2.5　条件付き確率(1)

(1) 条件付き確率

　次のような問題を考えてみます。

大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，大きいさいころの出た目を a，小さいさいころの出た目を b とする。$a+b=6$ であったときに，$a \geqq 4$ である確率を求めよ。

(解説)

$a+b=6$ である事象を A，$a \geqq 4$ である事象を B とすると

$a+b=6$ となるのは，

$$(a, b)=(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

の 5 通り

うち，$a \geqq 4$ となるのは

$$(a, b)=(4, 2), (5, 1)$$

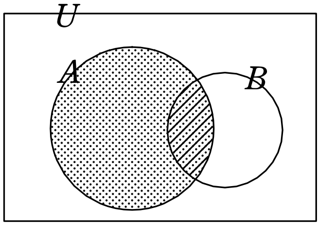
の 2 通り

よって，求める確率は，

$$\frac{2}{5}$$

この確率は，事象 A が起こったときに(起こったという条件のもとで)，事象 B が起こる確率です。このような確率を事象 A が起こったときの事象 B が起こる**条件付き確率**といい，$P_A(B)$ と表します。

　ここで，ある試行において，各根元事象が同様に確からしいとき，その全事象を U とします。また，A, B を 2 つの事象とし，$n(A) \fallingdotseq 0$ とします。このとき，左のベン図からも分かるように，



$$P_A(B)=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

が成り立ちます。

上の例題では，$a+b=6$ となるものの集合の要素の個数が $n(A)$ であり，そのうち，$a \geqq 4$ となるものの集合の要素の個数が $n(A \cap B)$ であるから，上の公式が成り立つことが分かると思います。

また，この公式の分母，分子をそれぞれ $n(U)$ で割ると，

$$P_A(B)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

が成り立ちます。

(2) 確率の乗法定理

前節の最後の式の分母を払うと，

$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

となります。これを確率の**乗法定理**といいます。

確率の乗法定理 2つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は， $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

例1 当たりくじ 5 本を含む 20 本のくじの中から，引いたくじはもとに戻さないで，1 本ずつ 2 回続けてくじを引く。 1 本目が当たる確率は $^{ア}\boxed{}$ である。2 本目が当たる確率は $^{イ}\boxed{}$ である。 2 本とも当たる確率は $^{ウ}\boxed{}$ である。1 本だけ当たる確率は $^{エ}\boxed{}$ である。

解説

(ア) $\dfrac{5}{20}={}^{ア}\dfrac{1}{4}$

(イ) A ：1 本目が当たる事象

B ：2 本目が当たる事象とすると

$$P(B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$$
$$=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}+\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}=\frac{5\cdot 19}{20\cdot 19}=\frac{1}{4}$$

くじ引きは，何番目に引いてもあたりを引く確率は同じです。

(ウ) $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

$$=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}=\frac{1}{19}$$

(エ) $P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A)P_A(\overline{B})+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

$$=\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}+\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}=\frac{15}{38}$$

例2

赤球が3個，白球が7個入っている袋から，球を戻さずに1球ずつ取り出す。

(1)　3球取り出したとき，白球が1個の確率は ア $\boxed{}$ である。

(2)　最初の赤球が k 回目に取り出される確率を a_k とすると，

$a_2=$ イ $\boxed{}$，$a_3=$ ウ $\boxed{}$ である。

(3)　a_k を最大にする k は エ $\boxed{}$ である。

(4)　2個目の赤球が k 回目に取り出される確率を b_k とすると，

$b_5=$ オ $\boxed{}$ である。

解説

(1) ${}_3\mathrm{C}_1\times\dfrac{7\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8}=\dfrac{7}{40}$

(2) $a_2=\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{3}{9}=\dfrac{7}{30}$，　$a_3=\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{6}{9}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{40}$

(3) $a_1=\dfrac{3}{10}$，　$a_k=\dfrac{7\cdot6\cdot\cdots\cdot(9-k)}{10\cdot9\cdot\cdots\cdot(12-k)}\cdot\dfrac{3}{11-k}$ $(2\leqq k\leqq8)$

$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\dfrac{(8-k)(11-k)}{(11-k)(10-k)}=\dfrac{8-k}{10-k}<1$ $(2\leqq k\leqq7)$

$\therefore$ $a_k>a_{k+1}$ $(2\leqq k\leqq7)$

$a_2<a_1$ より，a_k を最大にする k は1である

(4) $b_5={}_4\mathrm{C}_1\times\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot3}{10\cdot9\cdot8\cdot7}\cdot\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$

例3

壺の中に赤球が3個，白球が2個入っている。無作為に1つの球を取り出し，色を見てもとへ戻し同じ色の球を更に1つ加える。引き続いて1つの球を取り出し，色を見てその球および1個の同色の球を壺の中に加える。3回目にまた1つの球を取り出す。このとき，k 回目に赤球が出るという事象を A_k とする $(k=1,\ 2,\ 3)$。

確率 $P(A_1\cap A_2\cap A_3)$，$P(A_3)$，条件つき確率 $P_{A_3}(A_2)$ を求めよ。

解説

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P(A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$
$$+ P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$$
$$= \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7}$$
$$= \frac{2}{7} + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} + \frac{3}{35} = \frac{3}{5}$$

ポリアの壺と呼ばれる問題です。結局，1回目に赤球を取り出す確率と同じ確率になります。

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{2}{5}$$

よって，

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{2}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3}$$

これは，原因の確率と呼ばれるものです。後ほど解説します。

例4

袋Aには赤玉3個，白玉2個，袋Bには赤玉2個，白玉3個が入っている。

(1)　袋Aから1個の玉を取り出して袋Bに入れ，よくかき混ぜて，袋Bから1個の玉を取り出すとき，袋Bから取り出した玉が赤玉である確率は $\boxed{}$ である。

(2)　袋Aから2個の玉を取り出して袋Bに入れ，よくかき混ぜて，袋Bから2個の玉を取り出すとき，袋Bから取り出した玉が2個とも赤玉である確率は $\boxed{}$ である。

解説

(1)(ⅰ)袋Aから赤玉1個を取り出す

(ⅱ)袋Aから白玉1個を取り出す

の場合があるから，

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{13}{30}$$

(2) (ⅰ)袋 A から赤玉 2 個を取り出す

(ⅱ) 袋 A から赤玉 1 個，白玉 1 個を取り出す

(ⅲ) 袋 A から白玉 2 個を取り出す

の場合があるから，

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{37}{210}$$

例5

2 個のさいころを同時に 1 回投げる．出る目の和を 5 で割った余りを X,
出る目の積を5 で割った余りを Y とする．

(1) $Y\geqq 1$ である確率を求めよ．

(2) $X=2$ または $Y=2$ である確率を求めよ．

(3) $X=2$ である条件のもとで $Y=2$ である確率を求めよ．

解説

X と Y について，表をかくと，

和を 5 で割った余り X の表

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0
5	1	2	3	4	0	1
6	2	3	4	0	1	2

積を 5 で割った余り Y の表

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	0	1
2	2	4	1	3	0	2
3	3	1	4	2	0	3
4	4	3	2	1	0	4
5	0	0	0	0	0	0
6	1	2	3	4	0	1

(1) $P(Y\geqq 1)=1-P(Y=0)=1-\dfrac{11}{36}=\dfrac{25}{36}$

(2) $P(X=2\cup Y=2)=P(X=2)+P(Y=2)-P(X=2\cap Y=2)$

$$=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{1}{3}$$

(3) $P_{X=2}(Y=2)=\dfrac{P(X=2\cap Y=2)}{P(X=2)}=\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{8}{36}}=\dfrac{1}{4}$

例6
両面が赤色のカードが 3 枚，片方の面が赤，もう片方の面が青のカードが 3 枚，片方の面が赤，もう片方の面が黄色のカードが 4 枚ある。この 10 枚のカードを袋に入れ，無作為に 1 枚を取り出しテーブルの上に置いたとき，以下の問いに答えよ。ただし，カードをテーブルの上に置いたとき，見えている面をカードの表とする。

(1)　カードの表が赤である確率は，$\dfrac{\text{ア}\boxed{}}{\text{イ}\boxed{}}$ である。

(2)　カードの表が赤であるとき，裏も赤である確率は，$\dfrac{\text{ウ}\boxed{}}{\text{エ}\boxed{}}$ である。

(3)　カードの表が赤であるとき，裏が黄色でない確率は，$\dfrac{\text{オ}\boxed{}}{\text{カ}\boxed{}}$ である。

(解説)

(1) 面も区別して考えて，カードの面は全部で $10\times2=20$ 面あり，これらの各面がカードの表となるのは，同様に確からしい

赤の面は，全部で $3\times2+3+4=13$ 面あるから $\dfrac{13}{20}$

(2) A ：カードの表が赤である事象

B ：カードの裏が赤である事象とすると

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{6}{13}$$

(3) C ：カードの裏が黄色である事象とすると

$$P_A(\overline{C})=\frac{n(A\cap\overline{C})}{n(A)}=\frac{n(A)-n(A\cap C)}{n(A)}=1-\frac{4}{13}=\frac{9}{13}$$

例7

6 月のある日，A, B の両市を受け持つセールスマンS氏は，それぞれ確率 $P(\mathsf{A})=0.6,\ P(\mathsf{B})=0.4$ で，いずれかの市に滞在している．一方，S 氏が滞在しているとき A 市，B市で雨の降る確率は，それぞれ $P_{\mathsf{A}}(\mathsf{C})=0.5,\ P_{\mathsf{B}}(\mathsf{C})=0.4$ である．

(1)　S 氏が雨にあう確率 $P(\mathsf{C})$ を求めよ．

(2)　雨が降っていたとき S 氏が A 市に滞在している確率 $P_{\mathsf{C}}(\mathsf{A})$ を求めよ．

(3)　雨が降っていたとき S 氏が B 市に滞在している確率 $P_{\mathsf{C}}(\mathsf{B})$ を求めよ．

解説

(1) $$\begin{aligned}P(\mathsf{C})&=P(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})+P(\mathsf{B}\cap\mathsf{C})\\&=P(\mathsf{A})P_{\mathsf{A}}(\mathsf{C})+P(\mathsf{B})P_{\mathsf{B}}(\mathsf{C})\\&=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{23}{50}\end{aligned}$$

(2) $$P_{\mathsf{C}}(\mathsf{A})=\frac{P(\mathsf{C}\cap\mathsf{A})}{P(\mathsf{C})}=\frac{15}{23}$$

(3) $$P_{\mathsf{C}}(\mathsf{B})=\frac{P(\mathsf{C}\cap\mathsf{B})}{P(\mathsf{C})}=\frac{8}{23}$$

確認問題1

n 本中 k 本の当たりが入ったクジを n 人で順番に引く。引いたクジは元に戻さないとして，i 番目にクジを引く人の当たる確率が $\dfrac{k}{n}$ であることを示せ。ただし，$0<k<n$ とする。

(解説)

当たりのくじもはずれのくじもすべて区別して考える

n 人のくじの引き方は全部で $n!$ 通り

うち， i 番目にクジを引く人が当たるのは,

i 番目は当たりで， k 通り

その他の $n-1$ 人は i 番目の人が引いた以外の $n-1$ 本をどのように引いてもよいので,

$$\frac{k\cdot(n-1)!}{n!}=\frac{k}{n}$$ 終

確認問題2

白球 15 個と赤球 4 個が箱に入っている．この箱から球を 1 個取り出す操作を繰り返す．ただし，取り出した球はもとに戻さない． n 回目に取り出した球が 3 個目の赤球である確率を p_n とする． p_n が最大となる n の値を求めよ．

解説

同じ色の球も区別して考える

$p_1, p_2, p_{19}=0$

$n=3, 4, \cdots, 18$ のとき，

まず， n 回目には赤球が来るから 4 通り

1 から $n-1$ 回目に赤球が 2 回，白球が $n-3$ 回出ればよい

残りは赤球 1 個と白球 $18-n$ 個の並べ方で重複の仕方は n 回目までの並べ方それぞれに対してすべて等しいから，

$$p_n=\frac{4\times{}_{n-1}\mathrm{C}_2\cdot3\cdot2\times{}_{15}\mathrm{P}_{n-3}}{{}_{19}\mathrm{P}_n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{n(18-n)}{(19-n)(n-2)}$$

$p_n<p_{n+1}$ のとき， $p_n>0$ であるから， $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ より，

$$\frac{n(18-n)}{(19-n)(n-2)}>1$$

$$18n-n^2>-n^2+21n-38$$

$$3n<38 \quad \therefore n<\frac{38}{3}$$

よって，

$n\leqq12$ のとき， $p_n<p_{n+1}$

$n\geqq13$ のとき， $p_n>p_{n+1}$

したがって，

$$p_1<p_2<\cdots<p_{12}<p_{13}>p_{14}>\cdots>p_{19}$$

よって， p_n が最大となる n は $n=13$ 　答

確認問題3

赤色，白色，黄色の 3 つのさいころを同時に投げ，それぞれのさいころの出た目を x，y，z とする。x と y の最小値を m，最大値を M とする。

(1)　$m \leqq z \leqq M$ となる確率を求めよ。

(2)　$m \leqq z \leqq M$ という条件の下で，$M-m=3$ となる条件付き確率を求めよ。

解説

(1) 1 から 6 の 6 個の数字から重複を許して 3 個の数字を選んで，

$m \leqq z \leqq M$ となるように m, z, M とすればよい

6 個の数字から重複を許して 3 個の数字を選ぶ方法は

○ 3 個，｜5 個の並べ方に等しいから，

$$\frac{8!}{3!5!}=56 \text{ 通り}$$

そのうち $m=M$ となるのは 6 通り

$m \neq M$ となる $56-6=50$ 通りは，

$(m, M)=(x, y), (y, x)$ の場合があるので

$$6+50\times 2!=106 \text{ 通り}$$

よって，求める確率は，

$$\frac{106}{216}=\frac{53}{108}$$ 答

(2) A ： $m \leqq z \leqq M$ となる

B ： $M-m=3$ となる事象とする

$M-m=3$ となるのは，

$$(m, M)=(1, 4), (2, 5), (3, 6)$$

$(m, M)=(1, 4)$ となるのは，　$z=1, 2, 3, 4$，　$(x, y)=(1, 4), (4, 1)$ より

$$4\times 2=8 \text{ 通り}$$

$(m, M)=(2, 5), (3, 6)$ も同様に 8 通りずつあるので

$$P(A\cap B)=\frac{8\times 3}{6^3}=\frac{1}{9}$$

よって

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{12}{53}$$ 答

確認問題4
A，B，Cの 3 つのさいころを同時に振り，出た目の最小値が 2 であったときの最大値が 4 である条件付き確率はいくらか。

解説

A ：出た目の最小値が 2 であるという事象

B ：出た目の最大値が 4 であるという事象とする

出た目の最小値を X とすると，

$$P(A)=P(X \geqq 2)-P(X \geqq 3)$$

$$=\frac{5^3}{6^3}-\frac{4^3}{6^3}=\frac{61}{216}$$

$$P(A \cap B)=\frac{3^3-2\cdot(2^3-2)-3}{6^3}=\frac{12}{216}$$

よって，

$$P_A(B)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{12}{61}$$ 答

確認問題5

n を 3 以上の整数とする．袋の中に n 枚のカードがあり，1 枚は両面とも赤，1 枚は両面とも白，他の $(n-2)$ 枚は片面が赤で片面が白のカードである．この袋から 2 枚のカードを同時に抜き出し，無作為にテーブルに並べる．このとき，2 枚のカードの上の面がともに赤であるという事象を A, 下の面がともに白であるという事象を B, 下の面が赤白 1 枚ずつであるという事象を C とする．

(1)　事象 A の起こる確率 $P(\mathrm{A})$ を求めよ．

(2)　事象 A が起こったとき，事象 B の起こる確率 $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ を求めよ．

(3)　事象 A が起こったとき，事象 C の起こる確率を $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ とする．
$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ と $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$ の大小を比較せよ．

(解説)

(1) 同じ種類のカードも面もすべて区別して考えて，
2 枚のカードの上の面がとも赤となるのは，
両面とも赤であるカードを含む場合と含まない場合があるから，

$$P(\mathrm{A})=\frac{2\cdot(n-2)+{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2\cdot 2}=\frac{(n-2)(n+1)}{4n(n-1)}$$ 答

(2) $$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2\cdot 2}=\frac{(n-2)(n-3)}{4n(n-1)}$$

よって，

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\frac{n-3}{n+1}$$ 答

(3) $$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\frac{2\cdot(n-2)}{{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2\cdot 2}=\frac{4(n-2)}{4n(n-1)}$$

よって，

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})}{P(\mathrm{A})}=\frac{4}{n+1}$$

したがって，

$3\leqq n\leqq 6$ のとき，　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})<P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$

$n=7$ のとき，　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})=P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$

$n\geqq 8$ のとき，　$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})>P_{\mathrm{A}}(\mathrm{C})$　答

確認問題6

机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1)　ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2)　ひきだし A，B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3)　ひきだし A，B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

解説

(1) メダルはすべて区別して考えて，

$$\frac{{}_3C_2(2^3-2)}{3^3}=\frac{2}{3}\quad \boxed{答}$$

(2) (ⅰ) Bが 1 種類のとき，

(A, B)=((金)銀, 金)，((金)銅, 金)，(金(銀), 銀)，((銀)銅, 銀)，

(ⅱ) Bが 2 種類のとき，

(A, B)=((金)(銀), 金銀)

よって，

$$4\times\frac{2^3-1}{3^3}\times\frac{1^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^3}\times\frac{2^2-2}{2^2}=\frac{11}{27}\quad \boxed{答}$$

(3) A ：A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っている事象

B ：ひきだしAのメダルの色が 2 種類である事象とする

$$P(A)=\frac{1^3}{3^3}\times\frac{1^2}{2^2}+\frac{{}_3C_2\cdot 1^2\cdot 2}{3^3}\times\frac{2}{2^2}+\frac{{}_3C_1\cdot 1\cdot 2^2}{3^3}\times\frac{1^2}{2^2}=\frac{25}{108}$$

$$P(A\cap B)=2\times\frac{{}_3C_1}{3^3}+\frac{{}_3C_2\cdot 2}{3^3}\times\frac{2}{2^2}=\frac{18}{108}$$

よって，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{18}{25}\quad \boxed{答}$$