1.8　領域と最大・最小

(1) 領域と最大・最小

いくつかの変数の連立1次不等式の条件の下で，これらの変数に関する1次式の最大値または最小値を求める問題を**線形計画法**といいます。ここでは，2変数 x, y の場合について，1次式，さらには2次式の最大値または最小値についても考えます。

例1

連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 10$，$2x+y \leqq 14$ …… (*) を考える。

x，y が (*) を満たすとき，$x+3y$ がとりうる値の範囲は

ア $\boxed{} \leqq x+3y \leqq$ イ $\boxed{}$ である。

x，y が (*) を満たすとき，$2x+3y$ の最大値は ウ $\boxed{}$ である。

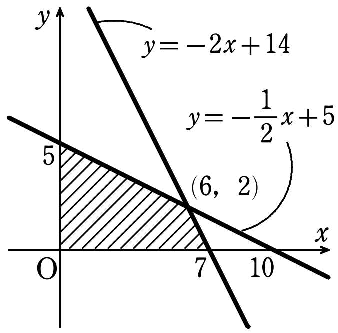
(解説)

$x+2y=10$ より，　$y=-\dfrac{1}{2}x+5$

$2x+y=14$ より，　$y=-2x+14$

連立不等式 (*) の表す領域を D とすると，

D は，4 点 O，$(7,\ 0)$，$(6,\ 2)$，$(0,\ 5)$ を頂点とする四角形の周および内部である



$x+3y=k$ …①とおくと，　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$

これは傾き $-\dfrac{1}{3}$，y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の直線を表す

この直線①が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲を考えればよい

直線の傾きについて，$-2<-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{3}$ より

直線①が点 $(0,\ 5)$ を通るとき k は最大となり，

点 $(0,\ 0)$ を通るとき k は最小となる

よって

$$0+3\cdot 0 \leqq x+3y \leqq 0+3\cdot 5$$

$$\therefore\ {}^{ア}0 \leqq x+3y \leqq {}^{イ}15$$

$2x+3y=s$ …②とおくと, $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{s}{3}$

これは傾き $-\dfrac{2}{3}$, y 切片 $\dfrac{s}{3}$ の直線を表す

この直線②が領域 D と共有点をもつような

s の値の最大値について考えればよい

直線の傾きについて, $-2<-\dfrac{2}{3}<-\dfrac{1}{2}$ より

直線②が点 $(6,\ 2)$ を通るとき s の値は最大となる

このとき

最大値 $2\cdot6+3\cdot2=$ ウ18

注

このように最大値, 最小値を求める方法を**逆像法**といいます。

一般に, 条件を満たす $(x,\ y)$ から $f(x,\ y)$ の値のとり得る範囲を求めるのが今までの手続きであるが(これを**順像法**といいます), 逆像法では, $f(x,\ y)$ の値から, その値を満たすような $(x,\ y)$ が存在するかを考え, そのような $(x,\ y)$ が存在すれば, その $f(x,\ y)$ の値をとり得ると考えて, $f(x,\ y)$ のとり得る値の範囲を考えます。すなわち, $(x,\ y)$ から $f(x,\ y)$ の範囲を求めるのが順像法で, $f(x,\ y)$ の値からそれに対応する $(x,\ y)$ の値が存在するかを考えて, $f(x,\ y)$ の範囲を求めるのが逆像法です。本問のような問題では, 逆像法を利用して解くのが一般的です。

後半の問題を順像法で解いてみます。

別解

領域 D より, $x=k$ のとき

(ⅰ) $0\leqq k\leqq6$ のとき

$x=k,\ 0\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}k+5$ より

$$2k\leqq2x+3y\leqq2k+3\left(-\frac{1}{2}k+5\right)=\frac{k}{2}+15$$

(ⅱ) $6\leqq k\leqq7$ のとき

$x=k,\ 0\leqq y\leqq-2k+14$ より

$$2k\leqq2x+3y\leqq2k+3(-2k+14)=-4k+42$$

(ⅰ), (ⅱ)より, $k=6$ のとき最大で

最大値 $18\ ((x,\ y)=(6,2))$

例2

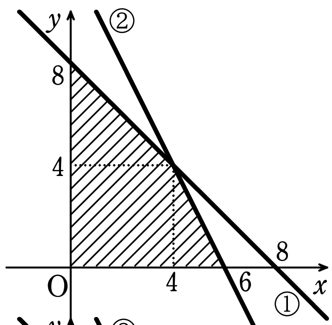
座標平面において，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$y \leqq -x+8$，$y \leqq -2x+12$ の表す領域を D とし，a を正の定数とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+y$ の最大値を M とする。

(1)　2 直線 $y=-x+8$ と $y=-2x+12$ の交点を求め，領域 D を図示せよ。

(2)　$0<a<1$ のとき，M の値を求めよ。

(3)　$1 \leqq a$ のとき，a を用いて M を表せ。

解説



(1) $y=-x+8$ …①，　$y=-2x+12$ …②とする

2 直線①，②の交点は，点 $(4,\ 4)$

与えられた連立不等式の表す領域 D は，

右図の斜線部分。ただし境界線を含む

(2) $ax+y=k$ …③とおくと，　$y=-ax+k$

これは傾き $-a$，y 切片 k の直線を表す

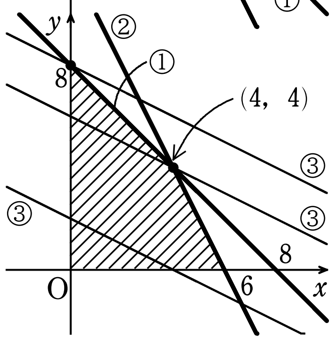
$0<a<1$ のとき

境界線①と直線③の傾きについて，

$-1<-a<0$ であるから，

直線③が点 $(0,\ 8)$ を通るとき k は最大

このとき，　$M=8$



(3) (ⅰ) $1 \leqq a<2$ のとき

境界線①，②と直線③の傾きについて，

$-2<-a \leqq -1$ であるから，

直線③が点 $(4,\ 4)$ を通るとき k は最大

このとき，　$M=4a+4$

(ⅱ) $a \geqq 2$ のとき

境界線②と直線③の傾きについて，

$-a \leqq -2$ であるから，

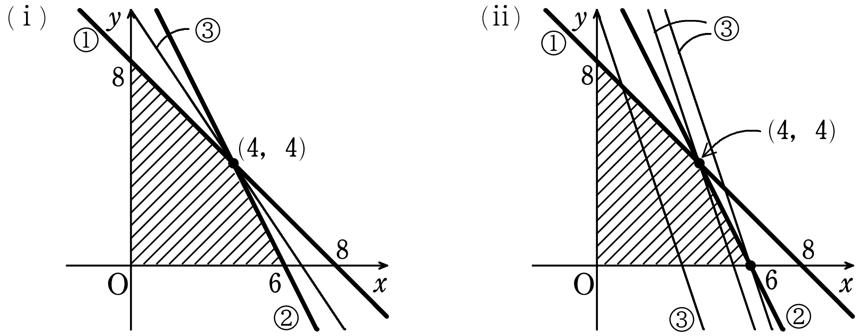
直線③が点 $(6,\ 0)$ を通るとき k は最大

このとき，　$M=6a$

(ⅰ)，(ⅱ)より

　$1 \leqq a<2$ のとき $M=4a+4$

　$a \geqq 2$ のとき $M=6a$



例3

連立不等式 $x+2y-8\leqq 0$，$2x-y+4\geqq 0$，$3x-4y+6\leqq 0$ を満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。

(1)　領域 D を図示せよ。

(2)　領域 D における $x+y$ の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

(3)　領域 D における x^2+y の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

解説

(1) $x+2y-8=0$ …①，$2x-y+4=0$ …②，

$3x-4y+6=0$ …③ とする

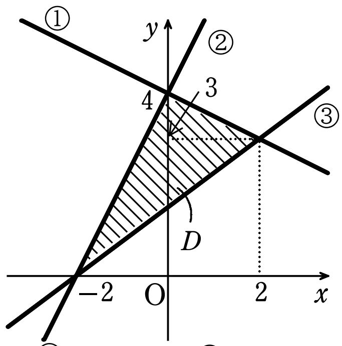
①，②の交点は $(0,\ 4)$

②，③の交点は $(-2,\ 0)$

③，①の交点は $(2,\ 3)$

①は $y\leqq -\dfrac{1}{2}x+4$，②は $y\leqq 2x+4$，

③は $y\geqq \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}$



求める領域は図の斜線部

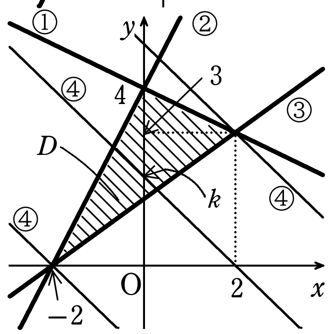
ただし，境界線を含む

(2) $x+y=k$ …④とおくと，$y=-x+k$

④は傾き -1，y 切片 k の直線を表す

この直線が D と共有点をもつような

k の値の最大値と最小値を求めればよい

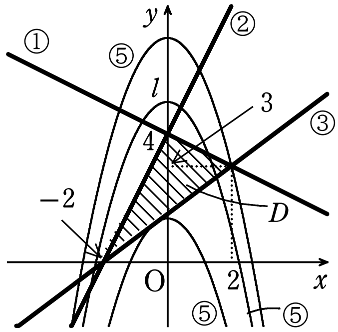


境界線①の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ で，$-1<-\dfrac{1}{2}$ より

直線④が点 (2, 3) を通るとき，k の値は最大，
点 $(-2,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる
よって，$x+y$ は

$x=2$，$y=3$ のとき，最大値 $2+3=5$

$x=-2$，$y=0$ のとき，最小値 $-2+0=-2$



(3) $x^2+y=l$ …⑤とおくと，$y=-x^2+l$
⑤は，上に凸で，頂点 $(0,\ l)$ の放物線を表す
この放物線が D と共有点をもつような
l の値の最大値と最小値を求めればよい
図より，放物線⑤が点 (2, 3) を通るとき，
l の値は最大となる
このとき，最大値 7
また，放物線⑤が直線③と接するとき，
l の値は最小となる
このとき

$$3x-4(l-x^2)+6=0$$

$$4x^2+3x+6-4l=0$$

が重解をもてばよいから，判別式を D として

$$D=3^2-4\cdot4(6-4l)=64l-87=0 \qquad \therefore\ l=\frac{87}{64}$$

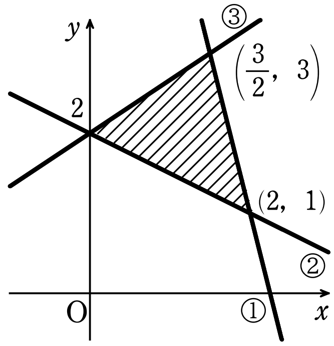
このときの重解は，$x=-\dfrac{3}{2\cdot4}=-\dfrac{3}{8}$　　$\therefore\ y=\dfrac{3}{4}(x+2)=\dfrac{39}{32}$

最小値 $\dfrac{87}{64}$

例4

座標平面上の点 P$(x,\ y)$ が $4x+y \leqq 9$，$x+2y \geqq 4$，$2x-3y \geqq -6$ の範囲を動くとき，$2x+y$，x^2+y^2 のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。

解説



$4x+y=9$ …①，　$x+2y=4$ …②，

$2x-3y=-6$ …③とおく

①，②の交点は，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

②，③の交点は，$(x,\ y)=(0,\ 2)$

③，①の交点は，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$

よって，$(x,\ y)$ の存在範囲は右図の斜線部分

ただし，境界線を含む

この領域を D とする

$2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ …④

これは傾きが -2，y 切片が k の直線を表す

直線④が，D と共有点をもつような

k の最大値と最小値を求めればよい

直線④が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ を通るとき k は最大で，最大値 $2\times\dfrac{3}{2}+3=6$

また，点 $(0,\ 2)$ を通るとき k は最小で，最小値 2

$x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ …⑤ とおくと，

これは中心 O$(0, 0)$，半径 r の円を表す

r が最大となるのは，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ のときで，

　最大値 $r^2=\dfrac{9}{4}+9=\dfrac{45}{4}$

また，r が最小となるのは⑤と直線②が接するときで

　最小値 $r^2=\left(\dfrac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2=\dfrac{16}{5}$

このときの座標は，②と原点を通り②に垂直な直線 $2x-y=0$ との交点より

　$(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$

$\boxed{注}$ $r=0$ となるような場合 $x^2+y^2=r^2$ は円とはならないので，x^2+y^2 は原点との距離の 2 乗を表すなどと言い回しに注意が必要である。

例5

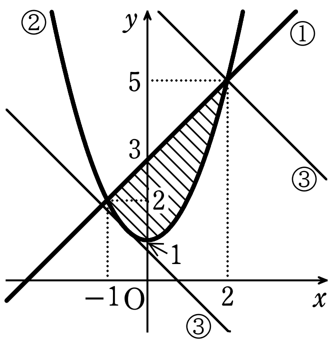
xy 平面において，連立不等式 $y \leqq x+3$，$y \geqq x^2+1$ が表す領域を D とする。

(1)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，最小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$y+x^2-3x$ の最小値は ${}^{ウ}\boxed{}$ であり，そのときの点 $(x,\ y)$ の座標は ${}^{エ}\boxed{}$ である。ただし，${}^{エ}\boxed{}$ は $(x,\ y)$ の形で答えよ。

(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$\dfrac{y}{x-3}$ の最大値は ${}^{オ}\boxed{}$ である。

解説



$y=x+3$ …①，$y=x^2+1$ …② とする

①，②の交点は

$x+3=x^2+1$

$x^2-x-2=0$　$\therefore\ x=-1,\ 2$

よって

$(-1,\ 2)$，$(2,\ 5)$

したがって，連立不等式 $y \leqq x+3$，$y \geqq x^2+1$ の表す領域 D は右の図の斜線部

ただし，境界線を含む

(1) $x+y=k$ …③ とおくと，$y=-x+k$

これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す

直線 ③ が点 $(2,\ 5)$ を通るとき k の値は最大

最大値 $k=2+5={}^{ア}7$

また，直線③が放物線②と接するとき k の値は最小

このとき

$x^2+x+1-k=0$

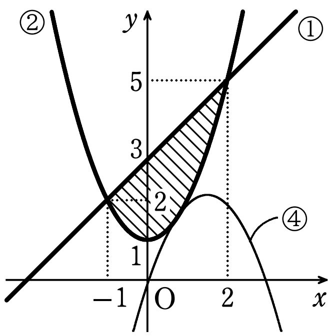
が重解をもてばよいから判別式を D' とすると

$D'=1^2-4(1-k)=4k-3=0$　$\therefore\ k={}^{イ}\dfrac{3}{4}$　最小値 $\dfrac{3}{4}$

(2) $y+x^2-3x=k$ …④とおくと，

$$y=-x^2+3x+k=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+k$$

これは軸が直線 $x=\dfrac{3}{2}$ で，上に凸の放物線



放物線②と放物線④が接するとき，k の値は最小

このとき

$$2x^2-3x+1-k=0$$

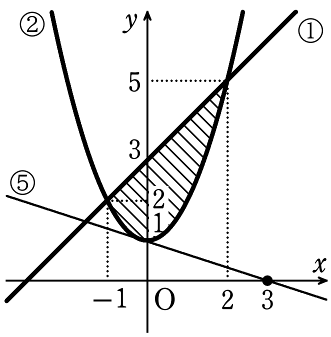
が重解をもてばよいから，判別式を D' とすると

$$D'=(-3)^2-4\cdot2(1-k)=8k+1=0 \quad \therefore\ k={}^{ウ}-\frac{1}{8} \quad 最小値\ -\frac{1}{8}$$

このとき，重解は $x=-\dfrac{-3}{2\cdot2}=\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore\ y=\dfrac{25}{16}$

よって，求める点の座標は ${}^{エ}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{25}{16}\right)$

(3) $\dfrac{y}{x-3}=k$ とおくと， $y=k(x-3)$ …⑤



これは傾きが k，点 $(3,\ 0)$ を通る直線を表す

直線⑥が放物線②と接するとき，k は最大

このとき

$$x^2-kx+3k+1=0$$

が重解をもてばといから，判別式を D' とすると

$$D'=(-k)^2-4(3k+1)=k^2-12k-4=0 \quad \therefore\ k=6\pm2\sqrt{10}$$

このとき，重解は $x=\dfrac{k}{2}$ で，これが $-1\leqq x\leqq5$ の範囲にあるのは，

$$k=6-2\sqrt{10}$$

よって，求める最大値は ${}^{オ}6-2\sqrt{10}$

例6

点 $(x,\ y)$ が，不等式 $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqq 1$ の表す領域上を動くとする．

(1)　$2x-1$ の最大値を求めよ．

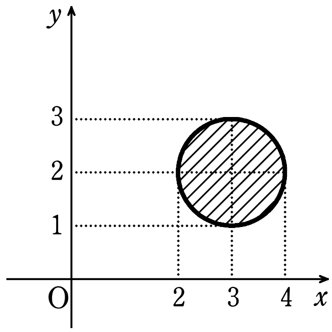
(2)　x^2+y^2 の最大値を求めよ．

(3)　$\dfrac{y}{x}$ の最大値を求めよ．

(4)　$10x+10y$ の最大の整数値を求めよ．

(解説)

不等式の表す領域は右図の斜線部
ただし，境界線を含む
この領域を D とする



(1) 図から $2 \leqq x \leqq 4$ より
　$2x-1$ の最大値は 7

(2) $x^2+y^2=r^2$ …①とおくと，
①は中心 O，半径 r の円を表す
r が最大になるのは
D が①に内接するときで，このとき

$$r-1=\sqrt{13}$$

このとき

$$r=\sqrt{13}+1$$

最大値 $r^2=(\sqrt{13}+1)^2=14+2\sqrt{13}$

(3) $\dfrac{y}{x}=k$ とおくと，　$y=kx$ …②
②は原点を通り，傾きが k の直線を表す
②と $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ とが接するときの k の値のうち，大きい方が最大値となる
このとき

$$\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

$$8k^2-12k+3=0 \quad \therefore k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

よって，最大値は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

(4) $10x+10y=l$ …③とおくと

③が D と共有点をもつとき

$$\frac{|30+20-l|}{\sqrt{10^2+10^2}}\leqq 1$$

$$|l-50|\leqq\sqrt{200}$$

$$50-\sqrt{200}\leqq l\leqq 50+\sqrt{200}$$

$\sqrt{200}=10\sqrt{2}=14.14\cdots$ より

求める最大の整数値は $50+14=64$

例7

次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases}x^2+y^2-1\leqq 0\\ x+2y-2\leqq 0\end{cases}$$

(1)　領域 D を図示せよ。

(2)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最大値を a を用いて表せ。

解説

(1) $\begin{cases}x^2+y^2=1\cdots①\\ x+2y-2=0\cdots②\end{cases}$ とおく

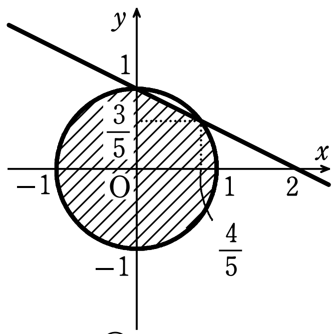
①，②の共有点は

$$4(y-1)^2+(y^2-1)=0$$

$$(y-1)(4y-4+y+1)=0$$

$$(y-1)(5y-3)=0\qquad\therefore\ y=1,\ \frac{3}{5}$$

$$\therefore (x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$



よって，領域 D は右図の斜線部

ただし，境界線を含む

(2)，(3) において $ax+y=k$ とおくと，　$y=-ax+k$ …③

直線 ③ は，傾きが $-a$，y 切片が k の直線を表す

(2) ③と①が $y<0$ で接するとき，k は最小

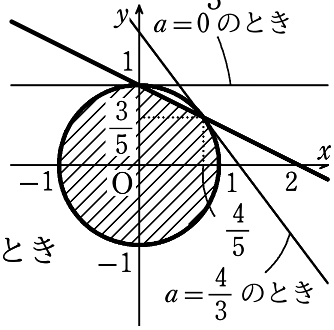
このとき

$$\frac{|-k|}{\sqrt{a^2+1^2}}=1 \quad \therefore\ k=\pm\sqrt{a^2+1}$$

$k<0$ より，最小値は $-\sqrt{a^2+1}$

(3) (ⅰ) $-a>0$ または $-a\leqq-\dfrac{4}{3}$，すなわち $a<0$ または $a\geqq\dfrac{4}{3}$ のとき

最大値は $\sqrt{a^2+1}$



(ⅱ) $-\dfrac{1}{2}\leqq-a\leqq0$，すなわち $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ で最大　最大値 1

(ⅲ) $-\dfrac{4}{3}<-a<-\dfrac{1}{2}$，すなわち $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{4}{3}$ のとき

$(x,\ y)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$ で最大　最大値 $\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}$

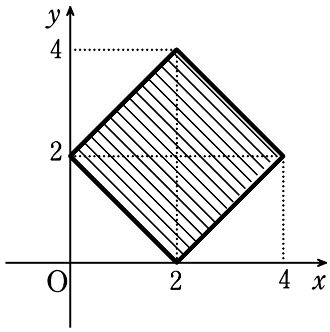
例8

x，y が不等式 $|x-2|+|y-2|\leqq2$ を満たす。

(1)　この不等式の表す領域を図示せよ。

(2)　$x+2y$ の最大値と最小値を求めよ。

解説



(1) $x\geqq2$，$y\geqq2$ のとき

$x-2+y-2\leqq2 \quad \therefore\ y\leqq-x+6$

$x\geqq2$，$y<2$ のとき

$x-2-(y-2)\leqq2 \quad \therefore\ y\geqq x-2$

$x<2$，$y\geqq2$ のとき

$-(x-2)+y-2\leqq2 \quad \therefore\ y\leqq x+2$

$x<2$，$y<2$ のとき

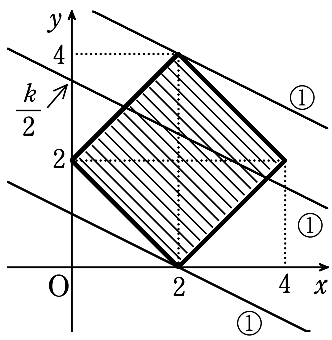
$-(x-2)-(y-2)\leqq2 \quad \therefore\ y\geqq-x+2$

求める領域は図の斜線部。ただし，境界線を含む

(2) $x+2y=k$ …① とおくと，$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$

① は，傾き $-\dfrac{1}{2}$，y 切片 $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す

直線①が(1)の領域と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。
直線①が点 $(2,\ 4)$ を通るとき，k の値は最大
　最大値 $2+2\cdot4=10$
点 $(2,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小
　最小値 $2+2\cdot0=2$



例9
2 種類の食品 A，B の 100 g あたりの栄養素含有量は次の表の通りである．

	糖　質	蛋白質	脂　質
A	20 g	5 g	3 g
B	10 g	10 g	3 g

食品 A と B を組み合わせて糖質を 40 g 以上，蛋白質を 20 g 以上とる必要がある．一方，脂質摂取量は最小に抑えたい．このような条件下で脂質は何グラムとることになるか．

(解説)
食品 A, B をそれぞれ x g, y g とって摂取される糖質，蛋白質の量 (g) は

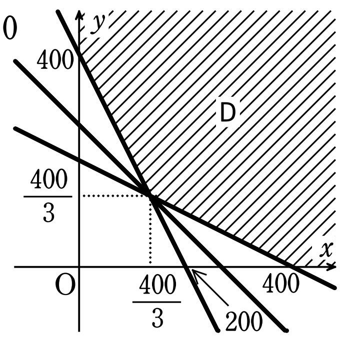
　糖質：$\dfrac{20}{100}x+\dfrac{10}{100}y$，蛋白質：$\dfrac{5}{100}x+\dfrac{10}{100}y$

条件より

$$\frac{20}{100}x+\frac{10}{100}y\geqq 40,\quad \frac{5}{100}x+\frac{10}{100}y\geqq 20,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

$$y\geqq -2x+400,\quad y\geqq -\frac{1}{2}x+200,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

この連立不等式の表す領域 D を図示すると右図のようになる．ただし，境界線を含む



脂質摂取量 (g) は $\dfrac{3}{100}x+\dfrac{3}{100}y$ であるから

$\dfrac{3}{100}x+\dfrac{3}{100}y=k$ とおくと，

$y=-x+\dfrac{100k}{3}$ …①

①は傾き-1，切片$\dfrac{100k}{3}$の直線を表す

①が領域Dを通るときのkの最小値を求めればよい

$\left(\dfrac{400}{3},\ \dfrac{400}{3}\right)$を通るとき，$\dfrac{100k}{3}$は最小値$\dfrac{800}{3}$をとる

このとき，脂質は$k=8$ (グラム) とることになる

確認問題1

xy 平面上で，連立不等式

$$y \leqq -2x+8,\ \ y \leqq -\frac{2}{3}x+4,\ \ y \geqq -\frac{1}{2}x+1,\ \ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0$$

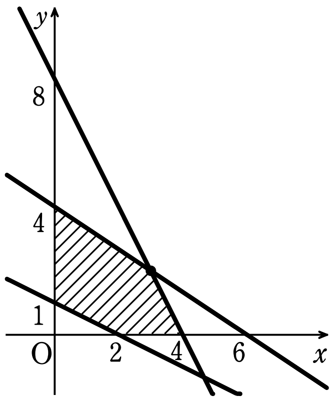
の表す領域を D とする。

(1)　直線 $y=-2x+8$ と直線 $y=-\dfrac{2}{3}x+4$ との交点の座標は ア$\boxed{}$ である。領域 D の面積は イ$\boxed{}$ である。

(2)　領域 D 上の点 $(x,\ y)$ に対して $x+y$ の値を考える。$x+y$ の値が最大となる点の座標は ウ$\boxed{}$ であり，$x+y$ の値が最小となる点の座標は エ$\boxed{}$ である。

(3)　m を正の数とする。領域 D 上の点 $(x,\ y)$ に対して $mx+y$ の値を考える。$mx+y$ の値が ア$\boxed{}$ で最大となるのは，m の値が オ$\boxed{}$ の範囲にあるときである。また，$mx+y$ の値の最小値が 1 であり，かつ，最大値が 4 であるのは，m の値が カ$\boxed{}$ の範囲にあるときである。

解説



(1) $y=-2x+8$ と $y=-\dfrac{2}{3}x+4$ の交点は

$$-2x+8=-\frac{2}{3}x+4 \qquad \therefore\ x=3$$

よって，求める交点の座標は ア$(3,\ 2)$

領域 D は，右図の斜線部

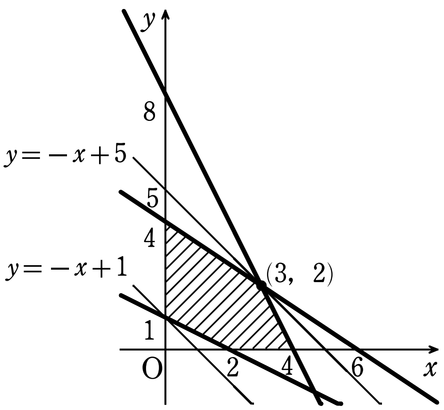
ただし，境界は含む

領域 D の面積は

$$\frac{1}{2}\times4\times6-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times(6-4)\times2$$

$$=12-1-2=^{イ}9$$

(2) $x+y=k$ とおくと，
これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す
この直線が D と共有点をもつような k の値の最大，最小を考えればよい
k の値が最大となる点の座標は ${}^{ウ}(3,\ 2)$
k の値が最小となる点の座標は ${}^{エ}(0,\ 1)$



(3) $mx+y=l$ …… ① とおくと
これは傾きが $-m$，y 切片が l の直線を表す。
l の値が $(3,\ 2)$ で最大となるとき

$$-2 \leqq -m \leqq -\frac{2}{3} \qquad \therefore\ {}^{オ}\frac{2}{3} \leqq m \leqq 2$$

l の最小値が 1，最大値が 4 となるのは，
点 $(0,\ 1)$ で最小となり，点 $(0,\ 4)$ で最大となるときであるから

$$-\frac{2}{3} \leqq -m \leqq -\frac{1}{2} \qquad \therefore\ {}^{カ}\frac{1}{2} \leqq m \leqq \frac{2}{3}$$

確認問題2

xy 平面において，不等式 $3x^2+7xy+2y^2-9x-8y+6\leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1)　領域 D を xy 平面上に図示せよ。

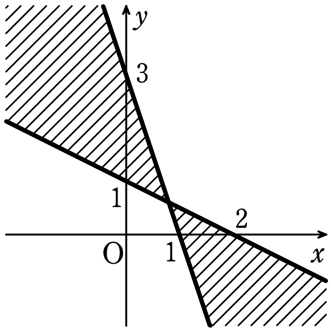
(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(解説)

(1) $3x^2+7xy+2y^2-9x-8y+6\leqq 0$

$(y+3x-3)(2y+x-2)\leqq 0$

$$\begin{cases} y\leqq -3x+3 \\ y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y\geqq -3x+3 \\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$$



よって，領域 D は右図の斜線部

ただし，境界含む

(2) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ とおくと

これは中心が $(0, 0)$，半径が r の円を表す

これが D と共有点をもつような r^2 の最小値を求めればよい

これが $3x+y-3=0$ と接するとき

$$r=\frac{|-3|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \therefore\ r^2=\frac{9}{10}$$

これが $2x+y-2=0$ と接するとき

$$r=\frac{|-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \therefore\ r^2=\frac{4}{5}$$

よって，求める最小値は $\dfrac{4}{5}$

確認問題3

連立不等式 $\begin{cases} y \geqq x^2-2x+1 \\ y \leqq -x^2+4x+1 \end{cases}$ の表す領域を D とする。

(1)　D を座標平面上に図示せよ。

(2)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$-ax+y$ の最大値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた $f(a)$ に対し，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。

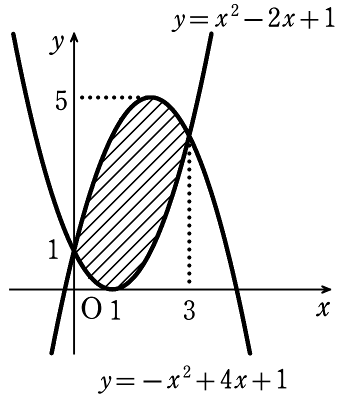
(解説)

(1) $y=x^2-2x+1$ と $y=-x^2+4x+1$ の交点は

$x^2-2x+1=-x^2+4x+1$

$x(x-3)=0 \quad \therefore\ x=0, 3$

$\therefore\ (0, 1), (3, 4)$



領域 D は，右図の斜線部

ただし，境界含む。

(2) $-ax+y=k$ …① とおくと

これは傾き a，y 切片 k の直線を表す

直線①が領域 D と共有点をもつような

k の最大値を求めればよい

$g(x)=-x^2+4x+1$ とおくと

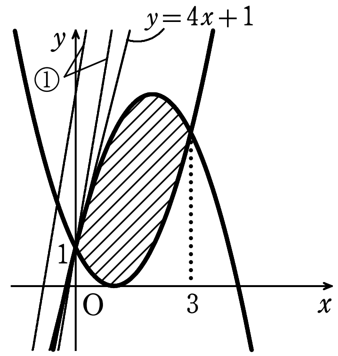
$g'(x)=-2x+4$ より，$g'(0)=4$，$g'(3)=-2$

$(0,\ 1)$，$(3,\ 4)$ における $y=g(x)$ の接線の傾きはそれぞれ 4，-2 である

(i) $a \geqq 4$ のとき

図より，①が点 $(0,\ 1)$ を通るとき最大

最大値 $f(a)=1$



(ii) $-2<a<4$ のとき

図より，①が $y=g(x)$ に接するとき最大

このとき

$-x^2+4x+1=ax+k$

$x^2+(a-4)x+k-1=0 \quad \cdots\cdots ②$

判別式を D とすると，$D=0$ より

$$D=(a-4)^2-4\cdot 1\cdot(k-1)=0 \quad \therefore\ k=\frac{(a-4)^2}{4}+1$$

最大値 $f(a)=\dfrac{1}{4}(a-4)^2+1$

(iii) $a \leqq -2$ のとき

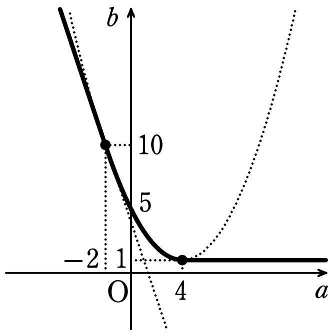
図より，①が点$(3,\ 4)$を通るとき最大

　最大値 $f(a)=-3a+4$

(ⅰ)～(iii)より

$$f(a)=\begin{cases} 1 & (a \geqq 4) \\ \dfrac{1}{4}(a-4)^2+1 & (-2<a<4) \\ -3a+4 & (a \leqq -2) \end{cases}$$

(3) (2)より $b=f(a)$のグラフは右図



確認問題4

(1)　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)+7 \leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x+y \geqq 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ の表す領域Dを図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ がDを動くとき，$\dfrac{y+1}{x-5}$ の最大値，最小値を求めよ．

解説

(1) $x^2+y^2-4(x+y)+7 \leqq 0$ より

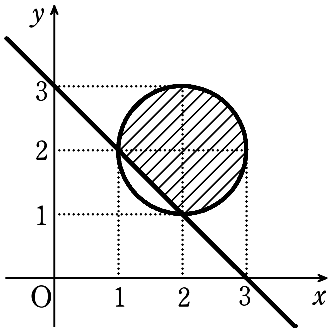
$(x-2)^2+(y-2)^2 \leqq 1$

$x+y \geqq 3$ より

$y \geqq -x+3$

領域Dは右図の斜線部

ただし，境界を含む

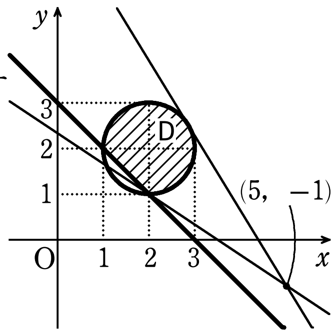


(2) $\dfrac{y+1}{x-5}=k$ とおくと，　$y=k(x-5)-1$ …③

これは $(5,\ -1)$ を通り，傾きが k の直線を表す

③が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，k の値は最大

最大値 $k=\dfrac{1+1}{2-5}=-\dfrac{2}{3}$



③がD上で円 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

に接するとき，k の値は最小となる

このとき

$$\frac{|k\cdot 2-2-5k-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$$

$$|3k+3|=\sqrt{k^2+1}$$

$$(3k+3)^2=k^2+1$$

$$4k^2+9k+4=0$$

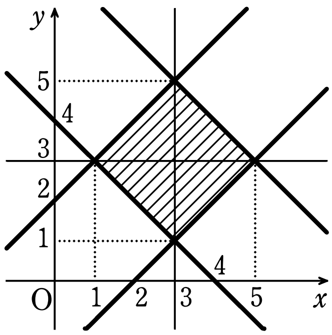
接点が領域D上にあるのは，　$k=\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$

よって

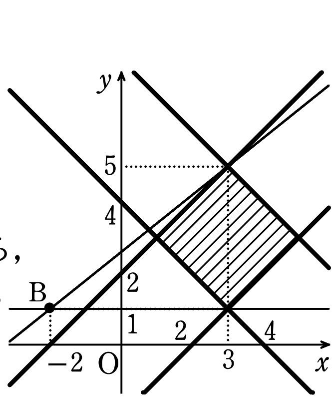
最大値 $-\dfrac{2}{3}$，最小値 $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$

確認問題5
座標平面上で，不等式 $|x-3|+|y-3| \leqq 2$ で表される領域を D とするとき，次の問いに答えよ。
(1)　領域 D を座標平面上に図示せよ。
(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき $2x+y$ の最大値を求めよ。またこのときの x と y の値を求めよ。
(3)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき $x^2+y^2-4x-2y$ の最大値を求めよ。またこのときの x と y の値を求めよ。
(4)　点 $(x,\ y)$ が領域 D が動くとき $\dfrac{y-1}{x+2}$ の取り得る値の範囲を求めよ。

(解説)



(1) $|x-3|+|y-3| \leqq 2$ で表される領域を D は
$|x|+|y| \leqq 2$ で表される領域を
x 軸方向に 2， y 軸方向に 2 だけ平行移動したものであるから， D は右図
ただし，境界は含む
(2) $2x+y=k$ …① とおくと，
これは傾き -2， y 切片 k の直線を表す
①が領域 D と共有点をもつような k の最大値を求めればよい。
① が点 $(5,\ 3)$ を通るとき最大
　最大値 $2\cdot5+3=13$ ($x=5, y=3$)
(3) $x^2+y^2-4x-2y=l$ とおくと
　$(x-2)^2+(y-1)^2=l+5$
これは中心が $(2, 1)$，半径が $\sqrt{l+5}$ の円を表す
(2)と同様に， l が最大になるのは，これが $(3, 5)$ を通るときで
このとき
　最大値 $l=1+16-5=12$ ($x=3, y=5$)
(4) $\dfrac{y-1}{x+2}=m$ とおくと
　$y-1=m(x+2)$
(x, y) が領域 D を動くとき， $x \neq -2$ であるから，
これは $(-2, 1)$ を通り傾き m の直線を表すから
　$0 \leqq \dfrac{y-1}{x+2} \leqq \dfrac{4}{5}$



確認問題6

実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$s=x+y$，$t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2)　負でない定数 m をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。

解説

(1) $x^2+y^2 \leqq 1$ より

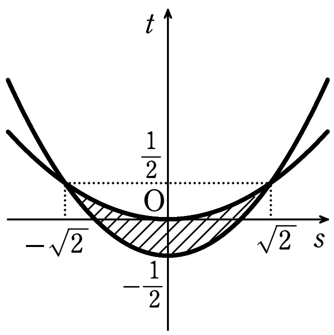
$$(x+y)^2-2xy \leqq 1 \quad \therefore\ s^2-2t \leqq 1 \quad \therefore\ t \geqq \frac{s^2}{2}-\frac{1}{2} \cdots ①$$

x，y は方程式 $X^2-sX+t=0$ の 2 つの実数解より

$$s^2-4t \geqq 0 \quad \therefore\ t \leqq \frac{s^2}{4} \cdots ②$$

①，②より，求める範囲は右図の斜線部

ただし，境界線を含む。



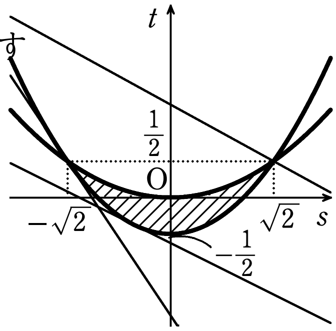
(2) $s=x+y$，$t=xy$ とすると

$$xy+m(x+y)=t+ms$$

$t+ms=k \cdots ③$ とおくと，

これは傾きが $-m\ (\leqq 0)$，切片が k の直線を表す

図より，③が $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，k は最大



最大値 $\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\,m$

$f(s)=\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ とおく

$f'(s)=s$ より，$f'(-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

よって，$y=f(s)$ の $\left(-\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接線の傾きは $-\sqrt{2}$

(ⅰ) $m>\sqrt{2}$ のとき

③が $\left(-\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，k は最小

最小値 $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\,m$

(ii) $0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$ のとき

③が放物線 $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ に接するとき，k は最小

$$\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}=-ms+k$$

$$s^2+2ms-(2k+1)=0$$

の判別式を D として，$D=0$ より

$$m^2+2k+1=0 \quad \therefore\ k=-\frac{m^2+1}{2}$$

よって

最小値 $-\dfrac{m^2+1}{2}$

確認問題7

ある会社で2種類の製品A，Bを作っている．Aを1 kg作るには3種類の原料 α，β，γ をそれぞれ9 kg，4 kg，3 kg必要とし，Bを1 kg作るにはそれぞれ4 kg，5 kg，10 kg必要である．α，β，γ の総使用量はそれぞれ360 kg，200 kg，300 kgを超えてはならないとする．Aは1 kgあたり7万円の利益があり，Bは1 kgあたり12万円の利益がある．Aを x kg，Bを y kg作るとする．このとき

(1)　原料 α，β，γ の総使用量について上の条件を x と y の3つの不等式で表せ．

(2)　利益を w 万円とすると，w を x，y を用いて表せ．

(3)　利益を最大にする x，y の値を求めよ．また，そのときの利益を求めよ．

(4)　原料 α，β，γ をそれぞれ10 kg，13 kg，16 kgずつよけいに使えるとき，利益を最大にする x，y の値を求めよ．また，このときの利益は(3)にくらべ，いくら増えるか．

解説

(1) 条件より

$9x+4y \leqq 360$，$4x+5y \leqq 200$，$3x+10y \leqq 300$

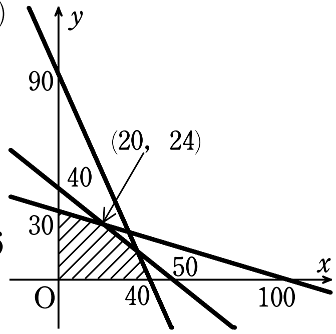
(2) $w=7x+12y$

(3) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のもとで，(1)を満たす点 $(x,\ y)$ の領域を図示すると右図の斜線部

ただし，境界線を含む

$w=7x+12y$ は点 $(20,\ 24)$ を通るとき最大

最大値428万円 ($x=20$，$y=24$)



(4) $9x+4y \leqq 370$，$4x+5y \leqq 213$，$3x+10y \leqq 316$

(3)と同様にして，

$w=7x+12y$ は点 $(22,\ 25)$ を通るとき最大

このとき，$w=454$

よって，$x=22$，$y=25$ のとき26万円増える