2.5　放物線・3次関数の性質

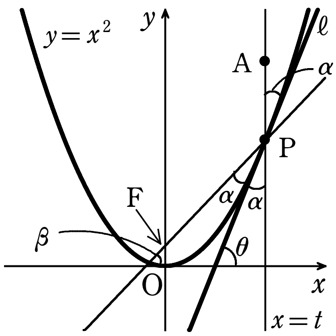
(1) 放物線の性質

例1
放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$ における接線を ℓ とする。点 $\mathrm{A}(t,\ t^2+1)$ から点 P に向かって光が発射され，接線 ℓ にあたって反射した。反射光が y 軸上の点 F に達したとする。

(1)　直線 $x=t$ と接線 ℓ とのなす角を α とし，更に $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ とする。$\tan\alpha$ を t で表せ。また，直線 FP と x 軸の正の向きとのなす角を β とするとき，$\tan\beta$ を $\tan\alpha$ で表せ。

(2)　点 F の y 座標は t によらず一定であることを示せ。

解説



(1) $f(x)=x^2$ とおくと $f'(x)=2x$
点 P における接線 ℓ の傾きは $2t$ より
接線 ℓ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると

$$\tan\theta=2t$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ より

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2t}$$

直線 FP と接線 ℓ とのなす角は直線 $x=t$ と接線 ℓ とのなす角に等しいから $\beta=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$ より

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{\tan 2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$

(2) 直線 FP は傾き $\tan\beta=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2t}\right)^2}{2\cdot\dfrac{1}{2t}}=t-\dfrac{1}{4t}$ で

点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通るから

$$y-t^2=\left(t-\frac{1}{4t}\right)(x-t)\qquad \therefore\ y=\left(t-\frac{1}{4t}\right)x+\frac{1}{4}$$

よって，点 F の y 座標は $\dfrac{1}{4}$ で t によらず一定である

参考

この点 F を放物線の**焦点**といいます。本問のように，放物線に放物線の軸と平行な平行光線を当てると必ず F を通過します。このとき，この点に光が集まり，ものを焦がすことができるので焦点といいます。
虫眼鏡で紙を焦がしたり，パラボラアンテナの原理は，この原理を応用しています。ちなみに，パラボラは英語で放物線のことです。

例2

放物線 $y=x^2$ を C とし，C 上にない点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える。
(1)　点 P から放物線 C に異なる 2 本の接線が引けるとき，a，b の満たす条件を求めよ。
(2)　(1) の 2 本の接線を l_1, l_2 とする。 l_1 と l_2 が直交するような点 P 全体のなす図形を図示せよ。
(3)　(1) の 2 本の接線 l_1, l_2 が直交しているとき l_1, l_2 が放物線 C に接する接点をそれぞれ A，B とする。△PAB の面積を a を用いて表せ。

解説

(1) $f(x)=x^2$ とおく
$f'(x)=2x$
$y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$
$$y-t^2=2t(x-t) \qquad \therefore\ y=2tx-t^2$$

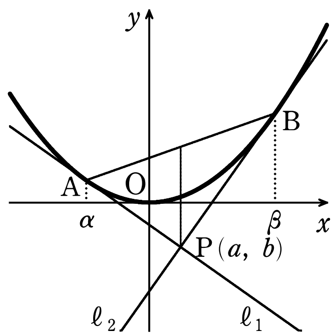
これが点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るとき

$$b=2at-t^2$$
$$t^2-2at+b=0 \cdots ①$$

点 P から放物線 C に異なる 2 本の接線が引けるとき
①が異なる 2 実解をもてばよいから
判別式を D として， $D>0$ となればよい

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-b>0 \quad \therefore\ b<a^2$$

(2) 2 本の接線 l_1, l_2 と放物線 C との接点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とする



l_1 と l_2 が直交するとき

$$2\alpha\cdot 2\beta=-1 \qquad \therefore\ \alpha\beta=-\frac{1}{4}$$

解と係数の関係から $\alpha\beta=b$ より， $b=-\dfrac{1}{4}$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 全体のなす図形は,

直線 $y=-\dfrac{1}{4}$ (図略)

(3) 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2a \qquad \therefore\ a=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

A と B の中点 Q の y 座標は

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=2a^2+\frac{1}{4}$$

また， $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ より

$$\beta-\alpha=\sqrt{4a^2+1}$$

よって，△PAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+1}\left(2a^2+\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{4}\right)^3}$$

$\boxed{\text{参考}}$

(2)で求めた直線を放物線の準線といいます。

(2) 3次関数の点対称性

例3

関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ は $x=a$ で極大値 $f(a)$ をとり， $x=b$ で極小値 $f(b)$ をとるとする。また，2 点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ を結ぶ線分の中点を M とする。

(1)　a, $f(a)$, b, $f(b)$ の値を求めよ。

(2)　線分 PQ と曲線 $y=f(x)$ は P，Q のほかに，点 M を共有することを示せ。

(3)　点 M を通る直線と曲線 $y=f(x)$ が M 以外に 2 つの共有点 R，S をもつとすると，M は線分 RS の中点であることを示せ。

(解説)

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき，　$x=-1$，2

増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=-1$ で極大　極大値 8

$x=2$ で極小　極小値 -19

よって，　$a=-1$，$f(a)=8$，$b=2$，$f(b)=-19$

(2) PQ の中点 M の座標は，$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-6+1=-\dfrac{11}{2}$ より

点 M$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$ は曲線 $y=f(x)$ 上にある

よって示された

(3) 点 R が曲線 $y=f(x)$ 上にあるものとして

線分 RS の中点が M であるときの点 S$(X,\ Y)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあることを示せばよい

R$(t,\ 2t^3-3t^2-12t+1)$ として

点 M は線分 RS の中点より

$$\frac{t+X}{2}=\frac{1}{2},\quad \frac{(2t^3-3t^2-12t+1)+Y}{2}=-\frac{11}{2}$$

$$\therefore X=-t+1,\ Y=-2t^3+3t^2+12t-12$$

ここで

$$\begin{aligned} f(X)&=f(-t+1)\\ &=2(-t+1)^3-3(-t+1)^2-12(-t+1)+1\\ &=-2t^3+3t^2+12t-12=Y \end{aligned}$$

よって，点 S$(X,\ Y)$ は曲線 $y=f(x)$ 上にある

本問により，　$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ は極大点と極小点の中点に関して対称であることが示されましたが，これが一般の 3次関数で成り立つことを示してみます。

例4

x の 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフはある点に関して対称であることを証明せよ。ここに，a，b，c，d は定数で $a\neq 0$ とする。

(解説)

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく

$y=f(x)$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したとき

$$y-q=f(x-p)$$

$$y-q=a(x-p)^3+b(x-p)^2+c(x-p)+d$$

$$\therefore\ y=ax^3+(-3ap+b)x^2+(3ap^2-2bp+c)x-ap^3+bp^2-cp+d+q$$

ここで，

$$-3ap+b=0,\ -ap^3+bp^2-cp+d+q=0$$

となるように，すなわち，

$$p=\frac{b}{3a}$$

$$q=ap^3-bp^2+cp-d=-\frac{2b^3}{27a^2}+\frac{bc}{3a}-d$$

だけ平行移動すると

$$y=ax^3+\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)x$$

$g(x)=ax^3+\left(-\dfrac{b^2}{3a}+c\right)x$ とおくと

$g(-x)=-g(x)$ であるから，$y=g(x)$ は原点に関して対称である

$y=f(x)$ は $y=g(x)$ を x 軸方向に $-p=-\dfrac{b}{3a}$，

y 軸方向に $-q=\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d$ だけ平行移動したものであるから

$y=f(x)$ は点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ \dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$ に関して対称である

参考

この対称の中心の点は変曲点です。理系の範囲の微分で学習します。

例5

a を自然数とし，関数 $f(x)=x^3+2x^2+ax+4$ は $x=x_1$ で極大，$x=x_2$ で極小になるものとする。また，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ f(x_1))$，$\mathrm{Q}(x_2,\ f(x_2))$ の中点を R とする。

(1)　$a=1$ であることを示せ。

(2)　点 P および点 Q の座標を求めよ。

(3)　点 R は曲線 $y=f(x)$ 上にあることを示せ。

(4)　点 R における曲線 $y=f(x)$ の接線は，点 R 以外に $y=f(x)$ との共有点をもたないことを示せ。

解説

(1) $f(x)=x^3+2x^2+ax+4$

$f'(x)=3x^2+4x+a$

関数 $f(x)$ は $x=x_1$ で極大値，$x=x_2$ で極小値をとるから

$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ

判別式を D とすると，$D>0$ より

$$\frac{D}{4}=4-3a>0 \quad \therefore a<\frac{4}{3}$$

a は自然数より，$a=1$

(2) $f(x)=x^3+2x^2+x+4$

$f'(x)=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=-1,\ -\dfrac{1}{3}$

増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	$\frac{104}{27}$	↗

$x=-1$ で極大　極大値 4

$x=-\dfrac{1}{3}$ で極小　極小値 $\dfrac{104}{27}$

よって，

P の座標は $(-1,\ 4)$，点 Q の座標は $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{104}{27}\right)$

(3) 点 R の座標は $\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{106}{27}\right)$

$f\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{8}{27}+\dfrac{24}{27}-\dfrac{18}{27}+\dfrac{108}{27}=\dfrac{106}{27}$ より

点 R は曲線 $y=f(x)$ 上にある

(4) $y=f(x)$ の点 R における接線は

$$y-\frac{106}{27}=f'\left(-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) \quad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{100}{27}$$

この接線と曲線 $y=f(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^3+2x^2+x+4=-\frac{1}{3}x+\frac{100}{27}$$

$$27x^3+54x^2+36x+8=0$$

$$\therefore\ (3x+2)^3=0 \quad \therefore\ x=-\frac{2}{3}\ \text{のみ}$$

よって，点 R における曲線 $y=f(x)$ の接線は点 R 以外に $y=f(x)$ との共有点をもたない

注

3次関数 $y=f(x)$ の変曲点における接線は， $y=f(x)$ とこの点以外に共有点をもちません。

例6

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．関数 $y=f(x)$ のグラフは点 $(2,\ 1)$ に関して対称であり，この関数は $x=1$ のとき極大値をとる．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．また，点 $(2,\ 1)$ におけるグラフの接線の傾きを求めよ．

解説

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f(x)$ は $(2, 1)$ を通るから

$$4a+2b+c=-7$$

$f(x)$ は $x=1$ で極大値， $x=3$ で極小値をとるから

$$f'(1)=0, f'(3)=0$$

$$2a+b=-3, 6a+b=-27$$

であることが必要で，このとき， $a=-6, b=9, c=-1$

このとき， $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ となり，

$x=1$ の前後で正から負に， $x=3$ の前後で負から正に符号が変わるので， $x=1$ で極大値， $x=3$ で極小値をとる

(3) 3次関数の極値の和

例7

係数が実数である多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2)　(1) の解を，α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ と $\alpha^3+\beta^3$ を a，b で表せ。

(3)　次の式が成立することを示せ。

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

解説

(1) $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつとき，

$f(x)$ は正の極大値と負の極小値，すなわち， $f(x)$ は極値をもつので

$f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ

(2) $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$ において，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}a,\quad \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}b$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{2}{3}ab$$

(3)
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f\left(-\frac{a}{3}\right)=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c$$

$$=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)+(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\alpha^3+\beta^3)+a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{27}a^3+\frac{2}{3}ab+\frac{4}{9}a^3-\frac{2}{3}ab-\frac{2}{3}ab+2c\right)$$

$$=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

よって，示された

(3)の結果は，3次関数の点対称性から明らかである。これを利用すると，3次関数の極値の和 $f(\alpha)+f(\beta)$ は

$$f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

と求めることができます。

例8

関数 $f(x)=x^3+3x^2+ax$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は定数である。

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極大値と極小値をとるときの x の値をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を a で表せ。

(3)　$f(x)$ が極大値と極小値の和が 0 となるとき，a の値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=x^3+3x^2+ax$

$f'(x)=3x^2+6x+a$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつとき

$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいから

判別式を D とすると，$D>0$ より

$$\frac{D}{4}=9-3a>0 \quad \therefore a<3$$

(2) α，β は $f'(x)=0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{a}{3}$$

(3) 極値の和は 3次関数の点対称性より

$$\begin{aligned} f(\alpha)+f(\beta)&=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &=2f(-1)\\ &=-2a+4 \end{aligned}$$

これが 0 となるとき，

$$-2a+4=0 \quad \therefore a=2$$

(4) 3次関数の等間隔性

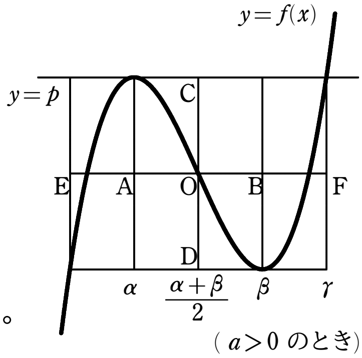
3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が極値をもつとき，点対称性が成り立つことから

$OA=OB, OC=OD$

が成り立つことは明らかですが，この他に

$OA=AE, OB=BF$

も成り立ちます。すなわち，
右図の 8 分割された長方形はすべて合同です。



（$a>0$ のとき）

OB=BF であることを示します。
これが示されれば，対称性から OA=AE も示されたことになります。
これを示すには， O が AF を1:2 に内分する点であることを示せばよい。
極値をとる x を $x=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とし，$x=\alpha$ における極値 $f(\alpha)=p$ とします。このとき，O の x 座標は対称性より $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ です。
また $y=f(x)$ と $y=p$ の $x=\alpha$ 以外の共有点の x 座標を $x=\gamma$ とします。
このとき， $\dfrac{2\alpha+\gamma}{3}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が示せばよい。

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f'(x)=0$ の 2 解が α, β であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a} \cdots①$$

また， $ax^3+bx^2+cx+d=p$ ，すなわち， $ax^3+bx^2+cx+d-p=0$ の解が，α (重解), γ であるから，解と係数の関係より

$$2\alpha+\gamma=-\frac{b}{a} \cdots② \quad (\alpha+\alpha+\gamma=2\alpha+\gamma)$$

①，②より

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(2\alpha+\gamma) \qquad \therefore \frac{2\alpha+\gamma}{3}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

確認問題1

$f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ とする．

(1)　曲線 C：$y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ $(\alpha \fallingdotseq \beta)$ における曲線 C の接線が平行であるとき，線分 PQ の中点 M は α，β によらない定点であることを示せ.

(2)　点 M は曲線 C 上の点であることを示せ.

(3)　点 M における C の接線を $y=sx+t$ とするとき，$f(x)-(sx+t)=(x+a)^3$ を示せ.

解説

(1) $f'(x)=3x^2+6ax+b$

$f'(\alpha)=f'(\beta)$ より

$$3\alpha^2+6a\alpha+b=3\beta^2+6a\beta+b$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2a)=0$$

$\alpha \fallingdotseq \beta$ より

$$\alpha+\beta+2a=0 \qquad \therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=-a$$

また

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{1}{2}(\alpha^3+3a\alpha^2+b\alpha+c+\beta^3+3a\beta^2+b\beta+c)$$

$$=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3a(\alpha+\beta)^2-6a\alpha\beta+b(\alpha+\beta)+2c\}$$

$$=\frac{1}{2}(-8a^3+6a\alpha\beta+12a^3-6a\alpha\beta-2ab+2c)$$

$$=2a^3-ab+c$$

よって，M は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right)=(-a,\ 2a^3-ab+c)$$

これは，α，β によらない定点である

(2) $f(-a)=(-a)^3+3a(-a)^2+b(-a)+c$

$$=-a^3+3a^3-ab+c=2a^3-ab+c$$

よって，M は曲線 C 上の点である

(3) 点 M における C の接線の方程式は

$$y-f(-a)=f'(-a)(x+a)$$

$$y-(2a^3-ab+c)=(-3a^2+b)(x+a)$$

$$\therefore y=(-3a^2+b)x-a^3+c$$

このとき

$$f(x)-(sx+t)=x^3+3ax^2+bx+c+(3a^2-b)x+a^3-c$$

$$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=(x+a)^3$$

確認問題2

関数 $y=x^3-3ax^2+3bx$ の極大値と極小値の和および差はそれぞれ $-18, 32$ であるという． a, b の値を求めよ．

(解説)

$f(x)=x^3-3ax^2+3bx$ とおく

$f'(x)=3x^2-6ax+3b$

$f'(x)=0$ となるとき

$$3x^2-6ax+3b=0$$

$f(x)$ が極値をもつとき，これが，異なる 2 実解をもてばよいから

判別式を D として， $D>0$ より

$$\frac{D}{4}=9a^2-9b>0$$

このときの 2 つの実数解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

解と係数の関係より， $\alpha+\beta=2a, \alpha\beta=b$

$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大， $x=\beta$ で極小となる

3次関数の対称性と極値の和が -18 より

$$f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2f(a)=-4a^3+6ab=-18$$

$$\therefore\ 2a^3-3ab-9=0 \cdots ①$$

極値の差が 32 より

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=-\int_\alpha^\beta(3x^2-6ax+3b)dx$$

$$=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=32$$

$$\therefore\ \beta-\alpha=4 \quad \therefore\ 2\sqrt{a^2-b}=4 \quad \therefore\ a^2-b=4 \cdots ②$$

①，②より

$$a^3-12a+9=0$$

$$(a-3)(a^2+3a-3)=0 \quad \therefore\ a=3, \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$$

$$(a, b)=(3, 5), \left(\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}, \frac{4\mp3\sqrt{21}}{2}\right)(\text{複号同順})$$

別解

極値の差は対称式を利用して求めてもよい。