2.4　関数の増減と極大・極小

(1) 関数の増減

　$a<b$ である実数 a, b に対して

　$a \leqq x \leqq b,\ a<x<b,\ a<x,\ x \leqq b$

等を満たす実数 x 全体の集合を**区間**といい，これらはそれぞれ

　$[a, b], (a, b), (a, \infty), (-\infty, b]$

とも表します。

　関数 $f(x)$ において，ある区間の任意の値 x_1, x_2 に対して

　$x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はその区間で**単調に増加**するといい，

　$x_1<x_2$ ならば $f(x_1)>f(x_2)$

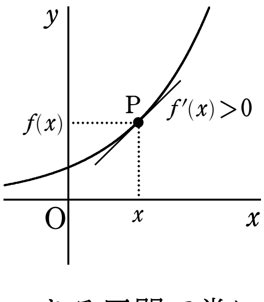
が成り立つとき，$f(x)$ はその区間で**単調に減少**するといいます。

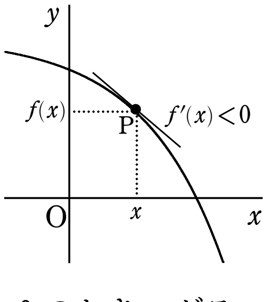
　変数 x がある区間の値をとって変化するとき，関数 $f(x)$ の値の変化の様子を導関数を用いて調べてみます。ここでは，$f(x)$ は，主に x の整式で表された関数を扱うことにします。

　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の 1 点 A $(a, f(a))$ に近いところでは，関数のグラフは，A における接線とほぼ一致しているとみなせます。A における接線の傾きは $f'(a)$ であるから，関数 $y=f(x)$ の増減は，その導関数 $f'(x)$ の符号と結びつけて考えることができます。すなわち，

　ある区間で常に $f'(x)>0$ のとき，グラフの接線は右上がりであるから，その区間では，x の値が増加すると，$f(x)$ の値も増加する。

　ある区間で常に $f'(x)<0$ のとき，グラフの接線は右下がりであるから，その区間では，x の値が増加すると，$f(x)$ の値も減少する。





　また，ある区間で常に $f'(x)=0$ のとき，グラフの接線は常に x 軸に平行である。よって，グラフも x 軸に平行な直線であり，その区間では $f(x)$ はある定数 c に等しい。これらをまとめると，次のようになります。

関数の増減

ある区間で

常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調に増加する

常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調に減少する

常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で定数である

⑵ **関数の極大・極小**

　$x=a$ を含む十分小さい開区間において，

　$x \fallingdotseq a$ ならば $f(x)<f(a)$ が成り立つとき，

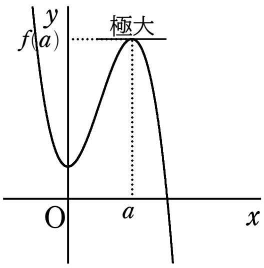
$f(x)$ は $x=a$ で**極大**になるといい，$f(a)$ を**極大値**といい，

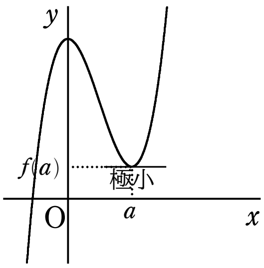
　$x=a$ を含む十分小さい開区間において，

　$x \fallingdotseq a$ ならば $f(x)>f(a)$ が成り立つとき，

$f(x)$ は $x=a$ で**極小**になるといい，$f(a)$ を**極小値**といいます。

極大値と極小値をまとめて**極値**といいます。





　ここでは $f(x)$ を整式で考えているので，関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるときには，$x=a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わるから，$f'(a)=0$ となります。以上のことをまとめると，次のようになります。

関数の極大・極小

1. 関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$

2. 関数 $f(x)$ の極値を求めるには，$f'(x)=0$ となる x の値を求め，その前後における $f'(x)$ の符号を調べる

$f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で

正から負に変わるとき $f(a)$ は極大値

負から正に変わるとき $f(a)$ は極小値

例1

(1) 3 次関数 $y=2x^3-3x^2-12x+4$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x$ の極大値は ${}^{ア}\boxed{}$，極小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である．

(解説)

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$ とおく

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x^2-x-2)$

$=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ となるとき， $x=-1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=-1$ で極大　極大値 $f(-1)=11$

$x=2$ で極小　極小値 $f(2)=-16$

(2) $f'(x)=-3x^2+6x+9$

$=-3(x^2-2x-3)$

$=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ となるとき， $x=-1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$x=3$ のとき極大　極大値 ${}^{ア}27$

$x=-1$ のとき極小　極小値 ${}^{イ}-5$

例2

$y=x^3-3x+1$ の極値を求め，そのグラフの概形をかけ．

(解説)

$f(x)=x^3-3x+1$ とおく

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

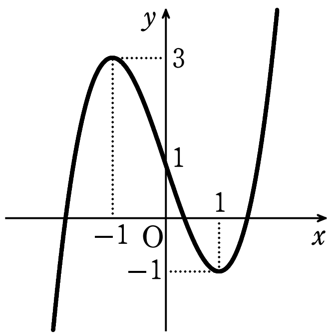
$f'(x)=0$ となるのは， $x=-1, 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=-1$ のとき極大　極大値 $f(-1)=3$

$x=1$ のとき極小　極小値 $f(1)=-1$

よって， $y=f(x)$ のグラフは右図



例3

3次関数 $f(x)$ に対し，条件 $f'(a)=0$ は，$f(a)$ が極値であるための十分条件ではないことを示す $f(x)$ と a の反例を挙げよ。

(解説)

$f(x)=x^3$，$a=0$

$f'(x)=3x^2$

$f'(0)=0$ であるが，

$x=0$ の前後で，$f'(x)$ の符号は変わらないから，

$f(a)$ は極値ではない

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

本問より

$f'(a)=0 \Longrightarrow f(a)$ は極値である

という命題は偽であることが分かります。

理系の範囲になりますが，この命題の逆命題

$f(a)$ は極値である$\Longrightarrow f'(a)=0$

は $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であれば真ですが，$x=a$ において微分可能でなくてもよければ偽となります。ここでは $f(x)$ を整式の範囲で考えている (本問では $f(x)$ は3次関数なので整式である) ので，$f(x)$ は必ず微分可能となって問題ありませんが，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能でなくても (すなわち，$f'(a)$ が存在しなくても)，$f(a)$ が極値となることがあります。

例4

関数 $y=|x|(x^2-5x+3)$ の増減を調べ，極値を求めて，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(解説)

$f(x)=|x|(x^2-5x+3)$とおく

$$=\begin{cases} x(x^2-5x+3)\ (x\geqq 0) \\ -x(x^2-5x+3)\ (x<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^3-5x^2+3x\ (x\geqq 0) \\ -(x^3-5x^2+3x)\ (x<0) \end{cases}$$

$g(x)=x^3-5x^2+3x$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\ (x\geqq 0) \\ -g(x)\ (x<0) \end{cases}$$

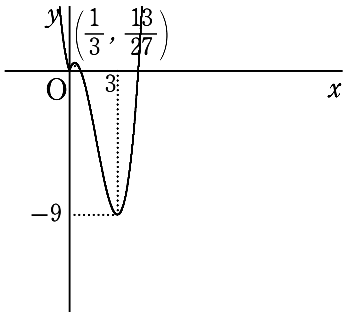
$g'(x)=3x^2-10x+3$
$\quad=(3x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$ となるとき， $x=\dfrac{1}{3},\ 3$

増減表

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=\dfrac{1}{3}$ のとき極大　極大値 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$
$x=3$ のとき極小　極小値 $g(3)=-9$
$y=f(x)$ は $x<0$ のとき $y=-g(x)$ に注意して，
$f(x)$ の増減は $x<0$ のとき減少，
$x\geqq 0$ のときは $g(x)$ と同じ
極値は
$x=0$ のとき極小　極小値 $f(0)=0$
$x=\dfrac{1}{3}$ のとき極大　極大値 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{13}{27}$
$x=3$ のとき極小　極小値 $f(3)=-9$
$y=f(x)$ のグラフは右図



極値 $f(\alpha)$ を求める際， α の値が汚いときは， $f'(\alpha)=0$ であることを利用して，割り算をし，次数下げをして求めます。

例5
(1) 関数 $y=x^3-6x^2-3x$ の極大値を求めよ。
(2) 関数 $f(x)=2x^3+9x^2+6x-1$ は $x=$ ア $\boxed{}$ で極小値 イ $\boxed{}$ をとる。

(解説)

$f(x)=x^3-6x^2-3x$ とおく
$f'(x)=3x^2-12x-3=3(x^2-4x-1)$
$f'(x)=0$ のとき， $x=2\pm\sqrt{5}$
増減表は右図

x	$\cdots$	$2-\sqrt{5}$	$\cdots$	$2+\sqrt{5}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，　$x=2-\sqrt{5}$ で極大値をとる
$\alpha=2-\sqrt{5}$ とおくと，α は
$x^2-4x-1=0$ の解より $\alpha^2-4\alpha-1=0$
$f(x)=(x^2-4x-1)(x-2)-10x-2$ より
極大値は

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=(\alpha^2-4\alpha-1)(\alpha-2)-10\alpha-2 \\ &=-10\alpha-2 \\ &=-10(2-\sqrt{5})-2=-22+10\sqrt{5} \end{aligned}$$

(2) $f(x)=2x^3+9x^2+6x-1$
$f'(x)=6x^2+18x+6=6(x^2+3x+1)$
$f'(x)=0$ のとき，　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$
増減表は下図

x	$\cdots$	$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，　$x=$ ア $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ で極小値をとる。

$\alpha=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，α は $x^2+3x+1=0$ の解より $\alpha^2+3\alpha+1=0$
$f(x)=(x^2+3x+1)(2x+3)-5x-4$ より
極小値は

$$\begin{aligned} f(\alpha)&=(\alpha^2+3\alpha+1)(2\alpha+3)-5\alpha-4 \\ &=-5\alpha-4 \\ &=-5\cdot\frac{-3+\sqrt{5}}{2}-4=\frac{7-5\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

例6
関数 $f(x)=2x^3+9x^2-3x-7$ が $x=\alpha$ で極大値 M をとり，$x=\beta$ で極小値 m をとるとき，$\beta-\alpha=$ ア $\boxed{}$ であり，$M-m=$ イ $\boxed{}$ である。

解説

$f'(x)=6x^2+18x-3=3(2x^2+6x-1)$

$f'(x)=0$ のとき，　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$

増減表は右図

x	$\cdots$	$\frac{-3-\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$	$\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=\dfrac{-3-\sqrt{11}}{2}$ で極大値をとり，

$x=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$ で極小値をとるから

$$\alpha=\frac{-3-\sqrt{11}}{2},\ \beta=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$$

よって

$$\beta-\alpha=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}-\frac{-3-\sqrt{11}}{2}={}^{ア}\sqrt{11}$$

$$\begin{aligned}M-m&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=2(\alpha^3-\beta^3)+9(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\\&=2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+9(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-3(\alpha-\beta)\\&=(\alpha-\beta)[2\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+9(\alpha+\beta)-3]\\&=-(\beta-\alpha)[2\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}+9(\alpha+\beta)-3]\end{aligned}$$

$\alpha+\beta=-3$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$ より

$$=-\sqrt{11}\left\{2\left(9+\frac{1}{2}\right)-27-3\right\}={}^{イ}11\sqrt{11}$$

別解

極値の差は，積分を利用して求めることもできます。詳しくは積分を学習した後，章末の 参考 を参照して下さい。

$$\begin{aligned}M-m&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)dx\\&=-\int_\alpha^\beta f'(x)dx\\&=-6\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=6\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\quad\left(\frac{1}{6}\text{ 公式}\right)\\&=(\beta-\alpha)^3=11\sqrt{11}\end{aligned}$$

例7

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ が，$x=1$ で極小値，$x=-3$ で極大値をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ のグラフは原点以外の点で x 軸に接し，関数 $f(x)$ の極小値は-4 になるものとする。qの値を求めよ。

(3) $f(x)$ を x^3 の係数が 1 である 3 次関数とする。$f(x)$ が $x=1$ で極大値 4 をとり，$x=2$ で極小となるとき，極小値を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=1$ で極小値，$x=-3$ で極大値をとるとき

$f'(1)=0$，$f'(-3)=0$

であることが必要

$3+2a+b=0$，$27-6a+b=0$

$\therefore a=3$，$b=-9$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき，$f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ となり，増減表は右図

よって，$x=1$ で極小値，$x=-3$ で極大値をとるから

$a=3$，$b=-9$

(2) $y=f(x)$ のグラフが原点以外の点で x 軸に接するから，

$f(x)=x(x-a)^2\ (a\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0)$

とおける

$f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(x-a)(3x-a)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=\dfrac{a}{3}$，a

$f(a)=0\fallingdotseq\!\!\!\!/\ -4$ であるから，$x=\dfrac{a}{3}$ で極小値 -4 より

$$\frac{a}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}a\right)^2=-4$$

$a^3=-27$　$\therefore a=-3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$

このとき，$f(x)=x^3+6x^2+9x$ となり

増減表は右図

よって，条件を満たすから

$q=9$

(3) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおくと

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値 4 をとり， $x=2$ で極小となるから

　$f(1)=4$,

　$f'(1)=0$, $f'(2)=0$ であることが必要

　$1+a+b+c=4$　　$\therefore a+b+c=3$

　$3+2a+b=0$　　$\therefore 2a+b=-3$

　$12+4a+b=0$　　$\therefore 4a+b=-12$

　$\therefore a=-\dfrac{9}{2}$，$b=6$，$c=\dfrac{3}{2}$

このとき，$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x+\dfrac{3}{2}$

となり，増減表は右図

よって，条件を満たし，

　極小値 $f(2)=\dfrac{7}{2}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 $\dfrac{7}{2}$	$\nearrow$

　3次関数 $f(x)$ に対して $f'(x)$ は 2次関数です。 $y=f'(x)$ が x 軸と 2 点で交わるとき，それらの共有点の x 座標，すなわち， $f'(x)=0$ の異なる 2 実解をそれぞれ α, β とすると， $f'(x)$ は $x=\alpha, x=\beta$ の前後でそれぞれ符号が変わるので， $f(x)$ は $x=\alpha, x=\beta$ において極値をとります。

　$y=f'(x)$ が x 軸と接するとき，すなわち， $f'(x)=0$ が重解をもつとき， 重解を α とすると $f'(\alpha)=0$ となりますが， $x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号は変わらないので， $f(x)$ は $x=\alpha$ で極値をとりません。

　$y=f'(x)$ が x 軸と共有点をもたないとき，すなわち， $f'(x)=0$ が実数解をもたないとき， $f'(x)=0$ となることはないので， $f(x)$ は極値をとりません。以上のことをまとめると，次のようになります。

3次関数 $f(x)$ が極値をもつための条件

3次関数 $f(x)$ が極値をもつ $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ が異なる 2 実解をもつ

3次関数 $f(x)$ が極値をもたない $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ が重解をもつ，または，

　　　　　　　　　　　　　　　　　　実数解をもたない

例8

(1) 関数 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+ax$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲を求めよ.

(2) x についての 3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+27x$ がある. $f(x)$ が単調増加関数となる p の最大値を求めよ.

(解説)

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+ax$ とおく

$f'(x)=x^2+ax+a$

$f(x)$ が極値をもたないとき

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもたなければよいから

$f'(x)=0$ の判別式を D として, $D\leqq 0$ となればよい

$D=a^2-4a=a(a-4)\leqq 0 \quad \therefore 0\leqq a\leqq 4$

(2) $f(x)=x^3+px^2+27x$

$f'(x)=3x^2+2px+27$

$f(x)$ が単調増加関数となるとき

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもたなければよいから

$f'(x)=0$ の判別式を D として, $D\leqq 0$ となればよいから

$\frac{D}{4}=p^2-3\cdot 27\leqq 0 \quad \therefore -9\leqq p\leqq 9$

よって, p の最大値は 9

確認問題1
3 次関数 $f(x)$ は $x=1$，$x=3$ で極値をとるという．また，その極大値は 2 で，極小値は -2 であるという．このとき，この条件を満たす関数 $f(x)$ をすべて求めよ．

解説

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ (a \neq 0)$ とおく

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=1$，$x=3$ で極値をとるから

$f'(1)=0$，$f'(3)=0$ が必要である

$3a+2b+c=0 \cdots$① , $27a+6b+c=0 \cdots$②

また，極大値は 2，極小値は -2 より

(ⅰ) $f(1)=2$，$f(3)=-2$ のとき

$a+b+c+d=2 \cdots$③ , $27a+9b+3c+d=-2 \cdots$④

①～④より， $a=1$，$b=-6$，$c=9$，$d=-2$

(ⅱ) $f(1)=-2$，$f(3)=2$ のとき

$a+b+c+d=-2 \cdots$⑤ , $27a+9b+3c+d=2 \cdots$⑥

①,②,⑤,⑥より， $a=-1$，$b=6$，$c=-9$，$d=2$

よって

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ または $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$

このとき，与えられた条件を満たす

確認問題2

a を定数として，x の 3 次関数 $f(x)=x^3+6(1-a)x^2-48ax$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもたないとき，a の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ が正の極大値と負の極小値をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ が負の極大値をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

解説

(1) $f'(x)=3x^2+12(1-a)x-48a$

$f(x)$ が極値をもたないとき，

$f'(x)=0$ が異なる 2 実解をもたなければよいから

判別式を D として， $D\leqq 0$ より

$$\frac{D}{4}=36(1-a)^2+144a=36a^2+72a+36=36(a+1)^2\leqq 0$$

$$\therefore\ a=-1$$

(2) $f'(x)=0$ となるとき

$$x^2+4(1-a)x-16a=0$$

$$(x+4)(x-4a)=0 \quad \therefore\ a=-4,4a$$

$a\fallingdotseq -1$ のとき，$f(x)$ は $x=-4,4a$ で極値をとる

$f(x)$ が正の極大値と負の極小値をもつとき

$$f(4a)f(-4)<0$$

$$-32^2a^2(a+3)(3a+1)<0$$

$a=0$ のとき，解なし

$a\fallingdotseq 0$ のとき，

$$(a+3)(3a+1)>0 \quad \therefore\ a<-3,\ -\frac{1}{3}<a<0,\ a>0$$

(3) 極大値が負のとき，極小値も負より

$$f(4a)<0\ ,\ f(-4)<0,\ a\fallingdotseq -1$$

$f(4a)<0$ より

$$-32a^2(a+3)<0 \quad \therefore\ -3<a<-1\ ,\ -1<a<0\ ,\ 0<a$$

$f(-4)<0$ より

$$a<-\frac{1}{3}$$

よって， $-3<a<-1\ ,\ -1<a<-\dfrac{1}{3}$

確認問題3

関数 $f(x)=x^3+2ax^2+bx$ が区間 $-2\leqq x\leqq 2$ ですべての極値をとるとき，定数 a，b が満たす関係式は

$$\begin{cases} b<\dfrac{{}^{\text{ア}}\boxed{}}{{}^{\text{イ}}\boxed{}}a^2 \\ -{}^{\text{ウ}}\boxed{}<a<{}^{\text{エ}}\boxed{} \\ b\geqq {}^{\text{オ}}\boxed{}a-{}^{\text{カ}}\boxed{} \\ b\geqq -{}^{\text{キ}}\boxed{}a-{}^{\text{ク}}\boxed{} \end{cases}$$

である。

解説

$f(x)=x^3+2ax^2+bx$

$f'(x)=3x^2+4ax+b$

$f(x)$ が $-2\leqq x\leqq 2$ ですべての極値をとるとき

$f'(x)=0$ が $-2\leqq x\leqq 2$ に異なる 2 つの実解をもつてばよいから

$f'(x)=0$ の判別式をDとして

$D>0$, $-2<$軸<2 , $f'(-2)\geqq 0$, $f'(2)\geqq 0$

よって

$$\begin{cases} 4a^2-3b>0 \\ -2<-\dfrac{2}{3}a<2 \\ f'(-2)=-8a+b+12\geqq 0 \\ f'(-2)=-8a+b+12\geqq 0 \end{cases}$$

したがって

$$\begin{cases} b<\dfrac{{}^{\text{ア}}4}{{}^{\text{イ}}3}a^2 \\ -{}^{\text{ウ}}3<a<{}^{\text{エ}}3 \\ b\geqq {}^{\text{オ}}8a-{}^{\text{カ}}12 \\ b\geqq -{}^{\text{キ}}8a-{}^{\text{ク}}12 \end{cases}$$

確認問題4
3次関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+a$ が $x>2$ の範囲で常に増加するための定数 a に関する必要十分条件を求めよ。

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$

$f(x)$ が $x>2$ で常に増加するとき，

$x>2$ で常に $f'(x)>0$ となればよい

(ⅰ) $a \leqq 2$ のとき

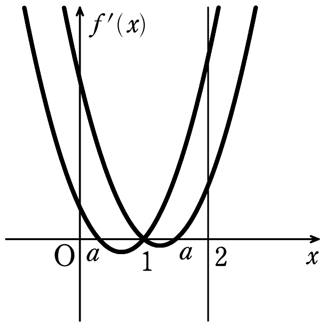
$x>2$ の範囲で $f'(x)>0$ となるから，$f(x)$ は常に増加する

(ⅱ) $a>2$ のとき

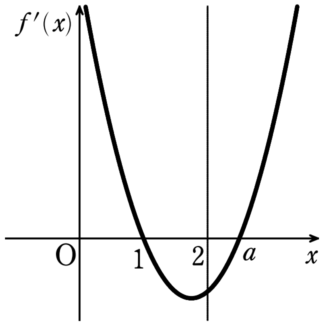
$2<x<a$ の範囲で $f'(x)<0$ となるから不適

(ⅰ)，(ⅱ)より，求める必要十分条件は $a \leqq 2$

(ⅰ)



(ⅱ)



参考 3次関数の極値の差

　3次関数が極値をもつとき，必ず 2 つの極値をもちますが，これらの極値の差は，積分を用いると比較的容易に求めることができます。

> 例1
> 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となると仮定する。
> (1)　$f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ となることを示せ。
> (2)　$f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ が成り立つことを示せ。

解説

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大， $x=\beta$ で極小となるから，

$f'(x)=0$ は異なる 2 実解 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ をもつ

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta)&=\int_\beta^\alpha f'(x)dx\\
&=-\int_\alpha^\beta f'(x)dx\\
&=-\int_\alpha^\beta 3(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&=3\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \left(\frac{1}{6}\text{公式}\right)\\
&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$

(2) 本問は 3次関数の極値の和を求める公式を導くものです。このような公式を使ってまわりくどいことをする (結局対称性を利用します) よりも，次節で 3次関数の対称性を利用すれば，簡単に求めることができます。

愚直に左辺と右辺を計算してもできますが，

この式の意味は， $f(\alpha),f(\beta)>0$ のとき

$$f(\alpha)+f(\beta)=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$$\frac{1}{2}\{f(\alpha)+f(\beta)\}(\beta-\alpha)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

左辺は台形の面積，右辺は $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を表し，これらが等しいという意味です。3次関数 $f(x)$ は極大点と極小点の中点の関して対称であるから，極大点と極小点を直線で結び，でっぱったところをくぼんだところにはめ込めば台形となるので，幾何的に考えれば明らかです。ただ， $f(\alpha), f(\beta)$ は必ずしも正ではないので，一応証明しておきます。ここでは，理系の範囲の置換積分を利用して示します。

$f(x)$ は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)$ に関して対称であるから

$$\frac{f(x)+f(\alpha+\beta-x)}{2}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

$$\therefore\ f(\alpha+\beta-x)=f(\alpha)+f(\beta)-f(x)$$

が成り立つ

$\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ において，

$x=\alpha+\beta-t$ ($t=\alpha+\beta-x$) とおくと， $\dfrac{dx}{dt}=-1$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(x)dx&=\int_\beta^\alpha f(\alpha+\beta-t)\cdot(-1)dt\\&=\int_\alpha^\beta\{f(\alpha)+f(\beta)-f(t)\}dt\\&=\{f(\alpha)+f(\beta)\}\int_\alpha^\beta dt-\int_\alpha^\beta f(t)dt\end{aligned}$$

$$2\int_\alpha^\beta f(x)dx=\{f(\alpha)+f(\beta)\}(\beta-\alpha)$$

$$\therefore\ f(\alpha)+f(\beta)=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

例2

3 次関数 $f(x)=x^3-3mx^2+3mx$ がある．ただし，m は定数とする．

(1)　関数 $f(x)$ が極値をもつときの m の値の範囲を求めよ．

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$f(\alpha)-f(\beta)=8\sqrt{2}$ を満たす m の値を求めよ．

解説

(1) $f'(x)=3x^2-6mx+3m$

$f(x)$ が極値をもつとき，$f'(x)=0$ が異なる 2 実解をもてばよいから

判別式を D として，$D>0$ となればよい

$$\frac{D}{4}=9m^2-9m>0$$

$$m(m-1)>0 \quad \therefore m<0,\ 1<m$$

(2) $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるから

$f'(x)=0$ は異なる 2 実解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつ

$$\begin{aligned}
f(\alpha)-f(\beta)&=\int_{\beta}^{\alpha} f'(x)dx\\
&=-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx\\
&=-\int_{\alpha}^{\beta} 3(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

ここで，解と係数の関係から $\alpha+\beta=2m, \alpha\beta=m$ より

$$=4\left(\sqrt{m^2-m}\right)^3=8\sqrt{2}$$

$$m^2-m=2$$

$$m^2-m-2=0$$

$$(m+1)(m-2)=0$$

(1)より，$m=-1, 2$