## 2.2　確率(2)

### (1) 組合せと確率

例1
1から9までの番号がついたカード9枚から同時に3枚を抜き出すとき，3つの番号の和が3で割り切れる確率を求めよ．

解説
3で割って余りが0のグループをA，
3で割って余りが1のグループをB，
3で割って余りが2のグループをCとすると，
3つの番号の和が3で割り切れるのは，
(i) Aから3枚を抜き出すとき
(ii) Bから3枚を抜き出すとき
(iii) Cから3枚を抜き出すとき
(iv) A, B, Cから1枚ずつ抜き出すとき
であるから，

$$\frac{{}_3C_3\times3+{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_9C_3}=\frac{5}{14}$$

例2
袋の中に赤球2個，白球3個，黒球4個が入った袋の中から1球を取り出す。ただし，球は同質同形であるとする．
(1) 取り出した結果は全部で何通りか．
(2) 赤球を取り出す確率を求めよ．

解説
色球を取り出す問題です。
(1) 赤，白，黒の3通り
(2) 根元事象を{赤}, {白}, {黒}として，求める確率は

$$\frac{1}{3}$$

とするのは誤りです。
根元事象を{赤}, {白}, {黒}とすると，これらの球が出る比は2 : 3 : 4であり，これらは同様に確からしくはありません。

この場合，根元事象を$\{赤_1\}, \{赤_2\}, \{白_1\}, \{白_2\}, \{白_3\}, \{黒_1\}, \{黒_2\}, \{黒_3\}, \{黒_4\}$とすると，これらは同様に確からしい。よって，求める確率は

$$\frac{2}{9}$$

色球の問題も区別できないものも区別して考えることが基本となります。

**例3**
袋の中に赤球 2 個，白球 3 個，黒球 4 個が入った袋の中から 2 球を取り出す。ただし，球は同質同形であるとする．
(1) 取り出した組合せは全部で何通りか．
(2) 白球 1 個と黒球 1 個を取り出す確率を求めよ．

解説
(1) (赤, 赤), (赤, 白), (赤, 黒), (白, 白), (白, 黒), (黒, 黒) の 6 通り
(2) 根元事象を {(赤, 赤)}, {(赤, 白)}, {(赤, 黒)}, {(白, 白)}, {(白, 黒)}, {(黒, 黒)} として，求める確率は

$$\frac{1}{6}$$

とするのは誤りです。これも同じ色の球も区別して考えます。

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_9C_2} = \frac{1}{3}$$

**例4**
袋の中に赤球 6 個，白球 4 個が入っている．この中から同時に 3 個を取り出すとき，赤球，白球がともに取り出される確率を求めよ．

解説

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_1 + {}_6C_1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{5}$$

別解
赤球，白球がともに取り出される事象の余事象は，全部赤，または，全部白より，

$$1 - \frac{{}_6C_3 + {}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{5}$$

例5

赤玉 5 個，白玉 4 個，青玉 3 個が入っている袋から，よくかき混ぜて玉を同時に 3 個取り出す。

(1)　3 個とも赤玉である確率を求めよ。

(2)　3 個とも色が異なる確率を求めよ。

(3)　3 個の玉の色が 2 種類である確率を求めよ。

解説

(1) $\dfrac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3}=\dfrac{1}{22}$

(2) $\dfrac{{}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_{12}C_3}=\dfrac{3}{11}$

(3) 3 個の玉の色が 2 種類の余事象は，3 個の玉の色が 1 種類または 3 種類より，

$$1-\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1+{}_5C_3+{}_4C_3+{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{29}{44}$$

例6

円周上に等間隔に $n$ 個 $(n\geqq4)$ の点が配置されている。これらの点から異なる 3 点を無作為に選び出し，それらを頂点とする三角形をつくる。

(1)　$n=8$ のとき，三角形が直角三角形になる確率を求めよ。

(2)　$n$ が偶数であるとき，三角形が直角三角形になる確率を $n$ の式で表せ。

(3)　$n=12$ のとき，三角形が鈍角三角形になる確率を求めよ。

解説

(1) 三角形が直角三角形となるとき，斜辺がこの円周の直径となればよいから，

$$\frac{6\times4}{{}_8C_3}=\frac{3}{7}$$

(2) 同様にして，

$$\frac{(n-2)\times\dfrac{n}{2}}{{}_nC_3}=\frac{3}{n-1}$$

(3) 頂点を順に $A_1$，$A_2$，…，$A_{12}$ とする

$\angle A_1$ が鋭角で，$A_1$ が鈍角三角形の 1 つの頂点となる場合を考える。

$A_2$，$A_3$，…，$A_6$ から 2 つの頂点を選ぶ場合と，$A_8$，$A_9$，…，$A_{12}$ から

2 つの頂点を選ぶ場合がある。
これを $A_1$ から $A_{12}$ までの頂点について考えると，同じものが 2 回ずつ数えられるから鈍角三角形の個数は

$$\frac{12\times{}_5C_2\times2}{2}=120\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{120}{{}_{12}C_3}=\frac{6}{11}$$

### (2) 確率の最大値

例7
箱の中に 1 番から $N$ 番までの番号札が 1 枚ずつ合計 $N$ 枚入っている．この箱から同時に4 枚の番号札を取り出す．この 4 枚の札の中で，最小の番号が 3 である確率を $P_N$ とする．ただし，$N\geqq6$ とする．
(1)　$P_N$ を求めよ．
(2)　$P_N<P_{N+1}$ となる $N$ をすべて求めよ．
(3)　$P_N$ を最大にする $N$ とその最大値を求めよ．

解説
(1) 最小の番号が 3 であるとき，3 と，4 から $N$ までの $N-3$ 枚の番号札から 3 枚を選べばよいから，

$$P_N=\frac{{}_{N-3}C_3}{{}_NC_4}=\frac{4(N-4)(N-5)}{N(N-1)(N-2)}$$

(2) $P_N<P_{N+1}$, $P_N>0$ であるから，$\dfrac{P_{N+1}}{P_N}>1$ より

$$\frac{P_{N+1}}{P_N}=\frac{(N-2)(N-3)}{(N+1)(N-5)}>1$$

$$N^2-5N+6>N^2-4N-5$$

$$\therefore\ N<11$$

よって，$N=6,7,8,9,10$

別解
$P_N<P_{N+1}$ より

$$P_{N+1}-P_N>0$$

$$P_{N+1}-P_N=\frac{4(N-4)}{N(N-1)}\left(\frac{N-3}{N+1}-\frac{N-5}{N-2}\right)$$

$$=\frac{4(N-4)}{N(N-1)}\cdot\frac{11-N}{(N+1)(N-2)}>0$$

$\therefore N<11$

(3) (2)より

$6\leqq N<11$ のとき， $P_N<P_{N+1}$

$N=11$ のとき， $P_N=P_{N+1}$

$N>11$ のとき， $P_N>P_{N+1}$

よって，

$$P_6<P_7<\cdots<P_{11}=P_{12}>P_{13}>\cdots$$

したがって，$N=11$，12 のとき最大で，

最大値 $P_{11}=\dfrac{4\times7\times6}{11\times10\times9}=\dfrac{28}{165}$

例8

青球 6 個と赤球 $n$ 個 ($n\geqq2$) が入っている袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，青球が 1 個で赤球が 2 個である確率を $P_n$ とする。

(1) $P_n$ を $n$ の式で表せ。

(2) $P_n>P_{n+1}$ を満たす最小の $n$ を求めよ。

(3) $P_n$ を最大にする $n$ の値を求めよ。

解説

(1) $P_n=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+6}\mathrm{C}_3}=\dfrac{6n(n-1)}{2}\cdot\dfrac{6}{(n+6)(n+5)(n+4)}$

$$=\frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

(2) $P_n>P_{n+1}, P_n>0$ であるから，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ より

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{18n(n+1)}{(n+7)(n+6)(n+5)}\cdot\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{18n(n-1)}$$

$$=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+7)(n-1)}<1$$

$n^2+5n+4<n^2+6n-7$

$\therefore n>11$

$n>11$ を満たす最小の自然数は $n=12$

(3) (2)より

$2 \leqq n < 11$ のとき，$P_n < P_{n+1}$，

$n = 11$ のとき，$P_n = P_{n+1}$

$n > 11$ のとき，$P_n > P_{n+1}$

よって，$P_2 < \cdots < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > \cdots$

したがって，$P_n$ を最大にする $n$ の値は $n = 11$，12

(3) **確率の基本性質**

ある試行において，その全事象を $U$，任意の事象を $A$ とするとき，

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$$

が成り立ちます。各辺を $n(U)$ で割ると，

$$0 \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq 1$$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$ より

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$

が成り立ちます。ここで， $P(A) = 0$ となるのは $A = \varnothing$ のときであり，$P(A) = 1$ となるのは， $A = U$ のときです。

**確率の基本性質**

任意の事象 $A$ に対して，

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$

特に， $P(\varnothing) = 0$ , $P(U) = 1$ である。

2 つの事象 $A, B$ に対して，

「事象 $A$ と事象 $B$ がともに起こる」という事象を $A$ と $B$ の**積事象**といい， $A \cap B$ で表します。また，

「事象 $A$ または事象 $B$ が起こる 」という事象を $A$ と $B$ の**和事象**といい， $A \cup B$ で表します。

積事象 $A \cap B$，和事象 $A \cup B$ は，それぞれ集合としての共通部分 $A \cap B$，和集合 $A \cup B$ で表されます。

和事象の確率について，以下の公式が成り立ちます。

**和事象の確率**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

一般に，

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

が成り立つから，各辺 $n(U)$ で割って，

$$\frac{n(A\cup B)}{n(U)}=\frac{n(A)}{n(U)}+\frac{n(B)}{n(U)}-\frac{n(A\cap B)}{n(U)}$$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

となります。

2つの事象 $A, B$ が同時には決して起こらないとき，すなわち，$A\cap B=\varnothing$ のとき，2つの事象は互いに**排反**である，または，互いに**排反事象**であるといいます。

$A$ と $B$ が互いに排反であるとき， $P(A\cap B)=0$ より，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

が成り立ちます。

事象が3つの場合，その中のどの2つの事象も互いに排反であるとき，これらの事象は互いに**排反**である，または，互いに**排反事象**であるといいます。このとき，

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

が成り立ちます。

これは，

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

と， $A\cap B, B\cap C, C\cap A, A\cap B\cap C=\varnothing$ から導けます。

全事象を $U$ とし，事象 $A$ に対して， $A$ が起こらないという事象を $A$ の**余事象**といい，$\overline{A}$ と表します。

余事象 $\overline{A}$ は， $U$ の部分集合 $A$ の補集合 $\overline{A}$ で表されます。

事象 $A$ とその余事象 $\overline{A}$ について，

$A\cup\overline{A}=U, A\cap\overline{A}=\varnothing$ であるから，

$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

$P(A)+P(\overline{A})=P(U)$

$\therefore P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad \therefore P(\overline{A})=1-P(A)$

| 余事象の確率 |
| --- |
| $P(\overline{A})=1-P(A)$ |

例9
3 個のサイコロを一度に投げるとき，奇数の目が少なくとも 1 つ出るという事象を $X$，6 の目が少なくとも 1 つ出るという事象を $Y$ とする。
(1)　$X$ が起こる確率を求めよ。
(2)　$Y$ が起こる確率を求めよ。
(3)　$X$ または $Y$ が起こる確率を求めよ。
(4)　$X$ は起こるが $Y$ は起こらない確率を求めよ。
(5)　$X$ も $Y$ も起こる確率を求めよ。

解説

(1) $\overline{X}$ は奇数の目が 1 つも出ない(すべて偶数の目が出る)という事象より

$$P(X)=1-P(\overline{X})=1-\frac{3^3}{6^3}=\frac{7}{8}$$

(2) $\overline{Y}$ は 6 の目が 1 つも出ないという事象より

$$P(Y)=1-P(\overline{Y})=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216}$$

(3) $P(X\cup Y)=1-P(\overline{X\cup Y})$

$$=1-P(\overline{X}\cap\overline{Y})$$

ここで，$\overline{X}\cap\overline{Y}$ はすべての目が 2 または 4 という事象であるから

$$=1-\frac{2^3}{6^3}=\frac{26}{27}$$

(4) $P(X\cap\overline{Y})=P(X\cup Y)-P(Y)=\frac{26}{27}-\frac{91}{216}=\frac{13}{24}$

(5) $P(X\cap Y)=P(X)-P(X\cap\overline{Y})=\frac{7}{8}-\frac{13}{24}=\frac{1}{3}$

ある事象の確率がそのままでは求めづらいとき，余事象やベン図をうまく利用して求めます。

例10
正しく作られたさいころ 1 個を 3 回振るとき，2 の目と 3 の目の両方が出る確率を求めよ。

解説

$X$ ：少なくとも 1 回 2 の目が出る事象
$Y$ ：少なくとも 1 回 3 の目が出る事象とする
求める確率は $P(X\cap Y)$

$$P(X\cap Y)=1-P(\overline{X\cap Y})$$
$$=1-P(\overline{X}\cup\overline{Y})$$
ここで，
$$P(\overline{X}\cup\overline{Y})=P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})$$
$$=\frac{5^3}{6^3}\times 2-\frac{4^3}{6^3}=\frac{31}{36}$$
よって，
$$P(X\cap Y)=1-\frac{31}{36}=\frac{5}{36}$$
別解

2の目と3の目の両方が出るような目の出方の組は，

(2，2，3)，(2，3，3)，(1，2，3)，(2，3，4)，(2，3，5)，(2，3，6)

よって，
$$\frac{2\times\frac{3!}{2!}+4\times 3!}{6^3}=\frac{5}{36}$$

例11

1から10までの数が書かれたカードが1枚ずつ計10枚ある。この中から同時に4枚を取り出すとき，それらに書かれている数について，最大の数が6である確率は ア$\boxed{\phantom{00}}$ であり，また，最大の数が9以上で，かつ最小の数が2以下である確率は イ$\boxed{\phantom{00}}$ である。

解説

(ア) 取り出したカードに書かれた数の最大の数が6であるとき，
6と，1から5の5枚の中から3枚を取り出せばよいから
$$\frac{1\times {}_5C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{21}$$
(イ) $X$ ：最大の数が9以上である事象

$Y$ ：最小の数が2以下である事象とする

求める確率は $P(X\cap Y)$
$$P(X\cap Y)=1-P(\overline{X}\cup\overline{Y})$$
ここで，
$$P(\overline{X}\cup\overline{Y})=P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})$$

$$=\frac{{}_8C_4}{{}_{10}C_4}+\frac{{}_8C_4}{{}_{10}C_4}-\frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{70\cdot2-15}{210}=\frac{25}{42}$$

よって，

$$P(X\cap Y)=1-\frac{25}{42}=\frac{17}{42}$$

別解

最大の数が 9，最小の数が 1 となる取り出し方の総数は，

2 ～ 8 の 7 枚のカードから 2 枚を引く場合の数であるから ${}_7C_2$ 通り

同様に考えて，

最大の数が 9，最小の数が 2 となる取り出し方の総数は ${}_6C_2$ 通り

最大の数が 10，最小の数が 1 となる取り出し方の総数は ${}_8C_2$ 通り

最大の数が 10，最小の数が 2 となる取り出し方の総数は ${}_7C_2$ 通り

よって，求める確率は

$$\frac{{}_7C_2+{}_6C_2+{}_8C_2+{}_7C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{85}{210}={}^{イ}\frac{17}{42}$$

> 例12
> 大，中，小の 3 個のサイコロを投げる．出た目の積が 3 で割り切れる確率は $^{ア}\boxed{\phantom{00}}$，4 で割り切れる確率は $^{イ}\boxed{\phantom{00}}$ である．

解説

(ア) 3 の倍数の目が少なくとも 1 つ出ればよいから

$$1-\frac{4^3}{6^3}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

(イ) 4 で割り切れないのは，

( i ) すべて奇数の目が出る

(ii) 1 つだけが 2 または 6 の目が出て，残りの 2 つが奇数

よって，

$$1-\frac{3^3+{}_3C_1\cdot2\cdot3^2}{6^3}=\frac{5}{8}$$

例13

1個のさいころを3回投げ，出た目の数を順に $a$，$b$，$c$ とする。積 $abc$ を $n$ とおく。

(1)　$n$ が素数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。ただし，素数とは2以上の自然数で，1とそれ自身以外に正の約数をもたない数である。

(2)　$n$ が2の倍数，5の倍数，10の倍数となる確率は，それぞれ

$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

解説

(1) $n$ が素数となるためには，

2, 3, 5 のいずれかが1回出て，他は1が出ればよいから，

$$\frac{3+3+3}{6^3}=\frac{1}{24}$$

(2) $A$：$n$ が2の倍数となる事象とする

$n$ が2の倍数となるとき，少なくとも1回2の倍数の目が出ればよいから，余事象を利用して，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{7}{8}$$

$B$：$n$ が5の倍数となる事象とする

$n$ が5の倍数となるとき，同様にして，

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

$10=2\times5$ より，$A\cap B$ は，$n$ が10の倍数となる事象を表す

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})$$
$$=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\ (\text{ド・モルガン})$$

ここで，

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=\frac{3^3}{6^3}+\frac{5^3}{6^3}-\frac{2^3}{6^3}=\frac{2}{3}$$

よって，

$$P(A\cap B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

例14
1つのさいころを繰り返し3回投げる．このとき，5の目が1回出る確率は $^{ア}\boxed{\phantom{00}}$，5の目が少なくとも1回出る確率は $^{イ}\boxed{\phantom{00}}$，出た目の最大値が5以下となる確率は $^{ウ}\boxed{\phantom{00}}$，出た目の最大値が5となる確率は $^{エ}\boxed{\phantom{00}}$，出た目の最小値が5となる確率は $^{オ}\boxed{\phantom{00}}$ である．

解説

(ア) ${}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\times\frac{5^2}{6^3}=\frac{25}{72}$

(イ) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$

(ウ) 出た目の最大値を $X$ とすると，

$$P(X\leqq 5)=\frac{5^3}{6^3}=\frac{125}{216}$$

(エ) $P(X=5)=P(X\leqq 5)-P(X\leqq 4)$ (集合を限定して余事象)

$$=\frac{5^3}{6^3}-\frac{4^3}{6^3}=\frac{5^2+5\cdot 4+4^2}{6^3}=\frac{61}{216}$$

(オ) 出た目の最小値を $Y$ とすると，

$$P(Y=5)=P(Y\geqq 5)-P(Y\geqq 6)$$

$$=\frac{2^3}{6^3}-\frac{1^3}{6^3}=\frac{7}{216}$$

例15
1から6までの目が同じ割合で出る4個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。
(1)　出る目がすべて異なる確率
(2)　出る目の最小値が2，かつ最大値が3である確率
(3)　出る目の最大値と最小値の積が20以上である確率

解説

(1) $\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6^4}=\frac{5}{18}$

(2) 出る目がすべて 2 か 3 になる場合から，すべてが 2, 3 になる場合を除いて，

$$\frac{2^4-2}{6^4}=\frac{14}{6^4}=\frac{7}{648}$$

(3) 条件を満たすのは，

$(\min,\max)=(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)$

のときである

$(5,5),(6,6)$ のとき，それぞれすべてが 5, 6 となればよいので，1 通り

$(4,5),(5,6)$ のとき，(2)と同様にして， $2^4-2=14$ 通り

$(4,6)$ のとき，

すべてが 4, 5, 6 になる場合から， $(4,5),(5,6),(4,4),(5,5),(6,6)$ となる場合を除いて

$3^4-2(2^4-2)-3=50$ 通り

よって，

$$\frac{1\times2+14\times2+50}{6^4}=\frac{5}{81}$$

注

$(4,6)$ となるものの個数を求める際，次のように考えてもよい。

$(4,6)$ のとき，1 から 3 の目が出ないのは明らかなので，

すべての目が 4, 5, 6 のいずれかで (集合を限定して)，

4 と 6 がそれぞれ少なくとも 1 つずつ出ればよいと考えて，

$C$ ：すべての目が 4, 5, 6 のいずれかという集合とし，

以下，$A, B\subset C$ として，

$A$ ：少なくとも 1 つは 4 が出る

$B$ ：少なくとも 1 つは 6 が出る集合として，

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(C)-n(\overline{A\cap B}) \\ &=3^4-n(\overline{A}\cup\overline{B}) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cup\overline{B})&=n(\overline{A})+n(\overline{B})-n(\overline{A}\cap\overline{B}) \\ &=2^4+2^4-1=31 \end{aligned}$$

よって，

$$n(A\cap B)=81-31=50$$

と考えてもよい。

注 当然，確率で考えてもよい。

$$P(A\cap B)=P(C)-P(\overline{A\cap B})$$
$$=\frac{3^4}{6^4}-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$

ここで，

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=\frac{2^4}{6^4}+\frac{2^4}{6^4}-\frac{1}{6^4}=\frac{31}{6^4}$$

よって，

$$P(A\cap B)=\frac{3^4}{6^4}-\frac{31}{6^4}=\frac{50}{6^4}$$

別解

条件を満たすのは，出る目の最小値が 4 以上かつ最大値が 5 以上になる場合である。

出る目がすべて 4 以上になる場合から，すべてが 4 になる場合を除いて，

$$\frac{3^4-1}{6^4}=\frac{80}{6^4}=\frac{5}{81}$$

例16

次の確率を求めよ。

(1)　さいころを 2 つ投げるとき，出る目の最小公倍数が 12 になる確率

(2)　さいころを 2 つ投げるとき，出る目の最小公倍数が 12 以上になる確率

(3)　さいころを 3 つ投げるとき，出る目の最小公倍数が 20 になる確率

解説

(1) 出る目の最小公倍数が 12 になる目の組は，$\{3,\ 4\}$，$\{4,\ 6\}$

よって，求める確率は，$\dfrac{2!\times 2}{6^2}=\dfrac{1}{9}$

(2) 出る目の最小公倍数が 12 以上になる目の組は，

$\{3,\ 4\}$，$\{3,\ 5\}$，$\{4,\ 5\}$，$\{4,\ 6\}$，$\{5,\ 6\}$

よって，求める確率は，$\dfrac{2!\times 5}{6^2}=\dfrac{5}{18}$

(3) $20=2^2\cdot 5$ であるから，出る目の最小公倍数が 20 になる目の組は，

$\{1,\ 4,\ 5\}$，$\{2,\ 4,\ 5\}$，$\{4,\ 4,\ 5\}$，$\{4,\ 5,\ 5\}$

よって，求める確率は，$\dfrac{3!\times 2+{}_3\mathrm{C}_1\times 2}{6^3}=\dfrac{18}{6^3}=\dfrac{1}{12}$

別解

$20=2^2\cdot 5$ であるから，出る目の最小公倍数が 20 となるためには，
すべての目が 1, 2, 4, 5 のいずれか (少なくとも 20 の約数) で，
4 と 5 がそれぞれ少なくとも 1 つずつ出ればよいから，
$C$ ：すべての目が 1, 2, 4, 5 のいずれかという集合とし，
以下，$A, B\subset C$ として，
$A$ ：4 の目が少なくとも 1 つ出る
$B$ ：5 の目が少なくとも 1 つ出る集合とすると，

$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(C)-n(\overline{A\cap B})\\&=4^3-n(\overline{A}\cup\overline{B})\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}n(\overline{A}\cup\overline{B})&=n(\overline{A})+n(\overline{B})-n(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=3^3+3^3-2^3=46\end{aligned}$$

よって，

$$n(A\cap B)=64-46=18$$

したがって，求める確率は，

$$P(A\cap B)=\frac{18}{6^3}=\frac{1}{12}$$

注

確率で考えてもよい。

$$P(A\cap B)=P(C)-P(\overline{A\cap B})$$

確認問題1
1から9までの数字が1つずつ書かれた9枚のカードがある。これらを3枚ずつ3つのグループに無作為に分け，それぞれのグループから最も大きい数が書かれたカードを取り出す。

(1)　取り出された3枚のカードの中に9が書かれたカードが含まれる確率を求めよ。

(2)　取り出された3枚のカードの中に8が書かれたカードが含まれる確率を求めよ。

(3)　取り出された3枚のカードの中に3が書かれたカードが含まれる確率を求めよ。

(4)　取り出された3枚のカードの中に6が書かれたカードが含まれる確率を求めよ。

(5)　取り出された3枚のカードに書かれた数の中で，最小の数が6である確率を求めよ。

解説

(1) 取り出された3枚のカードの中に9のカードは必ず含まれるから，
求める確率は1　答

(2) 9枚のカードを3枚ずつの3つのグループに分ける方法は

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3}{3!}=\frac{84\times20}{6}=280\text{ 通り}$$

取り出された3枚のカードの中に8のカードが含まれないとき，
9と8のカードは同じグループになるから，この場合の数は

$${}_7\mathrm{C}_1\times\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!}=7\times10=70$$

よって，求める確率は

$$1-\frac{70}{280}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\text{ (余事象を利用)}$$
答

(3) グループの1つは{1，2，3}である
このとき，3つのグループに分ける場合の数は，
残りの6枚を2つのグループに分ける場合の数であるから

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2!}=\frac{20}{2}=10\text{ (通り)}$$

よって，求める確率は

$$\frac{10}{280}=\frac{1}{28}$$
答

(4) 6 のカードを含むグループは 6 のカードが最大である

残り 2 枚は 1 ～ 5 のカードから取り出すから，$_5C_2$ 通り

残りの 6 枚のカードを 2 つのグループに分ける場合の数は

(2)と同様にして，10 通り

よって，求める確率は

$$\frac{_5C_2\times 10}{280}=\frac{10\times 10}{280}=\frac{5}{14}$$ 答

(5) 取り出された 3 枚の中で最小の数が 6 であるのは，

3 枚のカードの数字が (ⅰ) 6，7，9 または (ⅱ) 6，8，9 の場合である

(ⅰ) のとき，3 つのグループは

{6，□，□}，{7，□，□}，{9，8，□}

で，□ には 1 ～ 5 の数字が入るから

$$_5C_2\times {}_3C_2=10\times 3=30$$ (通り)

(ⅱ) のとき，3 つのグループは

{6，□，□}，{8，7，□}，{9，□，□} または

{6，□，□}，{8，□，□}，{9，7，□}

で，□ には 1 ～ 5 の数字が入るから

$$({}_5C_2\times {}_3C_2)\times 2=30\times 2=60$$ (通り)

よって，求める確率は

$$\frac{30+60}{280}=\frac{90}{280}=\frac{9}{28}$$ 答

**確認問題2**

白と赤の球が合わせて 22 個入っている袋の中から 3 個の球を取り出す。取り出した球が「白球 2 個，赤球 1 個である確率」を，袋の中に入っている白球と赤球の個数の割合を変化させて考える。この確率が最も大きくなるのは，袋の中の白球が $^{ア}\boxed{\quad\quad}$ 個のときであり，そのときの確率は $\dfrac{^{イ}\boxed{\quad\quad}}{_{ウ}\boxed{\quad\quad}}$ である。

解説

袋の中の白球の個数を $n$ 個 $(2 \leqq n \leqq 21)$ とすると，赤球は $(22-n)$ 個ある。

白球 2 個，赤球 1 個である確率を $P_n$ とすると

$$P_n = \frac{{}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_{22-n}\mathrm{C}_1}{{}_{22}\mathrm{C}_3} = \frac{n(n-1)(22-n)}{3080}$$

$P_n < P_{n+1}$ のとき， $P_n > 0$ であるから， $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ より

$$\frac{P_{r+1}}{P_r} = \frac{(n+1)(21-n)}{(n-1)(22-n)} > 1$$

$$(n+1)(21-n) > (n-1)n \quad \therefore\ n < \frac{43}{3} = 14.33\cdots$$

よって，

$n \leqq 14$ のとき， $P_{r+1} > P_r$

$n \geqq 15$ のとき， $P_{r+1} < P_r$

したがって，$P_2 < P_3 < \cdots < P_{14} < P_{15} > P_{16} > \cdots$ より

$P_r$ が最大となる $n$ は $n = {}^{ア}15$ 答

このとき

$$P_{15} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 7}{3080} = \frac{^{イ}21}{_{ウ}44} \quad 答$$

**確認問題3**

9 個のサイコロを振って出た目の積を $X$ とする。$X$ が偶数となる確率を求めよ。また，$X$ が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(解説)

$X$ が偶数となるとき，少なくとも 1 回は偶数の目が出ればよいから，

$$1-\frac{1}{2^9}=\frac{511}{512}$$ 答

$X$ が 4 の倍数とならないとき，

(ⅰ) すべて奇数の目が出る

(ⅱ) 1 個だけ 2, 6 が出て，あとは奇数の目が出る

よって，

$$1-\frac{3^9+{}_9\mathrm{C}_1\cdot 2\cdot 3^8}{6^9}=1-\frac{7}{512}=\frac{505}{512}$$ 答

**確認問題4**

(1)　2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の積が 6 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の積が 6 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　$n$ 個のさいころ ($n=2$，3，……) を同時に投げるとき，出る目の積が 6 の倍数になる確率を求めよ。

(解説)

$6=2\times 3$

$X$ ：出る目の積が 2 の倍数になる

$Y$ ：出る目の積が 3 の倍数になる事象とすると，

求める確率は $P(X\cap Y)$

(1) $P(X\cap Y)=1-P(\overline{X}\cup\overline{Y})$

ここで

$$P(\overline{X}\cup\overline{Y})=P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})$$
$$=\frac{3^2}{6^2}+\frac{4^2}{6^2}-\frac{2^2}{6^2}=\frac{7}{12}$$

よって

$$P(X\cap Y)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$ 答

(2) 同様に

$$P(X\cap Y)=1-\left(\frac{3^3}{6^3}+\frac{4^3}{6^3}-\frac{2^3}{6^3}\right)=\frac{133}{216}$$ 答

(3) 同様に

$$P(X\cap Y)=1-\left(\frac{3^n}{6^n}+\frac{4^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}\right)=\frac{6^n-4^n-3^n+2^n}{6^n}$$ 答

別解

出る目の積が 6 の倍数となるとき,

(ⅰ) 6 の目が少なくとも 1 つ出る

(ⅱ) 6 の目が 1 つも出ず(すべての目が 1, 2, 3, 4, 5 のいずれか),

2 の倍数の目(2, 4)と 3 の倍数の目(3)がそれぞれ少なくとも 1 つずつ出ればよい

(ⅰ)は,

$U$ を $n$ 個のさいころを同時に投げたときの目の出方全体の集合とし,

$A$ :少なくとも 1 つは 6 が出るものの集合とすると,

$$n(A)=n(U)-n(\overline{A})=6^n-5^n$$

$B$ :すべての目が 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかであるものの集合とし,

以下, $C, D\subset B$ とし,

$C$ :少なくとも 1 つは 2 の倍数 (2, 4)

$D$ :少なくとも 1 つは 3 の倍数 (3) である集合とすると,

$$\begin{aligned}n(C\cap D)&=n(B)-n(\overline{C\cap D})\\&=5^n-n(\overline{C}\cup\overline{D})\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}n(\overline{C}\cup\overline{D})&=n(\overline{C})+n(\overline{D})-n(\overline{C}\cap\overline{D})\\&=3^n+4^n-2^n\end{aligned}$$

よって,

$$n(C\cap D)=5^n-4^n-3^n+2^n$$

(ⅰ)と(ⅱ)は排反であるから,求める確率は

$$\frac{(6^n-5^n)+(5^n-4^n-3^n+2^n)}{6^n}=\frac{6^n-4^n-3^n+2^n}{6^n}$$

**確認問題5**

さいころを 3 回投げるとき，出た目の最小値を $m$，最大値を $M$ とする。ただし，$m \leqq M$ とする。

(1)　$m=5$ となる確率は $\boxed{\phantom{00}}$ である。

(2)　$m \leqq 4 \leqq M$ となる確率は $\boxed{\phantom{00}}$ である。

(3)　$m=2$ かつ $M=6$ となる確率は $\boxed{\phantom{00}}$ である。

(4)　$M-m=3$ となる確率は $\boxed{\phantom{00}}$ である。

解説

(1) $P(m=5)=P(m \geqq 5)-P(m=6)$

$$=\frac{2^3}{6^3}-\frac{1}{6^3}=\frac{7}{216} \quad \text{答}$$

(2) $A$ ： $m \leqq 4$ である

$B$ ： $4 \leqq M$ であるという事象とすると，

求める確率は $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B)=1-P(\overline{A \cap B})$$
$$=1-P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

ここで，

$$P(\overline{A} \cup \overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$=\frac{2^3}{6^3}+\frac{3^3}{6^3}=\frac{35}{216}$$

よって，

$$P(A \cap B)=1-\frac{35}{216}=\frac{181}{216} \quad \text{答}$$

(3) $m=2$ かつ $M=6$ となるとき，

すべての目が $2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかで，

$2, 6$ がそれぞれ少なくとも 1 回ずつ出ればよい

$E$ ：すべての目が $2, 3, 4, 5, 6$ のいずれかという集合とし，

以下，$C, D \subset E$ とし，

$C$ ：2 が少なくとも 1 回出る

$D$ ：6 が少なくとも 1 回出る集合とすると，

$$n(C \cap D)=n(E)-n(\overline{C \cap D})$$
$$=5^3-n(\overline{C} \cup \overline{D})$$

ここで，

$$n(\overline{C}\cup\overline{D})=n(\overline{C})+n(\overline{D})-n(\overline{C}\cap\overline{D})$$
$$=4^3+4^3-3^3=101$$

よって，

$$n(C\cap D)=125-101=24$$

したがって，

$$P(C\cap D)=\frac{24}{6^3}=\frac{1}{9}$$ 答

注 数字が 5 種類の重複順列では，さすがに面倒です。

(4) $M-m=3$ となるのは，

$$(m,M)=(1,4),(2,5),(3,6)$$

$(m,M)=(1,4)$ となるのは，(3)と同様にして

$4^3-(2\cdot3^3-2^3)=18$ 通り

$(m,M)=(2,5),(3,6)$ も同様にして 18 通りより

$$\frac{18\times3}{6^3}=\frac{1}{4}$$ 答

---

**確認問題6**

$n$ を 2 以上の自然数とする。$n$ 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　少なくとも 1 個は 1 の目が出る確率

(2)　出る目の最小値が 2 である確率

(3)　出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 である確率

---

解説

(1) $1-\frac{5^n}{6^n}=\frac{6^n-5^n}{6^n}$ 答

(2) 出る目の最小値を $X$ とすると，

$$P(X=2)=P(X\geqq2)-P(X\geqq3)$$
$$=\frac{5^n}{6^n}-\frac{4^n}{6^n}=\frac{5^n-4^n}{6^n}$$ 答

(3) 最小値が 2 かつ最大値が 5 であるとき，

すべての目が 2, 3, 4, 5 のいずれかで，

2, 5 がそれぞれ少なくとも 1 つは出ればよいから，

$C$ ：すべての目が 2, 3, 4, 5 であるものの集合とし，

以下，$A, B \subset C$ とし，
$A$ ：少なくとも 1 つは 2 が出るもの
$B$ ：少なくとも 1 つは 5 が出るものの集合とすると，

$$
\begin{aligned}
n(A \cap B) &= n(C) - n(\overline{A \cap B}) \\
&= 4^n - n(\overline{A} \cup \overline{B})
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A} \cup \overline{B}) &= n(\overline{A}) + n(\overline{B}) - n(\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= 3^n + 3^n - 2^n \\
&= 2 \cdot 3^n - 2^n
\end{aligned}
$$

よって，

$$
n(A \cap B) = 4^n - (2 \cdot 3^n - 2^n) = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n
$$

したがって，

$$
P(A \cap B) = \frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n} \quad \boxed{\text{答}}
$$

別解

出る目がすべて 2, 3, 4, 5 であるものから，最小値が 2 かつ最大値が 5 でないものを除けばよい。
最小値が 2 かつ最大値が 5 でないものは，
出る目が 1 種類のとき
　$\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ の 4 通り
出る目が 2 種類のとき
　$\{2, 5\}$ 以外であるから，$({}_4\mathrm{C}_2 - 1)(2^n - 2)$ 通り
出る目が 3 種類のとき
　$\{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}$ であるから，$2\{3^n - {}_3\mathrm{C}_2(2^n - 2) - 3\}$ 通り
よって，

$$
\frac{4^n - 2\{3^n - 3(2^n - 2) - 3\} - 5(2^n - 2) - 4}{6^n} = \frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n} \quad \boxed{\text{答}}
$$

**確認問題7**

$n$ を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて $n$ 回投げる試行を行い，出た目を順に $X_1$，$X_2$，……，$X_n$ とする。

(1)　$X_1$，$X_2$，……，$X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を $n$ の式で表せ。

(2)　$X_1$，$X_2$，……，$X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を $n$ の式で表せ。

(3)　$X_1$，$X_2$，……，$X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を $n$ の式で表せ。

解説

(1) すべての目が 3 の倍数で，少なくとも 1 回は 3 が出ればよいから

$$\frac{2^n-1}{6^n}\quad \text{答}$$

(2) 最大公約数が 1 とならないのは，次の( i )～(iii)のいずれか

( i ) 最大公約数が 2 または 4 または 6 となるのは，

すべての目が 2 の倍数となればよいから， $3^n$ 通り

(ii) 最大公約数が 3 となるのは，(1)より， $2^n-1$ 通り

(iii) 最大公約数が 5 となるのは，

すべての目が 5 となればよいから，1 通り

よって，求める確率は

$$1-\frac{3^n+(2^n-1)+1}{6^n}=1-\frac{3^n+2^n}{6^n}\quad \text{答}$$

(3) 最小公倍数が 20 となるためには，

すべての目が 1, 2, 4, 5 のいずれか (少なくとも 20 の約数) で，

4, 5 がそれぞれ少なくとも 1 回出ればよい

$C$ ：すべての目が 1, 2, 4, 5 のいずれかであるものの集合とし，

以下， $A, B\subset C$ とし，

$A$ ：少なくとも 1 回は 4 の目が出る

$B$ ：少なくとも 1 回は 5 の目が出るものの集合とすると

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(C)-n(\overline{A\cap B})\\ &=4^n-n(\overline{A}\cup\overline{B}) \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cup\overline{B})&=n(\overline{A})+n(\overline{B})-n(\overline{A}\cap\overline{B})\\ &=3^n+3^n-2^n=2\cdot 3^n-2^n \end{aligned}$$

よって， $n(A\cap B)=4^n-(2\cdot 3^n-2^n)=4^n-2\cdot 3^n+2^n$

求める確率は， $P(A\cap B)=\dfrac{4^n-2\cdot 3^n+2^n}{6^n}$　答