\ n=3l-1$ (l は自然数) 答

(4) $a_k\geqq a_{k-1}$ のとき $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}\geqq 1$，すなわち，$k\leqq 68$

$a_k<a_{k-1}$ のとき $\dfrac{a_k}{a_{k-1}}<1$ ，すなわち，$k>68$

よって，$a_0<a_1<\cdots\cdots<a_{67}=a_{68}>a_{69}>\cdots\cdots>a_{101}$ より

求める k は，$k=67$，68 答

確認問題4

(1)　n を正の整数とする。$(1+a)^n$ を二項定理を用いて展開せよ。

(2)　21^{10} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

(3)　19^n+21^n が 400 で割り切れるような正の整数 n が存在するか。存在するならば，その例を示せ。存在しなければ，それを証明せよ。

(解説)

(1) $(1+a)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1a+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}a^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_na^n$　答

(2) $21^{10}=(1+20)^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1\cdot20+{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot20^2+\cdots\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\cdot20^{10}$

$=400N+201$ (N は整数)

よって，余りは 201　答

(3) $19^n=(20-1)^n$

$={}_n\mathrm{C}_0\cdot20^n-{}_n\mathrm{C}_1\cdot20^{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot20\cdot(-1)^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$

$=400k+(-1)^{n-1}\cdot20n+(-1)^n$ (k は整数)

$21^n=(20+1)^n$

$={}_n\mathrm{C}_0\cdot20^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot20^{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot20+{}_n\mathrm{C}_n$

$=400l+20n+1$ (l は整数)　答

$19^n+21^n=400m+20n\{(-1)^{n-1}+1\}+(-1)^n+1$ (m は整数)

n が奇数のとき，余りは $40n$ を 400 で割った余りであり，これは 0 ではない

n が偶数のとき，余りは 2 となる

よって，存在しない。　終

確認問題5

x を実数，n を正の整数とするとき，$(1+x)^{2n}$ の展開式に $x=1$ を代入すると $2^{2n}=\sum_{r=0}^{2n}$ ア $\boxed{}$ となる．また，$x=-1$ を代入すると $\sum_{r=0}^{n}$ イ $\boxed{}$ $=\sum_{r=1}^{n}$ ウ $\boxed{}$ となることがわかる．

以上より，${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=$ エ $\boxed{}$ である．

(解説)

(ア) $(1+x)^{2n}=\sum_{r=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^r\cdots$ ①

① に $x=1$ を代入すると， $2^{2n}=\sum_{r=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_r$ ⋯ ②　答

(イ)，(ウ) ① に $x=-1$ を代入すると， $0=\sum_{r=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_r(-1)^r$ ⋯③

すなわち， $0={}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-\cdots\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$ より

$\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}=\sum_{r=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}$　答

(エ) $2^{2n}=\sum_{r=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_r=\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}+\sum_{r=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}=2\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}$ より

$\sum_{r=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=2^{2n-1}$　答

当然ですが，

$\sum_{r=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2r-1}={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$

です。

別解

②+③より

$2({}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n})=2^{2n}$

$\therefore\ {}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=2^{2n-1}$

②−③より

$2({}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1})=2^{2n}$

$\therefore\ {}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$

確認問題6

次の式を二項定理 $(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k x^k$ (m は自然数) を用いて計算せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}$

解説

(1) ${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}=\dfrac{n+1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ より，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1} \cdots ①$$

よって，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad \text{答}$$

(2) ①の両辺に $(-1)^k$ をかけて，

$$\frac{(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}}{n+1}$$

よって，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$$

$$=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}=\frac{1}{n+1} \quad \text{答}$$

(3) (1)より， $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} \cdots ①$

(2)より， $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k{}_{2n}\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{2n+1} \cdots ②$

①+②より

$$2\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}=\frac{4^n}{2n+1} \quad \text{答}$$

別解

次のように，積分を利用してもできます。

$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k x^k$ の両辺を x で積分すると

$$\frac{(1+x)^{m+1}}{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_m\mathrm{C}_k}{k+1}x^{k+1}+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$x=0$ を代入して，$C=\dfrac{1}{m+1}$

よって，

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_m\mathrm{C}_k}{k+1}x^{k+1}=\frac{(1+x)^{m+1}-1}{m+1} \quad \cdots ①$$

(1) ① において，$m=n$，$x=1$ とすると

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

(2) ① において，$m=n$，$x=-1$ とすると

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}(-1)^{k+1}=-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$$

確認問題7

n を 3 以上の奇数として，次の集合を考える。

$$A_n=\left\{{}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}\right\}$$

(1)　A_9 のすべての要素を求め，それらの和を求めよ。

(2)　${}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ が A_n 内の最大の数であることを示せ。

(3)　A_n 内の奇数の個数を m とする。m は奇数であることを示せ。

(解説)

(1) $A_9=\{{}_9\mathrm{C}_1,\ {}_9\mathrm{C}_2,\ {}_9\mathrm{C}_3,\ {}_9\mathrm{C}_4\}$

${}_9\mathrm{C}_0+{}_9\mathrm{C}_1+\cdots+{}_9\mathrm{C}_9=2^9,\ {}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ より

$$2({}_9\mathrm{C}_0+{}_9\mathrm{C}_1+\cdots+{}_9\mathrm{C}_4)=2^9$$

$$\therefore\ {}_9\mathrm{C}_1+{}_9\mathrm{C}_2+{}_9\mathrm{C}_3+{}_9\mathrm{C}_4=255$$ 答

(2) ${}_n\mathrm{C}_k<{}_n\mathrm{C}_{k+1}$ のとき $\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k}>1$ より

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k}=\frac{n-k}{k+1}>1\quad \therefore\ k<\frac{n-1}{2}$$

よって，${}_n\mathrm{C}_1<{}_n\mathrm{C}_2<\cdots<{}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$　示された。 終

(3) A_n のすべての要素の和は，

(1)と同様にして，$2^{n-1}-1$ であるから奇数である。

ここで，m を偶数と仮定すると，

A_n のすべての要素の和は偶数となり矛盾

よって，m は奇数である　終

確認問題8
次の各問いに答えよ。ただし，正の整数 n と整数 k $(0 \leqq k \leqq n)$ に対して，${}_n\mathrm{C}_k$ は正の整数である事実を使ってよい。
(1)　m が 2 以上の整数のとき，${}_m\mathrm{C}_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ。
(2)　p を 2 以上の素数とし，k を p より小さい正の整数とする。このとき，${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れることを示せ。
(3)　p を 2 以上の素数とする。このとき，任意の正の整数 n に対し，$(n+1)^p-n^p-1$ は p で割り切れることを示せ。

解説

(1) ${}_m\mathrm{C}_2=\dfrac{m(m-1)}{2}=m\cdot\dfrac{m-1}{2}$ が m で割り切れるためには，

$\dfrac{m-1}{2}$ が自然数，すなわち，m が奇数であることが必要である

$m=2l+1$ (l は自然数) のとき，${}_{2l+1}\mathrm{C}_2=(2l+1)l$

よって，${}_{2l+1}\mathrm{C}_2$ は $2l+1$ で割り切れる

したがって，求める条件は m が奇数であることである　答

(2) ${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p}{k}{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$ より

$$k\cdot{}_p\mathrm{C}_k=p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

よって，$k\cdot{}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる

p は素数であり，$1\leqq k<p$ であるから，k と p は互いに素より

${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる　終

(3) $(n+1)^p-n^p-1={}_p\mathrm{C}_0n^p+{}_p\mathrm{C}_1n^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2n^{p-2}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}n+{}_p\mathrm{C}_p-n^p-1$

$$={}_p\mathrm{C}_1n^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2n^{p-2}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}n$$

(2) より，${}_p\mathrm{C}_1$，${}_p\mathrm{C}_2$，……，${}_p\mathrm{C}_{p-1}$ は p で割り切れるから，

$(n+1)^p-n^p-1$ は p で割り切れる　終