1.7　組合せ(2)・組分け

(1) 重複組合せ

組合せでは，異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出しましたが，ここでは，同じものを繰り返しとってもよいとして， r 個を取り出す組合せについて考えます。このような組合せを**重複組合せ**といいます。例えば，3 個の文字 a, b, c から重複を許して 4 個のものを取り出すとき，取り出し方は，

{a, a, a, a}, {a, a, a, b}, {a, a, a, c}, {a, a, b, b}, {a, a, b, c}, {a, a, c, c},
{a, b, b, b}, {a, b, b, c}, {a, b, c, c}, {a, c, c, c}, {b, b, b, b}, {b, b, b, c},
{b, b, c, c}, {b, c, c, c}, {c, c, c, c}

の 15 通りあります。
これを一般的に求める方法を考えてみます。
まず，仕切り｜を 2 個用意して，

a の部屋｜b の部屋｜c の部屋

というように，3 つの部屋を用意します。
次に，4 個のものを取り出すので，○を 4 個用意して，

○○○○｜｜

を並べる並べ方が何通りあるかを考えます。
例えば，

○○｜○｜○は，a を 2 個，b を 1 個，c を 1 個
○○○｜｜○は，a を 3 個，b を 0 個，c を 1 個

取り出したことに対応させ，これらはすべて 1 対 1 に対応するので，
この場合，

$$\frac{6!}{4!2!}=15\text{（通り）}$$　(同じものを含む順列)

と求めることができます。
一般に，次のことが成り立ちます。

重複組合せの総数
異なる n 個のものから重複を許して r 個を取り出す組合せの総数は，
○ r 個，｜ $n-1$ 個を用意して並べて，

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}\ \left(={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{H}_r\right)$$

例1
水，お茶，スポーツドリンクの3種類の飲み物を売っている自動販売機で，6本の飲み物を購入する。購入しない飲み物があってもよいものとすると，購入の組合せは $^{ア}\boxed{}$ 通りある。一方，3種類の飲み物をそれぞれ少なくとも1本は購入しなければならないものとすると，購入の組合せは $^{イ}\boxed{}$ 通りある。

今，袋の中に水，お茶，スポーツドリンクの3種類の飲み物がそれぞれ3本ずつ，合計9本が入っており，この中から3本を取り出す。取り出さない飲み物の種類があってもよいものとすると，取り出す組合せは $^{ウ}\boxed{}$ 通りある。

解説

(ア) ○を6個，｜を2個用意して並べて，

$$\frac{8!}{6!2!}={}^{ア}28 \text{（通り）}$$

(イ) まず，3種類の飲み物を1本ずつ購入して，1通り
残りの3本については，○を3個，｜を2個用意して並べて，

$$\frac{5!}{3!2!}=10 \text{（通り）}$$

(ウ) どれも3本ずつあるから，3本取り出すときに制限はかからないので，

$$\frac{5!}{3!2!}=10 \text{（通り）}$$

例2

x, y, z を整数とする。

(1) $1 \leqq x \leqq 5$, $1 \leqq y \leqq 5$, $1 \leqq z \leqq 5$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で $\boxed{}$ 組ある。

(2) $1 \leqq x < y < z \leqq 5$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で $\boxed{}$ 組ある。

(3) $1 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 5$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で $\boxed{}$ 組ある。

(4) $x+y+z=5$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で $\boxed{}$ 組ある。

(5) $x+y+z=5$, $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $z \geqq 1$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は全部で $\boxed{}$ 組ある。

解説

(1) $5^3=125$ (組)

(2) 1 から 5 までの整数から 3 個を選び，小さい順に x, y, z とすればよいから

$${}_5\mathrm{C}_3=10 \text{ (組)}$$

(3) 1 から 5 までの整数から重複を許して 3 個を選び， $x \leqq y \leqq z$ となるように， x, y, z とすればよいから，○を 3 個，｜を 4 個用意して並べて，

$$\frac{7!}{3!4!}=35 \text{ (組)}$$

(4) 5 個のものを x, y, z に分配すると考えて，○を 5 個，｜を 2 個用意して並べて，

$$\frac{7!}{5!2!}=21 \text{ (組)}$$

(5) まず， x, y, z に 1 ずつ分配し，残りの 2 個の分配の組合せの総数を考えればよいから，

$$\frac{4!}{2!2!}=6 \text{ (組)}$$

例4
a，b，c を整数とするとき，次の問いに答えよ。
(1)　$a+b+c=10$，$a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$c \geqq 1$ を満たす整数 a，b，c の組の総数を求めよ。
(2)　$a+b+c \leqq 10$，$a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$c \geqq 1$ を満たす整数 a，b，c の組の総数を求めよ。
(3)　$a+b+c \leqq 10$，$7 \geqq a \geqq 1$，$7 \geqq b \geqq 1$，$7 \geqq c \geqq 1$ を満たす整数 a，b，c の組の総数を求めよ。

(解説)
(1) まず， a, b, c に 1 ずつ分配し，残りの 7 を a, b, c に分配すると考えて，

$$\frac{9!}{7!2!}=36 \text{ (個)}$$

(2) まず， a, b, c に 1 ずつ分配して，

$$a'+b'+c' \leqq 7, a' \geqq 0, b' \geqq 0, c' \geqq 0 \ (a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1)$$

を満たす整数 a', b', c' の組の総数を求めればよい
この a', b', c' の組の総数は

$$a'+b'+c'+d=7, a' \geqq 0, b' \geqq 0, c' \geqq 0, d \geqq 0$$

を満たす整数 a', b', c', d の組の総数に等しい
($d=0$ のとき $a'+b'+c'=7$， $d=1$ のとき $a'+b'+c'=6$，…，$d=7$ のとき $a'+b'+c'=0$ より，これらを合わせると $a'+b'+c' \leqq 7$となるすべてのものを調べたことになります)
よって，

$$\frac{10!}{7!3!}=120 \text{ (個)}$$

(3) $a'+b'+c' \leqq 7, 6 \geqq a', b', c' \geqq 0$ を満たす整数 a', b', c' の組の集合は，(2) の部分集合であるから，(2)の中でこれを満たさないものは，

$$(a', b', c')=(7, 0, 0), (0, 7, 0), (0, 0, 7)$$

の 3 個より

$$120-3=117 \text{ (個)}$$

例5
8 個の正の符号＋と 6 個の負の符号－を，左から順に並べ，符号の変化が 5 回起こるようにする仕方は全部で何通りあるか。

(解説)

5 回符号変化が起こるとき，

(i) 正 | 負 | 正 | 負 | 正 | 負

(ii) 負 | 正 | 負 | 正 | 負 | 正

の 2 つの場合がある。

まず，正，負のところにそれぞれ＋，－を 1 個ずつ分配し，残りの 5 個の＋の分配の仕方それぞれに対して，残り 3 個の－の分配の仕方があるから，

$$\frac{7!}{5!2!}\times\frac{5!}{3!2!}\times 2=420\text{ (通り)}$$

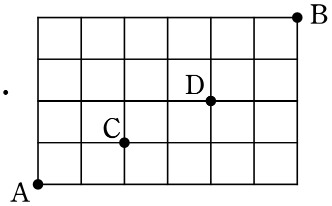
例6

図のような格子状の道路網がある．A 地点から B 地点に最短経路で行くものとする．

(1)　A 地点から B 地点への経路は何通りあるか.

(2)　途中で C 地点を通って，D 地点を通らない経路は何通りあるか.

(3)　角を曲がる回数が全部で 3 回である経路は何通りあるか.



解説

(1) $\dfrac{10!}{4!6!}=210$ (通り)

(2) C を通る最短経路の集合を C，D を通る最短経路の集合を D とすると，求めるものは $n(C\cap\overline{D})$

$$\begin{aligned} n(C\cap\overline{D}) &= n(C)-n(C\cap D) \\ &= \frac{3!}{1!2!}\times\frac{7!}{3!4!}-\frac{3!}{1!2!}\times\frac{3!}{1!2!}\times\frac{4!}{2!2!} \\ &= 3\cdot 35-3\cdot 3\cdot 6=51\text{ (通り)} \end{aligned}$$

(3) 縦方向にすすむことを T，横方向に進むことを Y とすると，

角を曲がる回数が 3 回となるとき，

(i) 縦 | 横 | 縦 | 横

(ii) 横 | 縦 | 横 | 縦

の 2 つの場合があるから，T 4 個，Y 6 個を分配して，

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{4!}\times 2=30\text{ (通り)}$$

(2) **組分け**

組分けとは，文字通りいくつかのものをいくつかの組に分けることです。重要なのは，まず，配るものに区別があるかどうか，そして，配られるものにも区別があるかどうか，でそれぞれ数え方が変わってくるので注意が必要です。ここでは，いくつかの例題を通して見ていきます。

例7

9 人を 2 人，3 人，4 人の 3 組に分ける方法は ア$\boxed{}$ 通りある。また，2 人，2 人，5 人の 3 組に分ける方法は イ$\boxed{}$ 通りあり，3 人ずつの 3 組に分ける方法は ウ$\boxed{}$ 通りある。したがって，9 人を各組が 2 人以上となるように 3 つの組に分ける方法は エ$\boxed{}$ 通りある。また，9 人を各組が 1 人以上となるように 3 つの組に分ける方法は オ$\boxed{}$ 通りある。

解説

組(配られるもの)に区別があるか，ないかということがポイントとなる問題です。

(ア) ${}_9C_2\times{}_7C_3=36\cdot35=$ ア1260 (通り)

(イ) $\dfrac{{}_9C_2\times{}_7C_2}{2!}=\dfrac{36\cdot21}{2}=$ イ378 (通り)

注

(ア)は，2 人，3 人，4 人と人数が違うので，組は区別できます。ところが，(イ)は，2 人，2 人，5 人と 2 人の組が 2 つあり，これらは区別できません。例えば，9 人を a, b, c, d, e, f, g, h, i としたとき，2 人のグループに 2 人組 A，B などと付いていれば，

2 人組A	2 人組B	5 人組
a, b	c, d	e, f, g, h, i
c, d	a, b	e, f, g, h, i

これらは異なるものですが，実際には付いていないため，これらは同じものになります。${}_9C_2\times{}_7C_2$ 通りの組合せのすべてに，それぞれこのような重複があるので，2 人組 A, B の並べ方である 2! で割って，解答のようになります。

(ウ) $\dfrac{{}_9C_3\times{}_6C_3}{3!}=\dfrac{84\cdot 20}{6}={}^{ウ}280$ (通り)

(エ) $1260+378+280={}^{エ}1918$ (通り)

(オ) 1 人となる組を含む組分けの人数の内訳は,

$(1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4)$

これらにすべてが 2 人以上の組となる(エ)を足して,

$$\frac{9\times 8}{2!}+9\times{}_8C_2+9\times{}_8C_3+\frac{9\times{}_8C_4}{2!}+1918=3025 \text{ (通り)}$$

組分けの問題で，本問のように配るものに区別があり，個数が指定されているときは，組合せを利用します。また，組に区別がないときは，組に区別がある場合からその重複分を除くようにして考えます。

例8
1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードがある．これを 3 枚ずつ 3 組に分ける方法は ア[ ] 通りあり，そのうちどの組にも 3 の倍数が書かれたカードが含まれるのは イ[ ] 通りである．

(解説)

(ア) 9 枚から 3 枚を選ぶ方法は， ${}_9C_3=84$ (通り)

残りの 6 枚から 3 枚を選ぶ方法は， ${}_6C_3=20$ (通り)

残りの 3 枚は自動的に決まる

3 つの組に区別はないから

$$\frac{84\times 20}{3!}=280 \text{ (通り)}$$

(イ) 3 の倍数は 3，6，9

3 のグループに入る 2 枚を 6 枚から選ぶ方法は ${}_6C_2=15$ (通り)

6 のグループに入る 2 枚を残り 4 枚から選ぶ方法は ${}_4C_2=6$ (通り)

9 のグループに入る 2 枚は自動的に決まる

3, 6, 9 を入れた時点で組を区別することができるから

$15\times 6=90$ (通り)

注 組が区別できるので， 3! で割ってはなりません。

例9

すべて色の異なる7個の球がある．

(1)　7個の球から6個の球を取り出して，A, B, Cのケースに2個ずつ入れる方法は何通りあるか．

(2)　7個の球を，A, B, Cのケースに分ける方法は何通りあるか．ただし，各ケースには何個入ってもよいが，それぞれのケースには少なくとも1個は入るものとする．

(3)　7個の球を，3つのグループに分ける方法は何通りあるか．ただし，各グループには何個入ってもよいが，それぞれのグループには少なくとも1個は入るものとする．

解説

配るものに区別があるときの分配の問題です。

(1) ${}_7C_2\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_2=21\cdot10\cdot3=630$ 通り

(2) 7個の球は区別があるので，それぞれをa, b, c, d, e, f, gとすると，

aの入れ方は， A, B, Cのいずれかに入れるので，3通り

同様に，bからgも3通りの入れ方があり，A, B, Cには少なくとも1個は入らなければならないので，2つのケースだけに7個が入る場合と，1つのケースだけに7個が入る場合を除いて，

$3^7-3(2^7-2)-3=2187-378-3=1806$ 通り

(3) (2) において，A, B, Cの区別をなくすと，3! 通りずつ重複が生じるから

$\dfrac{1806}{3!}=301$ 通り

例10

6個の球を，次の Ⅰ または Ⅱ の方法で3つの箱A，B，Cに入れる．

Ⅰ：空の箱があってもよい方法

Ⅱ：空の箱があってはいけない方法

(1)　6個の球を各々区別するとき，その入れ方は

Ⅰ の場合 ア $\boxed{}$ 通りあり，

Ⅱ の場合 イ $\boxed{}$ 通りある．

(2) 6個の球を区別しないとき，その入れ方は

Ⅰ の場合 $^{ウ}\boxed{}$ 通りあり，

Ⅱ の場合 $^{エ}\boxed{}$ 通りある．

(3) 特定の1個の球のみを他の5個の球と区別するとき，その入れ方は

Ⅰ の場合 $^{オ}\boxed{}$ 通りあり，

Ⅱ の場合 $^{カ}\boxed{}$ 通りある．

解説

(1)(ア) $3^6=729$ (通り)

(イ) $3^6-{}_3C_2(2^6-2)-3=540$ (通り)

(2)(ウ) ○を6個，｜を2個用意して並べる並べ方に等しいから，

$$\frac{8!}{6!2!}=28 \text{ (通り)}$$

(エ) まず A, B, C に1つずつ分配して，残りの3個の分配の仕方を考えればよいから，

$$\frac{5!}{3!2!}=10 \text{ (通り)}$$

(3)(オ) 特定の1個を A に入れるとき，残りの5個の分配の仕方は

$$\frac{7!}{5!2!}=21 \text{ (通り)}$$

B, C に入れるときも同様なので，

$21\cdot 3=63$ (通り)

(カ) 特定の1個を A に入れるとき，B, C にまず1個ずつ分配し，残りの3個の分配の仕方を考えればよい。特定の1個を B, C に入れるときも同様で，

$$\frac{5!}{3!2!}\times 3=30 \text{ (通り)}$$

配られるもの(箱)に区別があり，配るものに区別があるか，ないかの分配の問題です。配るものに区別があるときは重複順列，ないときは重複組合せを用います。

例11
次の問いに答えよ．ただし，同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする．
(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか．
(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか．
(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか．

解説
(1) $x+y+z+w=10$，$0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq w$ を満たす整数解の組の個数を調べればよい

$$(x, y, z, w)=(0,0,0,10),(0,0,1,9),(0,0,2,8),(0,0,3,7),(0,0,4,6),$$
$$(0,0,5,5),(0,1,1,8),(0,1,2,7),(0,1,3,6),(0,1,4,5),(0,2,2,6),$$
$$(0,2,3,5),(0,2,4,4),(0,3,3,4),(1,1,1,7),(1,1,2,6),(1,1,3,5),$$
$$(1,1,4,4),(1,2,2,5),(1,2,3,4),(1,3,3,3),(2,2,2,4),(2,2,3,3)$$

の 23 (通り)
本問のように，配られるものに区別がなく，配るものにも区別がない場合，数え上げが基本となります。
(2) ○を 10 個，｜を 3 個用意して並べる並べ方に等しいから，

$$\frac{13!}{10!3!}=286\text{ (通り)}$$

(3) $\dfrac{9!}{6!3!} \times \dfrac{7!}{4!3!}=84 \cdot 35=2940$ (通り)
(1)と(2)は，配るものに区別がない場合における，配られるものに区別があるか，ないかの分配の問題です。
(1)と(2)の対応関係をしっかり押さえて下さい。
(1)において，
　(a, b, c, d) のタイプは 5 通り
　(a, a, b, c) のタイプは 11 通り
　(a, a, b, b) のタイプは 3 通り
　(a, a, a, b) のタイプは 4 通り
(1)から(2)を求めるのであれば，
(a, b, c, d) のタイプは，(1)の 1 通りは，(2)では，a, b, c, d の並べ方の 4! ＝24 通りに対応します。

(a, a, b, c) は (1) の 1 通りは，(2) では，$\dfrac{4!}{2!}=12$ 通り，

(a, a, b, b) は (1) の 1 通りは，(2) では，$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り，

(a, a, a, b) は (1) の 1 通りは，(2)では，$\dfrac{4!}{3!}=4$ 通りに対応するから，

$5\cdot24+11\cdot12+6\cdot3+4\cdot4=286$ (通り)

(2)から(1)を求めることもできます。問題によってどちらを先に求めるかが変わってくるので，どちらからも求められるようにしておいた方がよいでしょう。(1)から求める場合は，解答のようにすべてを書き並べるしかありませんが，(2)から求めるのであれば，計算で処理できます。

最後に総合的な問題を 2 つやっておきます。

例12

6個の球を3つの箱に入れる。1個も入らない箱があってもよいことにすると，次の場合，入れ方は何通りあるか。

(1) 球と箱のそれぞれに区別があるとき，$\boxed{}$ 通り。

(2) 球に区別はないが箱に区別があるとき，$\boxed{}$ 通り。

(3) 球に区別はあるが箱に区別がないとき，$\boxed{}$ 通り。

(4) 球と箱のそれぞれに区別がないとき，$\boxed{}$ 通り。

解説

(1) $3^6=729$ (通り)

(2) ○を 6 個，｜を 2 個用意して並べて，

$\dfrac{8!}{6!2!}=28$ (通り)

(3) 球が 1 箱だけに入るのは，

(1)では，3 通りであるが，(3)では，1 通り

2 箱だけに入るのは，

(1)では，${}_3C_2(2^6-2)=186$ 通りであるが，

3 つの箱を A, B, C とし，セットをセット1，セット2 とすると，これらのセットを A, B, C に入れる入れ方は $3\cdot2=6$ 通りあるので，

(3)では，$\dfrac{186}{6}=31$ 通り

3 箱すべてに入るのは，

(1)では，$729-3-186=540$ 通りであるが，

これもセット1，セット2，セット3 の並べ方の $3!=6$ 通りだけ重複しているので，

(3)では，$\dfrac{540}{6}=90$ 通り

以上より，$1+31+90=122$ (通り)

(4) (a, a, a) のタイプは，(2, 2, 2) の 1 通り，

(a, a, b) のタイプは，(0, 0, 6), (0, 3, 3), (1, 1, 4) の 3 通り，

(a, b, c) のタイプは，残り。

(a, a, a) は，(4)の 1 通りが，(2)の $\dfrac{3!}{3!}=1$ 通り

(a, a, b) は，(4)の 1 通りが，(2)の $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り

(a, b, c) は，(4)の 1 通りが，(2)の $3!=6$ 通りに対応するから，

$$1+3+\frac{28-1-3\cdot 3}{6}=7\ (\text{通り})$$

例13

1 そうあたり 4 人まで乗れるボート 2 そうに 6 人が分乗するとき，次のような場合の乗り方は何通りあるか.

(1)　人もボートも区別しない場合

(2)　人は区別しないが，ボートは区別する場合

(3)　人もボートも区別する場合

(4)　人は区別するが，ボートは区別しない場合

解説

(1) 人数の内訳のみを考えればよいから，

(2, 4), (3, 3)

の 2 通り

(2) $2!+\dfrac{2!}{2!}=3$ 通り

(3) ボートA，ボートBが誰も乗らなくてもよくて，さらに人数制限もない乗り方から A, B の内訳が

$(A, B)=(0, 6), (1, 5), (5, 1), (6, 0)$

となる場合を引けばよいから，

$2^6-1\cdot 2-6\cdot 2=50$ (通り)

(4) (3)では，ボート A, B にはそれぞれ少なくとも 1 人は乗っているから，

$\dfrac{50}{2!}=25$ (通り)

例11 は，すべて区別してから区別をなくして重複を消していく方法をとり，例12 は，すべて区別しないところから区別をして重複を加えていく方法をとっています。制限がないときは，例11 のような順序がよいと思いますが，制限が付いたときは，例12 のような順序をとった方がよいこともあります。どうすればよいかは，問題によって考えるしかありません。

確認問題1

(1)　方程式 $x+y+z=28$ を満たす非負整数の組 (x, y, z) の個数は ア$\boxed{}$ 個ある．その中で，z が偶数である場合の個数は イ$\boxed{}$ 個である．

(2)　いくつかの 10 円玉，50 円玉，100 円玉を用いて 1400 円を作りたい．このときの作り方は ウ$\boxed{}$ 通りある．ただし，用いる個数は 0 個でもよいとする．

解説

(1) ○を 28 個，｜を 2 個を用意して並べて，

$$\frac{30!}{28!2!}=435 \text{ 個}$$

$z=2k\,(k=0, 1, 2, \cdots, 14)$ のとき，

$$x+y=28-2k,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

これを満たす (x, y) の個数は

$$\frac{(29-2k)!}{(28-2k)!1!}=29-2k \text{ 個}$$

よって，

$$29+27+\cdots+1=\frac{15(29+1)}{2}=225 \text{ 個}\quad \text{答}$$

(2)　10 円玉，50 円玉，100 円玉をそれぞれ x, y, z 個用いるとすると，

$$10x+50y+100z=1400$$

$$\therefore\ x+5y+10z=140\quad (\ x=5(28-y-2z)\ )$$

x は 5 の倍数であるから $x=5u$ とおくと

$$u+y+2z=28$$

(1) より，225 通り　答

確認問題2

x, y, z は 0 以上の整数とする。

(1) $x+y+z=24$ を満たす組 (x, y, z) は $^{ア}\boxed{}$ 個ある。

(2) $x \leqq y \leqq z$ および $x+y+z=24$ を満たす組 (x, y, z) は $^{イ}\boxed{}$ 個ある。

(3) $x+2y+3z=24$ を満たす組 (x, y, z) は $^{ウ}\boxed{}$ 個ある。

解説

(1) ○を 24 個，｜を 2 個用意して並べて，

$$\frac{26!}{24!2!}=325\ (個)\quad 答$$

(2) (a, a, a) のタイプは，$(8, 8, 8)$ の 1 通り

これは，(2)の 1 通りが(1)の $\dfrac{3!}{3!}=1$ 通り

(a, a, b) のタイプは

$(0, 0, 24), (1, 1, 22), \cdots, (7, 7, 10), (9, 9, 6), \cdots, (12, 12, 0)$ の 12 通り

これらは，(2)の 1 通りが(1)の $\dfrac{3!}{2!}=3$ 通り

(a, b, c) のタイプは，それ以外で，

これらは，(2)の 1 通りが(1)の $3!=6$ 通り

よって，

$$1+12+\frac{325-1-3\cdot 12}{6}=61\ (個)\quad 答$$

(3) $X=z, Y=y+z, Z=x+y+z$ とおくと，

$X+Y+Z=24, 0 \leqq X \leqq Y \leqq Z$

1 組の X, Y, Z に対して，1 組の x, y, z が対応するから

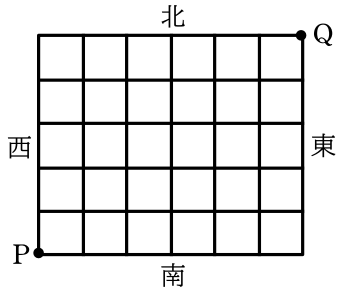
(2)より，61 (個) 答

確認問題3

ある町には，図のように東西に 6 本の道と南北に 7 本の道がある。

(1)　P 地点から Q 地点まで行く最短経路は何通りあるか。

(2)　P 地点から Q 地点まで行く最短経路のうち，右折の回数と左折の回数の合計がちょうど 8 となるのは何通りあるか。



(解説)

(1) $\dfrac{11!}{5!6!}=462$ (通り)　答

(2) 縦に進むことを T，横に進むことを Y とするとき，

右折の回数と左折の回数の合計が 8 となるのは，

(i) 縦 | 横 | 縦 | 横 | 縦 | 横 | 縦 | 横 | 縦

(ii) 横 | 縦 | 横 | 縦 | 横 | 縦 | 横 | 縦 | 横

の 2 通り，縦と横のところにまず T と Y を 1 つずつ入れて，残りの T と Y をどのように入れるかを考えればよいから，

$$\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{1!4!}\times\frac{4!}{1!3!}=30$$ (通り)　答

確認問題4
8 名のクラスのうち，3 名が男子学生，5 名が女子学生とする。グループ研究を課すことになり，クラスを 3 つのグループに分けるとする。ただし，それぞれのグループの人数は 2 人以上，4 人以下とする。

(1) 学生の性別に関係なくグループ分けをする方法は ア$\boxed{}$ 通りある。

(2) 男子学生のみ，あるいは女子学生のみで構成されるグループを含まないグループ分けの方法は イ$\boxed{}$ 通りある。

解説

(1) $\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4}{2!}+\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3}{2!}=490$ (通り)

(2) 男子学生は各グループ 1 名ずつに分かれるから，男子学生を A，B，C とし(この時点で，組を区別できる)，それぞれ同じグループになる女子学生の人数を a，b，c とすると，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ と分けるとき，${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3=20$ (通り)

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 1)$ のときも同様に，20 通りずつある

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 2)$ と分けるとき，${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2=30$ (通り)

$(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 2)$，$(2,\ 2,\ 1)$ のときも同様に，30 通りずつある

よって，

$20\times3+30\times3=$ イ150 (通り)

注

(2) は，組に区別がある同じ人数の組を含む組分けの問題です。
${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3$ だと，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ の場合しか考えられていません。いま，組に区別があるから，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 3,\ 1)$，$(3,\ 1,\ 1)$ は異なるものなので，1, 1, 3 の並べ方である $\dfrac{3!}{2!}=3$ をかけないとすべての組合せを求めたことにはなりません。

確認問題5

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える．ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする．次に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい．

(1)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(2)　互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(3)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(4)　n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別のつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

解説

(1) 3^n 通り　答

(2) ○を n 個，｜を 2 個用意して並べる並べ方に等しいから，

$$\frac{(n+2)!}{n!2!}=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)\ (\text{通り})$$　答

(3) 1 箱だけに入るのは，

(1)では 3 通りあるが，(3)では 1 通り

2箱だけに入るのは，

(1)では ${}_3C_2(2^n-2)=3\cdot 2^n-6$ 通りあるが，

(3)ではセット1 とセット2 を A, B, C に入れる入れ方の $3\times 2=6$ 通りずつ重複するので，

$$\frac{3\cdot 2^n-6}{6}=2^{n-1}-1\ \text{通り}$$

3 箱すべてに入るのは，

(1)では $3^n-(3\cdot 2^n-6)-3=3^n-3\cdot 2^n+3$ 通りあるが，

(3)ではセット1 とセット2 とセット3 を A, B, C に入れる入れ方の $3!=6$ 通りずつ重複するので，

$$\frac{3^n-3\cdot 2^n+3}{6}\ \text{通り}$$

よって

$$1+2^{n-1}-1+\frac{3^n-3\cdot 2^n+3}{6}=\frac{3^{n-1}+1}{2}\text{ 通り}\quad \boxed{\text{答}}$$

(4) (a, a, a) のタイプは， $(2m, 2m, 2m)$ の 1 通り

(a, a, b) のタイプは，

$$(0, 0, 6m), (1, 1, 6m-2), \cdots (2m-1, 2m-1, 2m+2),$$
$$(2m+1, 2m+1, 2m-2), \cdots, (3m, 3m, 0)$$

の $3m$ 通り

(a, b, c) のタイプは，その他

(a, a, a)のタイプは，(4)の 1 通りに対し，(2)では $\frac{3!}{3!}=1$ 通り

(a, a, b)のタイプは，(4)に 1 通りに対し，(2)では $\frac{3!}{2!}=3$ 通り

(a, b, c)のタイプは，(4)の 1 通りに対し，(2)では $3!=6$ 通り

が対応するので，

$$1+3m+\frac{(3m+1)(6m+1)-3m\cdot 3-1}{6}=3m^2+3m+1$$

$n=6m$ であるから， $m=\frac{n}{6}$ より

$$\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1\text{ 通り}\quad \boxed{\text{答}}$$