第1章　場合の数

1.1　集合

(1) 集合とその表し方

数学では，「1 から 10 までの自然数の集まり」のように，範囲がはっきりしたものの集まり，すなわち，あるものがその集まりに入るか入らないかがはっきりしたものの集まりを**集合**といいます。
「大きい数の集まり」のように，人の主観によって，あるものがその集まりに入るか入らないかがはっきりしない集まりは，数学では集合とはいいません。また，集合を構成している 1 つ 1 つのものをその集合の**要素**や**元**といいます。

例えば，6 の正の約数の集合を A とすると，A は $1, 2, 3, 6$ を要素とする集合です。

a が集合 A の要素であるとき，a は A に**属する**といい，$a \in A$ と表します。また，a が集合 A の要素でないとき，$a \notin A$ と表します。上の例では $3 \in A, 4 \notin A$ です。

集合の表し方には $\{\quad\}$ の中にその要素を書き並べる方法と，要素の代表を x で表し，$\{\quad\}$ の中の縦線の右に x の条件を書く方法があります。前者を**外延的記法**，後者を**内包的記法**といいます。上の例だと

$A=\{1, 2, 3, 6\}$

$A=\{x \mid x$ は 6 の正の約数$\}$

などと表せます。

有限個の要素からなる集合を**有限集合**といい，無限に多くの要素からなる集合を**無限集合**といいます。例えば，上の集合 A は有限集合であり，自然数全体の集合は無限集合です。

例1
自然数全体の集合を N，3 で割り切れないすべての整数の集合を X とする.
(1)　X の要素となる整数は一般にどのような式で表されるか.
(2)　X の任意の要素の 2 乗を 3 で割ったときの余りはいくらか.
(3)　N の任意の 2 つの要素 m，n，X の任意の 2 つの要素 x，y に対して，x^{2m} と y^{2n} との差は集合 X には属さないことを示せ.

(解説)

(1) $3k\pm1$ (k は整数)

(2) $(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$

よって，求める余りは 1

(3) $x^{2m}=(x^2)^m$

(2)から x^2 を 3 で割った余りは 1 より

$(x^2)^m$ を 3 で割った余りも 1 である

($(x^2)^m=(3k+1)^m={}_mC_0(3k)^m+{}_mC_1(3k)^{m-1}+\cdots+{}_mC_{m-1}(3k)+{}_mC_m$)

同様に y^{2n} を 3 で割った余りも 1 である

よって，x^{2m} と y^{2n} の差は 3 の倍数であるから集合 X には属さない

例2

2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする。

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2 (a，b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ。

(2)　x を整数とする。$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ。

(解説)

(1) すべての整数は $3k, 3k\pm1$ (k は整数) のいずれかで表すことができる

$a=3k$ (k は整数)のとき，　$a^2=(3k)^2=3(3k)$

すなわち，　a^2 は 3 で割り切れる

$a=3k\pm1$ (k は整数)のとき，　$a^2=(3k\pm1)^2=3(3k^2\pm2k)+1$

すなわち，　a^2 は 3 で割ると 1 余る

よって，　a^2+b^2 が 3 で割り切れるとき，　a^2, b^2 はともに 3 で割り切れるから，　a, b もともに 3 で割り切れる

(2) $9x$ が集合 A の要素であるとき，

　$9x=a^2+b^2$ (a，b は整数)

とおける

$9x$ は 3 の倍数であるから，(1) より a，b はともに 3 で割り切れる

$a=3m$，$b=3n$ (m，n は整数) とおくと

　$9x=9(m^2+n^2)$

　$\therefore x=m^2+n^2$

よって，　$x\in A$

(2) **部分集合**

2 つの集合

$A=\{6, 12, 18\}, B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

において， A のどの要素も B の要素になっています。

一般に，2 つの集合 A, B に対して， A のどの要素も B の要素であるとき，すなわち， $x\in A$ ならば $x\in B$ が成り立つとき， A は B の**部分集合**であるといい， $A\subset B$ と表します ($B\supset A$ でもよい)。

このとき， A は B に**含まれる**，または， B は A を**含む**といいます。

A 自身も A の部分集合，すなわち， $A\subset A$ です。

2 つの集合 A, B の要素が完全に一致しているとき，すなわち，$A\subset B$ かつ $B\subset A$ が成り立つとき， A と B は**等しい**といい， $A=B$ と表します。また， $A\subset B$ かつ $A\neq B$ のとき， A は B の**真部分集合**であるといいます。

要素を 1 つももたない集合も考えます。この集合を**空集合**といい，$\varnothing$ で表します。空集合は，どんな集合に対してもその部分集合，すなわち，任意の集合 A に対して， $\varnothing\subset A$ とします。

例3 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の部分集合をすべて求めよ。

解説

$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 2, 3, 4\}$以外は真部分集合です。

部分集合の個数は 1, 2, 3, 4 がそれぞれ集合に入るか入らないかで考えて，

$2^4=16$ 個

あります。

例4 A$=\{x \mid -2\leqq x\leqq 3\}$，B$=\{x \mid k-6\leqq x\leqq k\}$ (k は定数) とするとき，A⊂B となる k の値の範囲を求めよ.

解説

A⊂B となるためには

$k-6\leqq -2$ かつ $3\leqq k$

$\therefore 3\leqq k\leqq 4$

例5
Z は整数全体の集合とする． $A=\{2x+3y \mid x\in Z, y\in Z\}$ とするとき， $A=Z$ であることを示せ．

(解説)

$x, y\in Z$ であるから， $2x+3y\in Z$ である
よって， $A\subset Z$
$2x+3y=1$ の整数解の 1 つは， $x=-1, y=1$ より

$2\cdot(-1)+3\cdot 1=1$

両辺 n をかけて，

$2\cdot(-n)+3\cdot n=n$

よって，すべての n は $2x+3y\,(x\in Z, y\in Z)$ と表せるので， $Z\subset A$
したがって， $A=Z$

(3) 共通部分と和集合

2 つの数 a, b に対して，足し算，引き算，掛け算，割り算のような演算を定義するのと同じように，2 つの集合 A, B に対して，演算を定めます。

2 つの集合 A, B に対して， A と B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**(**交わり**)といい， $A\cap B$ と表し， A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**(**結び**)といい， $A\cup B$ と表します。すなわち，

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ かつ $x\in B\}$

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ または $x\in B\}$

です。

例6
整数を要素とする 4 つの集合 $S_1=\{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11\}$， $S_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$， $S_3=\{1,\ 5,\ a,\ b\}$， $S_4=\{1,\ 2,\ 4,\ c\}$ について次の問いに答えよ。
(1)　和集合 $S_1\cup S_2$ を求めよ。
(2)　共通部分 $S_1\cap S_2$ を求めよ。
(3)　$S_3\cap S_4=\{1,\ 3\}$， $S_3\cup S_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ であるとき a， b， c を求めよ。

(解説)

(1) $S_1\cup S_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11\}$

(2) $S_1 \cap S_2=\{1,\ 2,\ 4\}$

(3) $S_3 \cap S_4=\{1,\ 3\}$ であるから $3 \in S_4$ より，$c=3$

このとき，$S_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

かつ， $S_3 \cup S_4=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ であるから， $7 \in S_3$

また， $3 \in S_3$ より

　$a=3$，$b=7$ または $a=7$，$b=3$

　$\therefore (a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 3),\ (7,\ 3,\ 3)$

　3 つの集合 A, B, C に対して， A, B, C のどれにも属する要素全体の集合を A, B, C の**共通部分**といい， $A \cap B \cap C$ と表し， A, B, C の少なくとも 1 つに属する要素全体の集合を A, B, C の**和集合**といい，
$A \cup B \cup C$ と表します。

> **例7**
> 　30 以下の自然数の集合 U とする。 A, B, C は U の部分集合であり，A は 2 の倍数の集合， B は 3 の倍数の集合， C は 5 の倍数の集合である。このとき， $A \cap B \cap C$ と $A \cup B \cup C$ を求めよ。

(解説)

$A \cap B \cap C$ は 30 以下の 2 の倍数かつ 3 の倍数かつ 5 の倍数である自然数，すなわち，30 の倍数である自然数の集合であるから

　$A \cap B \cap C=\{30\}$

$A \cup B \cup C$ は 30 以下の 2 の倍数または 3 の倍数または 5 の倍数である自然数の集合であるから

　$A \cup B \cup C$

$=\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30\}$

(4) **補集合**

　集合を考えるとき，1 つの集合 U を最初に決めて，要素は U の要素のみを，集合は U の部分集合のみを考えることが多い。このとき，集合 U を**全体集合**といいます。

　また，全体集合 U の部分集合 A に対して， A に属さない U の要素全体の集合を A の**補集合**といい， $\overline{A}$ と表します。すなわち，

　$\overline{A}=\{x \mid x \in U$ かつ $x \notin A\}$

です。

空集合 $\varnothing$，全体集合 U に対して， $\overline{\varnothing}=U, \overline{U}=\varnothing$ です。

また， $\overline{\overline{A}}$ を $\overline{A}$ の補集合とするとき，

$A\cap\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=U, \overline{\overline{A}}=A$

が成り立ちます。

$A\cup B, A\cap B$ の補集合について，次の法則が成り立ちます。

ド・モルガンの法則
(1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
(2) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

各自，ベン図を用いて確かめてみて下さい。

証明は，次のようになります。∪，∩についての交換法則，結合法則，分配法則等を定義していないので，直感的で構いません。

全体集合を U とする

(1) $x\in\overline{A\cup B}$ とすると，

$x\in U$ かつ $x\notin A\cup B$ …①

$x\notin A\cup B$ より

$x\notin A$ かつ $x\notin B$ …②

①，②より

$x\in\overline{A}$ かつ $x\in\overline{B}$

$\therefore\ x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

(2) $x\in\overline{A\cap B}$ とすると，

$x\in U$ かつ $x\notin A\cap B$ …①

$x\notin A\cap B$ より

$x\notin A$ または $x\notin B$ …②

①，②より

$x\in\overline{A}$ または $x\in\overline{B}$

$\therefore\ x\in\overline{A}\cup\overline{B}$

例8

$U=\{x \mid x$ は1桁の自然数$\}$ を全体集合とするとき，その部分集合 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$，$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 9\}$ について，$\overline{A}\cap\overline{B}=$ ア $\boxed{}$，$\overline{A}\cup B=$ イ $\boxed{}$ である。

(解説)

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 8\}$，　$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 8,\ 9\}$ より

　$\overline{A}=\{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\}$，$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$

よって，

　$\overline{A}\cap\overline{B}=$ ア $\{4,\ 7\}$，$\overline{A}\cup B=$ イ $\{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

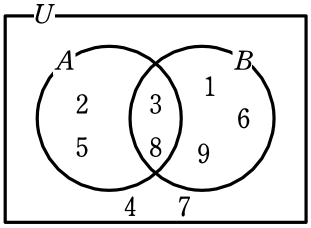
別解

ド・モルガンの法則より

　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

$A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ より

　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4, 7\}$



例9

集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 A，B について $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\}$，$A\cap B=\{3\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\}$ がわかっている。ただし，$\overline{A}$，$\overline{B}$ はそれぞれ A，B の余集合 (補集合) を表す。このとき，A，B，$A\cap\overline{B}$ を求めよ。

(解説)

ド・モルガンの法則より

　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

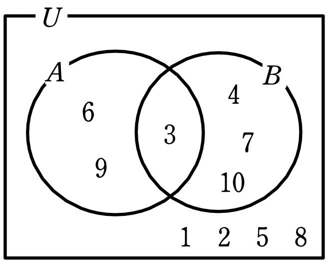
よって

　$A\cup B=\{3, 4, 6, 7, 9, 10\}$

また，　$A\cap B=\{3\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\}$ より

　$A=\{3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{3,\ 4,\ 7,\ 10\}$

　$A\cap\overline{B}=\{6,\ 9\}$



例10

実数全体の集合を全体集合とし，$A=\{x \mid -1 \leqq x < 5\}$，$B=\{x \mid -3 < x \leqq 4\}$，$C=\overline{A} \cup \overline{B}$ とするとき，$A \cap C=\left\{x \mid {}^{ア}\boxed{} < x < {}^{イ}\boxed{}\right\}$，$A \cup \overline{C}=\left\{x \mid -{}^{ウ}\boxed{} \leqq x < {}^{エ}\boxed{}\right\}$ である。

解説

$A \cap B=\{x \mid -1 \leqq x \leqq 4\}$

ド･モルガンの法則より

$C=\overline{A} \cup \overline{B}=\overline{A \cap B}=\{x \mid x<-1,\ 4<x\}$

よって

$A \cap C=\{x \mid {}^{ア}4 < x < {}^{イ}5\}$

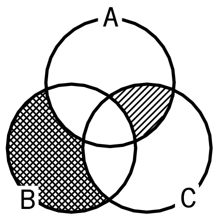
$\overline{C}=\{x \mid -1 \leqq x \leqq 4\}$ より

$A \cup \overline{C}=\{x \mid -{}^{ウ}1 \leqq x < {}^{エ}5\}$

例11

集合 A, B, C が図のような関係をもっているとき，斜線の部分と格子の部分はそれぞれどのように表されるか．次の解答群の中から選べ．

ここで，$\overline{\mathrm{A}}$ は A の補集合を表す．



〔解答群〕

（ア）　$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$　　（イ）　$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}$　　（ウ）　$\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{C}$

（エ）　$\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C}}$　　（オ）　$\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$　　（カ）　$\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}$

（キ）　$\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \mathrm{C}$　　（ク）　$\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{C}}$

解説

斜線の部分は，A の内部かつ B の外部かつ C の内部である

格子の部分は，A の外部かつ B の内部かつ C の外部である

斜線部分 (ウ)，格子部分 (カ)

確認問題1

整数 n がある整数の 2 乗で表されるとき，n は平方数であるという。 2 つの平方数の和で表される整数全体の集合を A とする。例えば，$0=0^2+0^2$ より $0\in A$ であり，また，$13=2^2+3^2$ より $13\in A$ である。

(1)　整数 a，b，x，y に対して，等式

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

が成り立つことを示せ。

(2)　2 つの整数 α，β が A の要素であるとき，積 $\alpha\beta$ は A の要素であることを示せ。

(3)　25，50，1250 のそれぞれが A の要素であることを示せ。

解説

(1) (右辺)$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=a^2(x^2+y^2)+b^2(y^2+x^2)$

$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=$(左辺)　終

(2) $\alpha, \beta\in A$ より

$\alpha=a^2+b^2$，$\beta=x^2+y^2$　(a, b, x, y は整数)

と表せる

このとき，(1) より

$\alpha\beta=(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

$ax+by$，$ay-bx$ は整数であるから　$\alpha\beta\in A$　終

(3) $25=5\times5$

$5=1^2+2^2$ より，　$5\in A$

(2)より，　$25=5\times5\in A$

$50=2\times25$

$2=1^2+1^2$ より，　$2\in A$

(2)より，　$50=2\times25\in A$

(2)より，　$1250=25\times50\in A$　終

確認問題2

9で割り切れる整数全体の集合をA，15で割り切れる整数全体の集合をBとする．$C=\{x+y \mid x\in A,\ y\in B\}$とするとき，Cは3で割り切れる整数全体の集合と一致することを示せ．

解説

Zを整数全体の集合とする

$C=\{9k+15l \mid k\in Z, l\in Z\}$, $D=\{3m \mid m\in Z\}$である

$9k+15l=3(3k+5l)$であり，$3k+5l\in Z$であるから，$C\subset D$

$9k+15l=3$の解の1つは$x=-3, y=2$より

$$9\cdot(-3)+15\cdot 2=3$$

両辺mをかけて

$$9\cdot(-3m)+15\cdot 2m=3m$$

よって，すべての$3m$は$3m=9k+15l$ $(k\in Z, l\in Z)$と表せるので，

$D\subset C$

したがって，$C=D$　終

確認問題3

自然数全体の集合をNとする．3で割り切れるNの要素全体の集合をA，5で割り切れるNの要素全体の集合をB，7で割り切れるNの要素全体の集合をCとする．

ア$\boxed{}$，イ$\boxed{}$，ウ$\boxed{}$，エ$\boxed{}$には下の(a)～(n)の中から正しいものを選べ．

(1)　15で割り切れるNの要素全体の集合はア$\boxed{}$である．

(2)　15でも21でも割り切れるNの要素全体の集合はイ$\boxed{}$である．

(3)　15または7で割り切れるNの要素全体の集合はウ$\boxed{}$である．

(4)　15または21で割り切れるNの要素全体の集合はエ$\boxed{}$である．

(a)　$A \cup B$	(b)　$B \cup C$	(c)　$C \cup A$
(d)　$A \cap B$	(e)　$B \cap C$	(f)　$C \cap A$
(g)　$A \cap B \cap C$	(h)　$A \cup B \cup C$	(i)　$(A \cap B) \cup C$
(j)　$(A \cup B) \cap C$	(k)　$(A \cap C) \cup B$	(l)　$(A \cup C) \cap B$
(m)　$A \cup (B \cap C)$	(n)　$A \cap (B \cup C)$	

解説

(1) $15=3\times5$であるから，3でも5でも割り切れる数の集合である．

よって，$A \cap B$，つまり(d)　答

(2) $15=3\times5$，$21=3\times7$

よって，$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$，つまり(g)　答

(3) $(A \cap B) \cup C$，つまり(i)　答

(4) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$，つまり(n)　答

確認問題4

1から49までの自然数からなる集合を全体集合 U とする。U の要素のうち，50との最大公約数が1より大きいもの全体からなる集合を V, また，U の要素のうち，偶数であるもの全体からなる集合を W とする。いま A と B は U の部分集合で，次の2つの条件を満たすとするとき，集合 A の要素をすべて求めよ。

(i) $A \cup \overline{B} = V$　　(ii) $\overline{A} \cap \overline{B} = W$

解説

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 49\}$

$50 = 2 \cdot 5^2$ より

$V = \{2,\ 4,\ \cdots,\ 48,\ 5,\ 15,\ 25,\ 35,\ 45\}$, $W = \{2,\ 4,\ \cdots,\ 48\}$

(ⅰ)より

$\overline{V} = \overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B$

これと(ⅱ)より

$\overline{V} \cup W = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \overline{A}$

よって

$A = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{V} \cup W} = V \cap \overline{W} = \{5, 15, 25, 35, 45\}$

よって，A の要素は

5，15，25，35，45　答