1.6　軌跡

(1) 軌跡と方程式

平面上に点 C をとり，点 P が条件 CP$=r$ を満たしながら動くとき，P が描く図形は，中心が C，半径が r の円になります。

一般に，与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を，その条件を満たす点の**軌跡**といいます。

例1

xy 平面に原点 O$(0,\ 0)$ と点 A$(0,\ 2)$ をとる。$x>0$ の領域に $\angle$OBA $=60^\circ$ となるように点 B をとるとき，点 B の軌跡を xy 平面上の方程式で表すと $\boxed{}$ となる。

(解説)

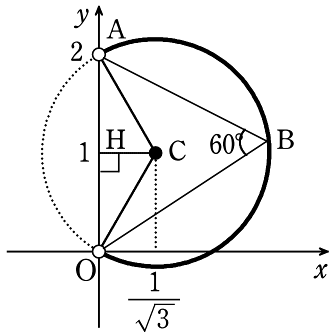
円周角の定理の逆より点 B は線分 OA を弦とする円周上にある
このとき，その円の中心を C とすると CO$=$CA であるから
△OCA は二等辺三角形である
点 C から線分 OA に垂線 CH を下ろすと
直線 CH は線分 OA の垂直二等分線より，OH$=1$
円周角の定理より

$$\angle \mathrm{OCA}=120^\circ \quad \angle \mathrm{OCH}=60^\circ$$

よって，CH$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，CO$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

したがって，B の軌跡は

中心が $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$，半径 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の円より



B の軌跡の方程式は

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(y-1)^2=\frac{4}{3},\quad x>0$$

次は，座標を用いて，与えられた条件を満たす点の軌跡を求めます。
与えられた条件を満たす点 P の軌跡が図形 F であることを示すには，次の 2 つを示します。

1. その条件を満たす任意の点 P は，図形 F 上にある。
2. 図形 F 上の任意の点 P は，その条件を満たす。

例2

xy 平面上に，2 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$ を端点とする線分 OA と点 P がある。P が OP：AP＝1：1 を満たしながら動くとき，P の描く軌跡は直線であり，その方程式は $^{ア}\boxed{}$ である。また，P が OP：AP＝1：2 を満たしながら動くとき，P の描く軌跡は円であり，その方程式は $^{イ}\boxed{}$ である。

(解説)

P$(x,\ y)$ とする。

(ア) OP＝AP であるから $OP^2=AP^2$ より

$$x^2+y^2=(x-3)^2+y^2$$

$$\therefore\ ^{ア}x=\frac{3}{2}$$

(イ) 2OP＝AP であるから $4OP^2=AP^2$ より

$$4(x^2+y^2)=(x-3)^2+y^2$$

$$x^2+2x-3+y^2=0$$

$$\therefore\ ^{イ}(x+1)^2+y^2=4$$

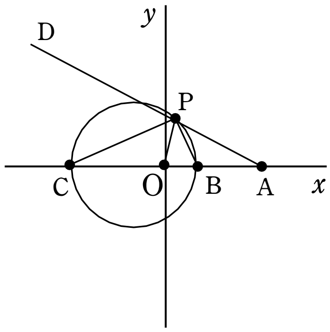
別解

(ア) OP＝AP となる点 P の集合は

線分 OA の垂直二等分線より，$x=\dfrac{3}{2}$

(イ) 図のように，OA を 1:2 に内分する点を B，1:2 に外分する点を C とすると

B$(1, 0)$, C$(-3, 0)$



図の △OAP と PB において

PO：PA＝OB：BA であるから

角の二等分線の定理の逆より

PB は ∠OPA の二等分線である

同様に外角の二等分線の定理の逆より

PC は ∠OPD の二等分線である

よって，∠BPC＝90° であるから，P は BC を直径とする円周を描く

したがって，求める円の方程式は

$$(x+1)^2+y^2=4$$

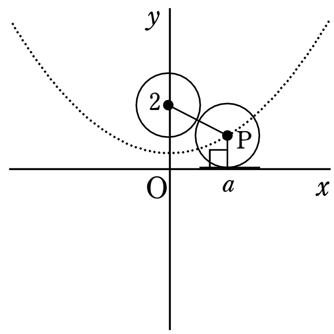
参考

m, n を正の数として，一般に 2 点 A, B からの距離の比が $m:n$ である点の軌跡は， $m \fallingdotseq n$ ならば，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になり，この円を**アポロニウスの円**といいます。
$m=n$ ならば，軌跡は，直線 AB の垂直二等分線になります。

例3
座標平面上で点 (0，2) を中心とする半径 1 の円を C とする。C に外接し x 軸に接する円の中心 P$(a，b)$ が描く図形の方程式を求めよ。

解説

C に外接し，x 軸に接する円の半径は b である
2 つの円が外接するから



$$\sqrt{a^2+(b-2)^2}=b+1$$

$$a^2+(b-2)^2=(b+1)^2$$

$$b=\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}$$

よって， P が描く図形の方程式は

$$y=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}$$

(2) **媒介変数表示と軌跡**

点 P の座標 x, y が実数 t によって

$x=t$ …①, $y=t^2$ …②

で表されるとき， t を $-2, -1, 0, 1, 2$ とすると，P の座標は

$(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

となる。これらの点を座標平面上にとることによって，点 P の軌跡を描くことができます。
①，②より t を消去すると， $y=x^2$ となり，これが P の軌跡である。

一般に，平面上の曲線 C が 1 つの変数 t によって

$x=f(t), y=g(t)$

の形で表されたとき，これを曲線 C の**媒介変数表示**または**パラメータ表示**といいます。また，変数 t を**媒介変数**または**パラメータ**といいます。

例4

(1) 点 $(1, 0)$ をA，点 $(1, 1)$ を Bとする．放物線 $y=x^2+px+2$ が線分 AB と共有点をもつとき，放物線の頂点 (X, Y) はどのような図形を描くか．

(2) 方程式 $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$ が円を表すとき，定数 k の値の範囲を求めよ．また，k の値がこの範囲で変化するとき，この円の中心の軌跡を求めよ．

(解説)

(1) $f(x)=x^2+px+2$ とおく

線分 ABは x 軸に垂直であるから，$y=f(x)$ が線分 ABと交わる条件は

$0 \leqq f(1) \leqq 1$

$0 \leqq 1+p+2 \leqq 1 \quad \therefore -3 \leqq p \leqq -2$ …①

$y=x^2+px+2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+2$ より

$X=-\frac{p}{2}$ …②, $Y=-\frac{p^2}{4}+2$ …③

②より，$p=-2X$ …④

③より，$Y=-X^2+2$

①，④より，$1 \leqq X \leqq \frac{3}{2}$

以上より，求める軌跡は

放物線の一部 $y=-x^2+2 \left(1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$

注 最後に X を x に Y を y に書き直していますが，$Y=-X^2+2$ は点 (X, Y) に対して成り立つ関係式であり，このことから，点 (X, Y) は $y=-x^2+2$ 上にあると考えてもよいし，これらの点 (X, Y) を集めていくと $y=-x^2+2$ になると考えてもよい。

(2) $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$

$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$

これが円を表すとき

$-k^2+2k>0$

$k(k-2)<0 \quad \therefore 0<k<2$

また，この円の中心の座標は，$(2k,\ -3k+1)$

中心の座標をP (X, Y) とおくと

$X=2k$，$Y=-3k+1$

kを消去して，$Y=-\dfrac{3}{2}X+1$

$0<k<2$ より，$0<x<4$

よって，求める軌跡は，直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1$ の $0<x<4$ の部分

例5

放物線 C：$y=x^2$ と直線 l：$y=m(x-1)$ は相異なる 2 点 A, B で交わっている．

(1) 定数 m の値の範囲を求めよ．

(2) m の値が変化するとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ．

解説

(1) $y=x^2$, $y=m(x-1)$ が異なる 2 点で交わるとき

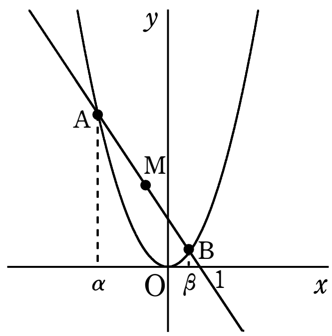
$x^2-mx+m=0$ …①

が異なる 2 実解をもてばよいから，判別式を D とすると $D>0$

$D=m^2-4m>0$ $\therefore m<0,\ 4<m$

(2) A, B の x 座標を α, β とすると，α, β は①の 2 解であるから

解と係数の関係より



$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=m$

線分 AB の中点を M (X, Y) とおくと

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m}{2}$ …②

$Y=m(X-1)=m\left(\dfrac{m}{2}-1\right)$ …③

②より，$m=2X$

③より，$Y=2X(X-1)$ $\therefore Y=2X^2-2X$

$m<0,\ 4<m$ より，$X<0,\ 2<X$

よって，線分 AB の中点の軌跡は，

放物線の一部 $y=2x^2-2x$ $(x<0,\ 2<x)$

例6

円 C：$x^2+y^2=1$ と直線 l：$y=m(x+2)$ を考える．

(1)　円 C と直線 l の共有点の個数が m の値によってどのように変わるか調べよ．

(2)　円 C と直線 l が異なる 2 点 P, Q で交わるとき，線分 PQ の中点 M の座標を m を用いて表せ．

(3)　(2) の条件のもとで m の値が変化するとき，点 M の軌跡を求め xy 平面上に図示せよ．

(解説)

(1) 共有点は

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}<1 \qquad |2m|<\sqrt{m^2+1} \qquad 4m^2<m^2+1$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}<m<\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき 2 個}$$

$$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき 1 個，} \quad m<-\frac{\sqrt{3}}{3},\ m>\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき 0 個}$$

(2) P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とする

円 C と直線 l の共有点の x 座標は

$$x^2+m^2(x+2)^2=1$$

$$(m^2+1)x^2+4m^2x+4m^2-1=0$$

の実数解であるから，α, β はこの方程式の実数解である

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{4m^2}{m^2+1},\ \alpha\beta=\frac{4m^2-1}{m^2+1}$$

M $(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{4m^2}{m^2+1}\right)=-\frac{2m^2}{m^2+1}$$

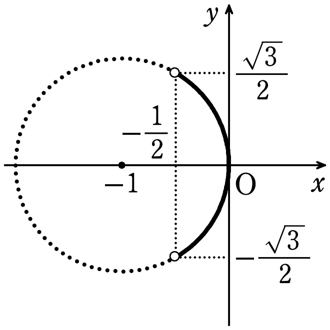
$$Y=m(X+2)=m\left(-\frac{2m^2}{m^2+1}+2\right)=\frac{2m}{m^2+1}$$

よって

$$\mathrm{M}\left(-\frac{2m^2}{m^2+1},\ \frac{2m}{m^2+1}\right)$$

(3) (2)より， $X=-mY$

$Y=m(X+2)$, $X\neq-2$ から $m=\dfrac{Y}{X+2}$ より



$$X=-\frac{Y}{X+2}\cdot Y \quad \therefore (X+1)^2+Y^2=1$$

$X=-\dfrac{2m^2}{m^2+1}=-2+\dfrac{2}{m^2+1}$ において

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より， $-\dfrac{1}{2}<X\leqq 0$

よって，求める軌跡は

円の一部 $(x+1)^2+y^2=1 \left(-\dfrac{1}{2}<x\leqq 0\right)$ で右図

注

$X=-\dfrac{2m^2}{m^2+1}$ より

$(m^2+1)X=-2m^2$

$(X+2)m^2=-X$

$X=-2$ のとき，等号は成り立たないので $X\neq-2$

(3) いろいろな軌跡

例7
定数 k がいろいろな値をとるとき，2 直線 $(x-1)+ky=0$, $k(x+1)-y=0$ の交点の軌跡の方程式は $\boxed{}$ である．

解説

交点を P(X, Y) とするとき，P は 2 直線上の点であるから

$(X-1)+kY=0$ …①， $k(X+1)-Y=0$ …②

①において

$Y=0$ のとき， $X=1$ …③

このとき，②も満たす ($k=0$)

$Y\neq 0$ のとき， $k=-\dfrac{X-1}{Y}$

②に代入して

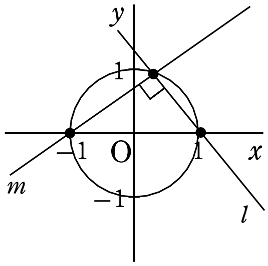
$$-\frac{X-1}{Y}(X+1)-Y=0$$

$$X^2+Y^2=1 \cdots ④$$

③，④より，点 P の軌跡の方程式は

$x^2+y^2=1$，ただし，点 $(-1, 0)$ を除く

別解



$l:(x-1)+ky=0$, $m:k(x+1)-y=0$ とおく

l は A$(1, 0)$ を通り， m は B$(-1, 0)$ を通る

また，$1 \cdot k+k(-1)=0$ であるから

l と m は直交する

l と m との交点を P(X, Y) とすると，

P は線分 AB を直径とする円 $x^2+y^2=1$ の周上にある

ただし， l は $y=0, x \fallingdotseq 1$， m は $x=1, y \fallingdotseq 0$ は表せないので，

P は $x^2+y^2=1$ において， $(-1, 0)$ は通らない

よって，求める軌跡の方程式は

$x^2+y^2=1$，ただし，点 $(-1, 0)$ を除く

別解

x, y の連立方程式 $(x-1)+ky=0, k(x+1)-y=0$ を解くと

$$(x, y)=\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}, \frac{2k}{1+k^2}\right)$$

$k=1$ のとき， $(x, y)=(0, 1)$

$k=-1$ のとき， $(x, y)=(0, -1)$

$k \fallingdotseq \pm 1$ のとき

$$\frac{y}{x}=\frac{2k}{1-k^2} \cdots ①$$

$(x-1)+ky=0$ から，

$$ky=1-x$$

$y=0$ のとき $x=1$

$y \fallingdotseq 0$ のとき

$$k=\frac{1-x}{y}$$

①に代入して

$$\frac{y}{x}=\frac{2\cdot\dfrac{1-x}{y}}{1-\left(\dfrac{1-x}{y}\right)^2}\qquad \frac{y}{x}=\frac{2y(1-x)}{y^2-(1-x^2)}$$

$y^2-(1-x^2)=2x(1-x)$

$\therefore\ x^2+y^2=1$

よって，求める軌跡の方程式は

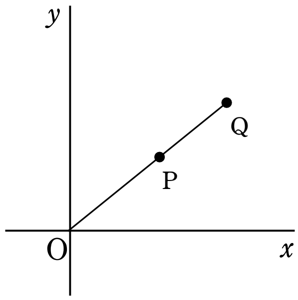
$x^2+y^2=1$，ただし，点 $(-1, 0)$ を除く

例8
座標平面上で原点 O から出る半直線の上に 2 点 P, Q があり $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=2$ を満たしている.
(1)　点 P, Q の座標をそれぞれ $(x, y), (X, Y)$ とするとき，x, y を X, Y で表せ.
(2)　点 P が直線 $x-3y+2=0$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ.

解説

(1) P (x, y), Q (X, Y) がともに原点から出る半直線上にあるから

$x=kX,\ y=kY\ (\ k>0\ )$



$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=2$ より，　$x^2+y^2, X^2+Y^2\neq 0$

$\mathrm{OP}^2\cdot\mathrm{OQ}^2=4$

$(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=4 \cdots\cdots$ ②

$k^2(X^2+Y^2)^2=4\qquad k^2=\dfrac{4}{(X^2+Y^2)^2}$

$k>0$ より，　$k=\dfrac{2}{X^2+Y^2}$

よって

$$x=\frac{2X}{X^2+Y^2},\ y=\frac{2Y}{X^2+Y^2}$$

(2) P が $x-3y+2=0$ 上を動くとき Q は

$$\frac{2X}{X^2+Y^2}-3\cdot\frac{2Y}{X^2+Y^2}+2=0$$

$X^2+Y^2+X-3Y=0$

$$\therefore\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\ ,X^2+Y^2\neq 0$$

これは逆も成り立つ．
よって，点 Q の軌跡は

中心 $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ の円から原点を除いた図形

参考
本問のように，平面上の点 P を点 Q に対応させる規則を**変換**といいます。その中でも，本問のような変換を**反転**といいます。

例9
実数 x，y が $x^2+y^2=1$ という関係を満たしながら動くとき，
点 $\mathrm{P}(x+y,\ xy)$ の軌跡を求め，図示せよ．

解説
$\mathrm{P}(X, Y)$ とおくと

$$X=x+y, Y=xy$$

x, y は 2 次方程式 $t^2-Xt+Y=0$ …①の 2 つの解であり，
x，y は実数であるから，①の判別式を D とすると $D\geqq 0$ より

$$D=X^2-4Y\geqq 0 \quad \cdots②$$

$x^2+y^2=1$ より

$$(x+y)^2-2xy=1$$

$$X^2-2Y=1$$

$$\therefore Y=\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2} \quad \cdots③$$

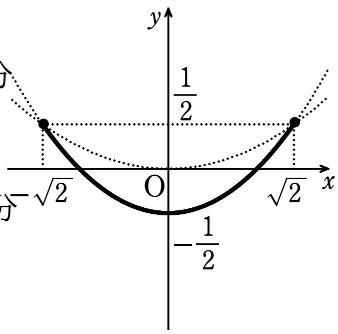
②，③ より，求める軌跡は

放物線 $v=\dfrac{1}{2}u^2-\dfrac{1}{2}$ の $-\sqrt{2}\leqq u\leqq\sqrt{2}$ の部分

すなわち，

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ の $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の部分

で，右の図のようになる



確認問題1
Cを原点Oと異なる平面上の定点とする．CとOからの距離の比が一定であるような点Pの軌跡は，円または直線であることを証明せよ．

(解説)

$P(x,\ y)$，$C(c,\ d)\ (C \fallingdotseq O)$，

$OP : CP = m : 1\ (m \fallingdotseq 0)$とする

$mCP = OP$から$m^2CP^2 = OP^2$より

$$m^2\{(x-c)^2+(y-d)^2\} = x^2+y^2$$

$$(m^2-1)x^2+(m^2-1)y^2-2cm^2x-2dm^2y+m^2(c^2+d^2)=0$$

$m^2=1$のとき，$2cx+2dy-c^2-d^2=0$

$C \fallingdotseq O$より，これは直線を表す

$m^2 \fallingdotseq 1$のとき

$$x^2+y^2-\frac{2cm^2}{m^2-1}x-\frac{2dm^2}{m^2-1}y+\frac{(c^2+d^2)m^2}{m^2-1}=0$$

$$\left(x-\frac{cm^2}{m^2-1}\right)^2+\left(y-\frac{dm^2}{m^2-1}\right)^2=\frac{(c^2+d^2)m^2}{(m^2-1)^2}$$

$\dfrac{(c^2+d^2)m^2}{(m^2-1)^2}>0$より，これは円を表す

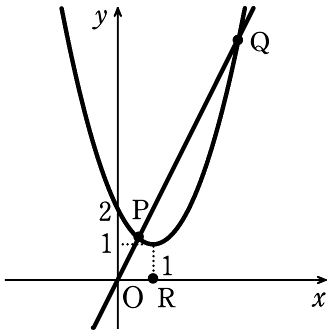
よって，点Pの軌跡は円または直線である

確認問題2

直線 $y=ax$ が放物線 $y=x^2-2x+2$ に異なる 2 点 P，Q で交わるとき，点 P，Q と点 R$(1,\ 0)$ のつくる三角形の重心を G とする．a を動かしたときの点 G の軌跡を求めよ．

(解説)

$y=x^2-2x+2$ と $y=ax$ が異なる 2 点で交わるとき



$x^2-2x+2=ax$

$x^2-(a+2)x+2=0$

判別式を D とすると，$D>0$ より

$D=(a+2)^2-8>0$

$(a+2)^2>8$

$\therefore\ a<-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}<a$ …①

また，この 2 実解をα，βとすると

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=a+2$

このとき，P$(\alpha,\ a\alpha)$，Q$(\beta,\ a\beta)$ より

$$\mathrm{G}\left(\frac{\alpha+\beta+1}{3},\ \frac{a\alpha+a\beta}{3}\right)=\left(\frac{a+3}{3},\ \frac{a(a+2)}{3}\right)$$

G を (X, Y) とおくと，

$$X=\frac{a+3}{3},\ Y=\frac{a(a+2)}{3}$$

a を消去して

$$Y=\frac{1}{3}(3X-3)(3X-1)=3X^2-4X+1$$

①より

$3X-3<-2-2\sqrt{2},\ -2+2\sqrt{2}<3X-3$

$$\therefore\ X<\frac{1-2\sqrt{2}}{3},\ \frac{1+2\sqrt{2}}{3}<X$$

よって，G の軌跡は

放物線 $y=3x^2-4x+1$ の $x<\dfrac{1-2\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}<x$ の部分

確認問題3

直線 ℓ_1：$kx-y-1=0$ は，定数 k の値にかかわらず定点 A を通り，直線 ℓ_2：$(k-1)x-(k+1)y+k-1=0$ は，定数 k の値にかかわらず定点 B を通る。また，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点を P とする。次の問いに答えよ。ただし，$k>1$ とする。

(1)　定点 A，B の座標を求めよ。

(2)　$\tan\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(3)　k が，$k>1$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を図示せよ。

(解説)

(1) ℓ_1：$xk-(y+1)=0$

これが，任意の k について成り立つとき

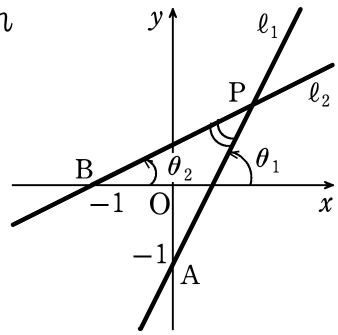
$x=0,\ -(y+1)=0\quad\therefore\ x=0,\ y=-1\quad\therefore\ \mathrm{A}\,(0,\ -1)$

ℓ_2：$(x-y+1)k-(x+y+1)=0$

これが，任意の k について成り立つとき

$x-y+1=0,\ -(x+y+1)=0\quad\therefore\ x=-1,\ y=0\quad\therefore\ \mathrm{B}\,(-1,\ 0)$

(2) ℓ_1，ℓ_2 が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると，ℓ_1，ℓ_2 の傾きはそれぞれ k，$\dfrac{k-1}{k+1}$ より



$$\tan\theta_1=k\ ,\ \tan\theta_2=\frac{k-1}{k+1}$$

$\dfrac{k-1}{k+1}=1-\dfrac{2}{k+1}$ ，$k>1$ より

$$0<\frac{k-1}{k+1}<1$$

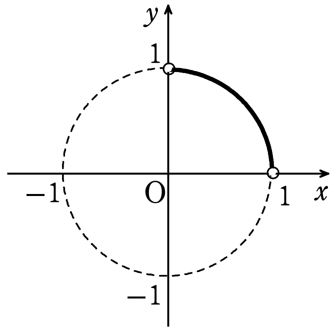
よって，$0<\dfrac{k-1}{k+1}<k$ より，$0^\circ<\theta_2<\theta_1<90^\circ$

このとき

$$\tan\angle\mathrm{APB}=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{k-\frac{k-1}{k+1}}{1+k\cdot\frac{k-1}{k+1}}=\frac{k(k+1)-(k-1)}{(k+1)+k(k-1)}=\frac{k^2+1}{1+k^2}=1$$

(3) $\tan\angle\mathrm{APB}=1$ より，$\angle\mathrm{APB}=45°$
よって，P は弧 AB の円周角の頂点で
$\angle\mathrm{AOB}=90°$ より $\angle\mathrm{AOB}$ が中心角となる
したがって，点 P の軌跡は，原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分，すなわち，右の図の実線部分である



確認問題4

xy 平面において，原点 O (0, 0) とは異なる点 P に対し，Q を半直線 OP 上にあって，$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=1$ を満たす点とする。また，$a>0$ に対し，中心 $(a,\ 0)$，半径 b の円を C とする。

(1)　C が原点を通るとする。P が C 上の原点とは異なる点全体を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　C が原点を通らないとする。P が C 上の点全体を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

解説

(1) 円 C の方程式は

$$(x-a)^2+y^2=b^2$$

C が原点を通るとき，$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ より，$a=b$ …①

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，条件より

$$\begin{cases}X=tx\\Y=ty\end{cases}\quad(\ t>0\ )$$

$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ}=1$ から，$\mathrm{OP}^2\times\mathrm{OQ}^2=1$ より

$$(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=1$$

$$t^2(X^2+Y^2)^2=1$$

$t>0$ より，$t=\dfrac{1}{X^2+Y^2}$

よって

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2},\quad y=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

点 P が C 上を動くとき

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)^2-2a\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right)+a^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2=b^2$$

$$(a^2-b^2)(X^2+Y^2)=2aX-1 \cdots ②$$

①より， $X=\dfrac{1}{2a}$

よって，点 Q の軌跡は， $\left(\dfrac{1}{2a},\ 0\right)$ を通り， y 軸に平行な直線

(2) C が原点を通らないとき， $a \fallingdotseq b$

このとき，②より

$$\left(X-\frac{a}{a^2-b^2}\right)^2+Y^2=\frac{b^2}{(a^2-b^2)^2}$$

よって，点 Q の軌跡は，中心 $\left(\dfrac{a}{a^2-b^2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{b}{|a^2-b^2|}$ の円