3.5　いろいろな面積(1)

(1) 絶対値のついた関数の定積分

絶対値のついた関数の定積分は，絶対値が関数の全体についているか，あるいは，関数の一部についているかなどの絶対値のつき方や，定積分を計算として捉えるか，面積として捉え幾何的に考えるかなど，関数により適切な処理の仕方があります。まずは，絶対値が関数の一部についている場合から考えます。このようなときは，場合分けをして絶対値を外して考えるとよい。

例1

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{3}x|x-1|dx$ を求めよ.

(解説)

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx=\int_{-1}^{3}(x^2-2|x|+1)dx$

$|x|=\begin{cases}x\ (x\geqq 0)\\ -x\ (x<0)\end{cases}$ より

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_{0}^{3}(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{3}=\frac{10}{3}$$

別解

$$\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx=\int_{-1}^{3}(x^2-2|x|+1)dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x^2+1)dx-2\int_{-1}^{3}|x|dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{3}-2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)$$

$$=\frac{40}{3}-10=\frac{10}{3}$$

注 $\displaystyle\int_{-1}^{3}|x|dx$ は $-1\leqq x\leqq 3$ において， $y=x$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を表します。

(2) $|x-1|=\begin{cases}-(x-1) & (x\leqq 1)\\ x-1 & (1\leqq x)\end{cases}$ より

$$\int_0^3 x|x-1|dx=-\int_0^1 x(x-1)dx+\int_1^3 x(x-1)dx$$

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}&=-\{F(1)-F(0)\}+\{F(3)-F(1)\}\\&=F(0)+F(3)-2F(1)\\&=\frac{9}{2}-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{29}{6}\end{aligned}$$

次に，絶対値が関数の全体についている場合について考えます。

$a\leqq x\leqq b$ において， $f(x)$ が $f(x)\geqq 0$ と $f(x)\leqq 0$ の部分があるとき，

$a\leqq x\leqq b$ において， $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$a\leqq x\leqq c$ で $f(x)\geqq 0$ ， $c\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq 0$ ($a<c<b$) とすると

$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx$$

$|f(x)|=\begin{cases}f(x) & (f(x)\geqq 0)\\ -f(x) & (f(x)\leqq 0)\end{cases}$ であるから

$$=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

これは， $a\leqq x\leqq b$ において， $f(x)$ が常に $f(x)\geqq 0$, $f(x)\leqq 0$ のときも成り立つので，一般に次のことが成り立ちます。

$a\leqq x\leqq b$ において， $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S は $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

この結果も含め， $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ の処理の仕方として，次の 3 つの方法があります。

$\int_a^b |f(x)|dx$ **の処理の仕方**

1. $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0, f(x) \leqq 0$ で場合分けをし，絶対値を外して処理する。

2. $a \leqq x \leqq b$ において，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積として処理する。

3. $|f(x)| \geqq 0$ であるから，$a \leqq x \leqq b$ において，$y=|f(x)|$ と x 軸で囲まれた図形の面積として処理する。

例2

(1) 定積分 $\int_0^2 |x^2-x|dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^2 |x^2-1|dx$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^3 |x^2-3x+2|dx$ を求めよ.

(4) 定積分 $I=\int_{-1}^2 |x^3-3x^2+2x|dx$ の値を求めよ。

(解説)

(1) $\int_0^2 |x^2-x|dx = -\int_0^1 (x^2-x)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx$

$$= -\int_0^1 x(x-1)dx + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1^3}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=1$$

(2) $\int_0^2 |x^2-1|dx = -\int_0^1 (x^2-1)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$

$F(x)=\frac{x^3}{3}-x$ とおくと

$$= -\{F(1)-F(0)\}+\{F(2)-F(1)\}$$

$$= F(0)+F(2)-2F(1)$$

$$= \frac{2}{3}-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=2$$

(3) $\int_0^3 |x^2-3x+2|dx$

$$= \int_0^1 (x^2-3x+2)dx - \int_1^2 (x^2-3x+2)dx + \int_2^3 (x^2-3x+2)dx$$

$F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+2x$ とおくと

$$=\{F(1)-F(0)\}-\{F(2)-F(1)\}+\{F(3)-F(2)\}$$
$$=2F(1)+F(3)-F(0)-2F(2)$$
$$=2\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-2\cdot\frac{2}{3}=\frac{11}{6}$$

別解

放物線は軸に関して対称であるから

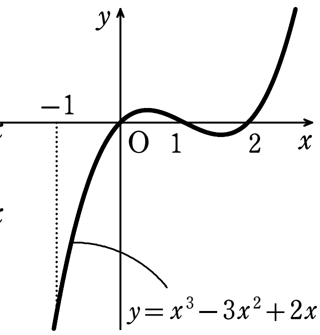
$\displaystyle\int_0^1(x^2-3x+2)dx=\int_2^3(x^2-3x+2)dx$ より

$$\int_0^3|x^2-3x+2|dx=2\int_0^1(x^2-3x+2)dx-\int_1^2(x^2-3x+2)dx$$

と計算してもよい。

(4) $\displaystyle\int_{-1}^2|x^3-3x^2+2x|dx$

$$=-\int_{-1}^0(x^3-3x^2+2x)dx+\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx-\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx$$



3 次関数の点対称性から

$\displaystyle\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx=-\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx$ より

$$=-\int_{-1}^0(x^3-3x^2+2x)dx+2\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx$$

$F(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^3+x^2$ とおくと

$$=-\{F(0)-F(-1)\}+2\{F(1)-F(0)\}$$
$$=F(-1)+2F(1)-3F(0)$$
$$=\frac{9}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$$

例3

関数 $f(x)=|x^2-4x+3|$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 関数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を x の式で表せ。ただし，$x\geqq 0$ とする。

(3) $F(x)=2$ を満たす x を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=|(x-1)(x-3)|$ であるから

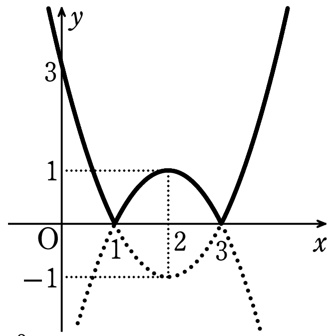
$x\leqq 1$，$3\leqq x$ のとき

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

$1<x<3$ のとき

$f(x)=-(x^2-4x+3)=-(x-2)^2+1$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図



(2)(i) $0\leqq x<1$ のとき

$$F(x)=\int_0^x (t^2-4t+3)dt=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_0^x=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$$

(ii) $1\leqq x<3$ のとき

$$F(x)=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt+\int_1^x \{-(t^2-4t+3)\}dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_0^1-\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_1^x=-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+\frac{8}{3}$$

(iii) $x\geqq 3$ のとき

$$F(x)=\int_0^1 (t^2-4t+3)dt+\int_1^3 \{-(t^2-4t+3)\}dt+\int_3^x (t^2-4t+3)dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_0^1-\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_1^3+\left[\frac{t^3}{3}-2t^2+3t\right]_3^x$$

$$=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+\frac{8}{3}$$

(3) $f(x)\geqq 0$ であるから，関数 $F(x)$ は単調増加

(i) $0\leqq x<1$ のとき

$F(x)<F(1)=\dfrac{4}{3}<2$ より，$F(x)=2$ を満たす x は存在しない

(ii) $1\leqq x<3$ のとき

$F(x)=2$ とすると

$$-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+\frac{8}{3}=2$$

$$x^3-6x^2+9x-2=0$$

$(x-2)(x^2-4x+1)=0$　　$x=2$，$2\pm\sqrt{3}$

$1\leqq x<3$ より，$x=2$

(iii) $x\geqq 3$ のとき

$F(x) \geqq F(3)=\dfrac{8}{3}>2$ より，$F(x)=2$ を満たす x は存在しない

(ⅰ)～(ⅲ)より

$x=2$

$a \leqq x \leqq b$ において， $f(x)$ と $g(x)$ について $f(x) \geqq g(x), f(x) \leqq g(x)$ の部分があるとき， $a \leqq x \leqq b$ において， $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は $a \leqq x \leqq c$ で $f(x) \geqq g(x)$ ， $c \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq g(x)$ ($a<c<b$) とすると

$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b -\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$|f(x)-g(x)|=\begin{cases} f(x)-g(x) \ (f(x)-g(x) \geqq 0) \\ -\{f(x)-g(x)\} \ (f(x)-g(x) \leqq 0) \end{cases}$$ より

$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

これは， $a \leqq x \leqq b$ において， 常に $f(x) \geqq g(x)$, $f(x) \leqq g(x)$ のときも成り立つので，一般に次のことが成り立ちます。

> $a \leqq x \leqq b$ において， $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S は
>
> $$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

> 例4
>
> 0 以上の実数 t に対し，$F(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|dx$ とする。
>
> (1)　$F(t)$ を t を用いて表せ。
>
> (2)　$t \geqq 0$ において，関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ。

解説

(1) $$|x^2-t^2|=\begin{cases} x^2-t^2 \ (x \leqq -t,\ t \leqq x) \\ -(x^2-t^2) \ (-t \leqq x \leqq t) \end{cases}$$

$t \geqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|dx=\int_0^1 (t^2-x^2)dx=\left[t^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=t^2-\frac{1}{3}$$

$0 \leqq t < 1$ のとき

$$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx=-\int_0^t (x^2-t^2)\,dx+\int_t^1 (x^2-t^2)\,dx=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

よって

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3} & (0\leqq t<1)\\[2mm] t^2-\dfrac{1}{3} & (t\geqq 1)\end{cases}$$

(2) (i) $t \geqq 1$ のとき

$F'(t)=2t>0$ より $F(t)$ は単調増加

(ii) $0 \leqq t < 1$ のとき

$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$

$F'(t)=0$ のとき，$t=0,\ \dfrac{1}{2}$

$F(t)$ の増減表は右図

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$F(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

$F(t)$ が最小値をとるとき，$t=\dfrac{1}{2}$

別解

$F(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において，

$y=x^2$ と $y=t^2$ が囲む部分の面積に等しいから，はみ出し削り論法より，

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $F(t)$ は最小となる

例5

a を実数とする。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 |x^2-ax|\,dx$ を求めよ。

(2)　この定積分の値を最小にする a の値と，そのときの定積分の値を求めよ。

解説

$f(a)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-ax|\,dx$ とおく

(1)（ｉ）$a<0$ のとき

$$f(a)=\int_0^1 (x^2-ax)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

（ii）$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$f(a)=-\int_0^a (x^2-ax)dx+\int_a^1 (x^2-ax)dx$$

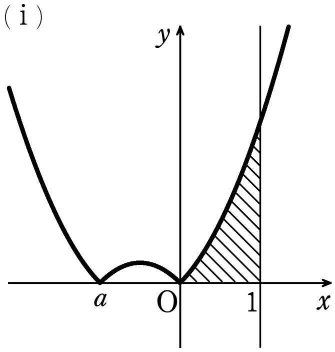
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

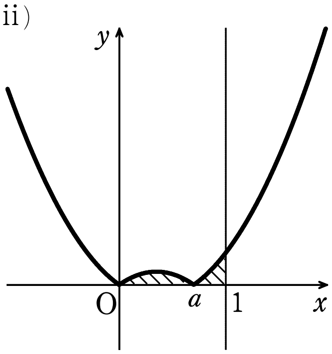
（iii）$1<a$ のとき

$$f(a)=-\int_0^1 (x^2-ax)dx=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}$$

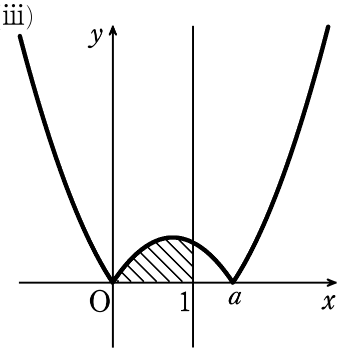
（ｉ）



（ii）



（iii）



(2)（ｉ）$a<0$ のとき，$f(a)$ は単調減少

（ii）$1<a$ のとき，$f(a)$ は単調増加

（iii）$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$$

$f'(a)=0$ のとき，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f(a)$の増減表は右図

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(a)$	↘	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	$\frac{1}{6}$	↗

よって，$f(a)$ は $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で最小

最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

別解

$f(a)=\int_0^1|x^2-ax|dx$ は $0\leqq x\leqq 1$ において，

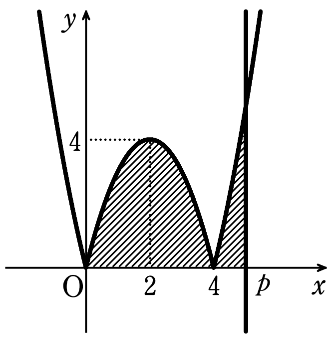
$y=x^2$ と $y=ax$ が囲む部分の面積に等しいから，はみ出し削り論法より，$y=ax$ が $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，すなわち $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(a)$ は最小となる。

(2) **面積の 2 等分**

例6
(1)　曲線 $y=|x(4-x)|$，x 軸および直線 $x=p$ $(p>4)$ で囲まれた図形 D の面積を求めよ.
(2)　図形 D の，直線 $x=4$ の左側の部分と右側の部分の面積が等しいとき，p の値を求めよ.

解説

(1) 求める面積は



$$\int_0^p|x(4-x)|dx$$
$$=-\int_0^4(x^2-4x)dx+\int_4^p(x^2-4x)dx$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2$$
$$=-\{F(4)-F(0)\}+\{F(p)-F(4)\}$$
$$=F(0)+F(p)-2F(4)$$
$$=\frac{p^3}{3}-2p^2+\frac{64}{3}$$

(2) 直線 $x=4$ の左側の部分と右側の部分の面積が等しいとき

$$-\int_0^4 x(4-x)dx=\int_4^p x(4-x)dx$$

$$\int_0^4 x(4-x)dx+\int_4^p x(4-x)dx=0$$

$$\int_0^p(x^2-4x)dx=0$$

$$\frac{p^3}{3}-2p^2=0$$

$p^2(p-6)=0$

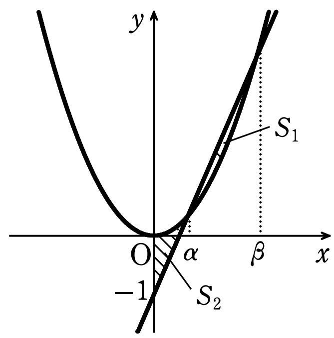
$p>4$ より， $p=6$

注 問題を $y=|x(4-x)|$ から $y=x(4-x)$ に置き換えても同じことである。

例7

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=cx-1$ が異なる 2 点で交わる場合，放物線と直線で囲まれた部分の面積を S_1，放物線と直線および y 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，$S_1=S_2$ となる c の値を求めよ.

(解説)



対称性より， $c>0$ で考える

$y=x^2$ と $y=cx-1$ との交点の x 座標は

$x^2=cx-1$

$x^2-cx+1=0$

これらが異なる 2 実解をもてばよいから

判別式を D とすると $D>0$ より

$D=c^2-4>0 \quad \therefore c>2$

このときの 2 実解を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とおく

$S_1=S_2$ となるとき

$$\int_0^\alpha (x^2-cx+1)dx=\int_\alpha^\beta (cx-1-x^2)dx$$

$$\int_0^\alpha (x^2-cx+1)dx=-\int_\alpha^\beta (x^2-cx+1)dx$$

$$\int_0^\alpha (x^2-cx+1)dx+\int_\alpha^\beta (x^2-cx+1)dx=0$$

$$\int_0^\beta (x^2-cx+1)dx=0$$

$$\therefore \frac{\beta^3}{3}-\frac{c}{2}\beta^2+\beta=0 \quad \therefore 2\beta^2-3c\beta+6=0 \cdots ①$$

また，β は $x^2-cx+1=0$ の解より， $\beta^2-c\beta+1=0 \cdots ②$

①，②より

$$\beta^2=3 \quad \therefore \beta=\sqrt{3},\ c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

対称性を考えて， $c=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

例8

関数 $f(x)=x(x-a)(x-b)$ $(0<a<b)$ とし，曲線 C：$y=f(x)$ と x 軸との交点を左から順に O，A，B とする．曲線 C と線分 OA，曲線 C と線分 AB によって囲まれる部分をそれぞれ S，T とする．S，T の面積が等しくなるのは $b=$ ア$\boxed{}$ a のときであり，このとき，S の面積は

$\dfrac{1}{イ\boxed{}}a^{ウ\boxed{}}$ である．

解説

S の面積を S_1，T の面積を S_2 とする

$S_1=S_2$ のとき

$$\int_0^a x(x-a)(x-b)dx=-\int_a^b x(x-a)(x-b)dx$$

$$\int_0^a x(x-a)(x-b)dx+\int_a^b x(x-a)(x-b)dx=0$$

$$\int_0^b x(x-a)(x-b)dx=0$$

ここで

$$\int_0^b x(x-a)(x-b)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{ab}{2}x^2\right]_0^b$$

$$=\frac{b^4}{4}-\frac{a+b}{3}\cdot b^3+\frac{ab}{2}\cdot b^2=0$$

$$3b-4(a+b)+6a=0\ (\,b\neq 0\,)\qquad \therefore\ b=2a$$

このとき S の面積は

$$\int_0^a x(x-a)(x-2a)dx=\int_0^a x(x-a)\{(x-a)-a\}dx$$

$$=\int_0^a x(x-a)^2dx-a\int_0^a x(x-a)dx$$

$$=\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^4=\frac{1}{4}a^4$$

注 当たり前の結果であるが， x 軸が $y=x(x-a)(x-b)$ の点対称の中心の点を通るときに $S_1=S_2$ となります。

例9

xy 平面上の曲線 C と直線 l を次のように定める．

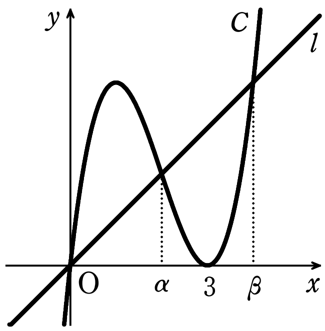
$C: y=x(x-3)^2,\ l: y=mx$

(1)　C と l が $x \geqq 0$ において異なる 3 点で交わるような m の値の範囲を求めよ．

(2)　(1) で，C と l で囲まれる 2 つの図形の面積が等しくなる m の値を求めよ．

(3)　(2) のとき，2 つの図形の面積の和を求めよ．

解説



(1) $f(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$ とおく

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$y=f(x)$ の $x=0$ における接線の傾きは

$f'(0)=9$

グラフより

$0<m<9$

(2) 曲線 C と直線 l の 3 つの交点の x 座標を $0, \alpha, \beta\ (0<\alpha<\beta)$ とおく

C と l で囲まれる 2 つの図形の面積が等しくなるとき

$$\int_0^\alpha \{x(x-3)^2-mx\}dx=\int_\alpha^\beta \{mx-x(x-3)^2\}dx$$

$$\int_0^\beta \{x(x-3)^2-mx\}dx=0$$

$$\int_0^\beta (x^3-6x^2+9x-mx)dx=0$$

$$\frac{1}{4}\beta^4-2\beta^3+\frac{9}{2}\beta^2-\frac{m}{2}\beta^2=0$$

$\beta^2-8\beta+18-2m=0$ …①（$\beta \fallingdotseq 0$）

$x=\beta$ は $x^2-6x+9-m=0$ の解より

$\beta^2-6\beta+9-m=0$ …②

①，②より

$\beta^2-4\beta=0$

$\beta \fallingdotseq 0$ より，　$\beta=4, m=1$

注

l が C の点対称の中心を通るときに C と l で囲まれる 2 つの図形の面積が等しくなります。C の点対称の中心の x 座標は $y=f'(x)$ の頂点の x 座標であるから，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-2)^2-3$ より C の点対称の中心は $(2, 2)$ である。l がこの点を通るとき，$m=1$ となります。

また，3 次関数の点対称の中心は変曲点という点になります。理系の微積分の範囲で学びますが，3 次関数の変曲点の x 座標は $f''(x)=0$ の解となります。この場合，$f''(x)=6x-12$（$f''(x)=\{f'(x)\}'$）であるから，$f''(x)=0$ のとき，$x=2$ となります。

別解

積分値が一致することから，$0\leqq x\leqq\alpha, \alpha\leqq x\leqq\beta$ で l と C で囲まれる部分の面積は，それぞれ $0\leqq x\leqq\alpha, \alpha\leqq x\leqq\beta$ において $y=x(x-3)^2-mx$ と x 軸で囲まれる部分の面積に等しくなります。

$y=x(x-3)^2-mx$ と x 軸との共有点の x 座標は，

$$x(x-3)^2-mx=0$$

$$x(x^2-6x+9-m)=0$$

$x=0$ 以外の解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=9-m$$

例8 の結果より $\beta=2\alpha$ であるから，$\alpha=2, \beta=4, m=1$

(3) 求める面積 S は，(2)より

$$S=2\int_0^2\{x(x-3)^2-x\}dx$$

$$=2\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx$$

$$=2\int_0^2 x(x-2)(x-4)dx$$

$$=2\int_0^2 x(x-2)\{(x-2)-2\}dx$$

$$=2\int_0^2 x(x-2)^2dx-4\int_0^2 x(x-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot2^4+\frac{2}{3}\cdot2^3=8$$

例10

2つの曲線 $y=x(x-1)^2$, $y=kx^2$ $(k>0)$ について

(1)　この2つの曲線は相異なる3点で交わることを示せ.

(2)　この2つの曲線で囲まれる2つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ.

解説

(1) 2つの曲線 $y=x(x-1)^2$, $y=kx^2$ の共有点の x 座標は

$$x(x-1)^2=kx^2$$

$$x\{x^2-(k+2)x+1\}=0 \cdots ①$$

$$\therefore\ x=0,\ x^2-(k+2)x+1=0 \cdots ②$$

②は $x=0$ を解にもたず，②の判別式を D とすると

$$D=(k+2)^2-4=k^2+4k=k(k+4)>0$$

より， $x^2-(k+2)x+1=0$ は2つの異なる実数解をもつから

方程式①は異なる3つの実数解をもつ

ゆえに，2つの曲線 $y=x(x-1)^2$, $y=kx^2$ は相異なる3点で交わる

(2) ②の解 α, β とすると， $0<\alpha<\beta$ である

2つの曲線で囲まれる2つの部分の面積が等しいとき

$$\int_0^{\alpha}\{x(x-1)^2-kx^2\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{kx^2-x(x-1)^2\}dx$$

$$\int_0^{\beta}\{x(x-1)^2-kx^2\}dx=0$$

$$\int_0^{\beta}\{x^3-(k+2)x^2+x\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k+2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\beta}=0$$

$$3\beta^2-4(k+2)\beta+6=0\ (\beta\neq 0)\cdots ③$$

β は②の解より

$$\beta^2-(k+2)\beta+1=0 \cdots ④$$

③，④より

$$\beta^2=2$$

$\beta>0$ より， $\beta=\sqrt{2}$　　$\therefore\ k=\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}$

別解

$\displaystyle\int\{x^3-(k+2)x^2+x\}dx=\int\{x^3-(k+2)x^2-(-x)\}dx$ であるから

2 つの曲線が囲む部分の面積は，それぞれの区間において

$y=x^3-(k+2)x^2$ と $y=-x$ とが囲む面積に等しいから，

$y=-x$ が $y=x^3-(k+2)x^2$ の対称の中心を通るときの k の値を求める。

別解

2 つの曲線が囲む部分の面積は，それぞれの区間において

$y=x^3-(k+2)x^2+x$ と x 軸で囲まれる部分の面積に等しいから，

$x^3-(k+2)x^2+x=0$ の $x=0$ 以外の解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ として，解と係数の関係と $\beta=2\alpha$ を利用して k の値を求める。

確認問題1

関数 $f(t)=\int_t^{t+1}|x^2-1|dx$ を最小にする t の値を求めよ．

(解説)

(ⅰ) $t+1\leqq -1$ すなわち $t\leqq -2$ のとき

$$f(t)=\int_t^{t+1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_t^{t+1}=t^2+t-\frac{2}{3}$$

$f'(t)=2t+1<0$ より

$f(t)$ は単調減少

(ⅱ) $t\leqq -1<t+1$ すなわち $-2<t\leqq -1$ のとき

$$f(t)=\int_t^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{t+1}(1-x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_t^{-1}+\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{t+1}$$

$$=-\frac{2}{3}t^3-t^2+t+2$$

$f'(t)=-2t^2-2t+1$

$f'(t)=0$ のとき， $t=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

増減表は下図

t	-2	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	-1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

(ⅲ) $-1<t,\ t+1\leqq 1$ すなわち $-1<t\leqq 0$ のとき

$$f(t)=\int_t^{t+1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_t^{t+1}=-t^2-t+\frac{2}{3}$$

$f'(t)=-2t-1$

$t<-\dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ は増加， $t\geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき $f(t)$ は減少

(ⅳ) $t\leqq 1<t+1$　すなわち　$0<t\leqq 1$ のとき

$$f(t)=\int_t^{1}(1-x^2)dx+\int_1^{t+1}(x^2-1)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_t^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{t+1}$$

$$=\frac{2}{3}t^3+t^2-t+\frac{2}{3}$$

$f'(t)=2t^2+2t-1$

$f'(t)=0$ のとき， $t=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

(ｖ) $1<t$ のとき

$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}(x^2-1)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}-x\right]_t^{t+1}=t^2+t-\dfrac{2}{3}$

$f'(t)=2t+1>0$

$f(t)$ は単調増加

(ｉ)～(ｖ)より

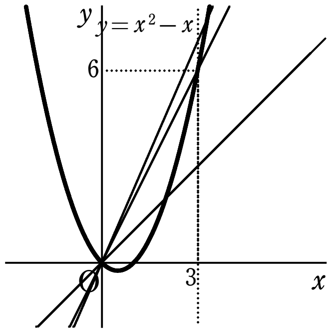
$y=|x^2-1|$ は y 軸対称であるから

$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ のとき最小

確認問題2

$f(x)=x^2-x$，$g(x)=mx$ とする。積分 $h(m)=\int_0^3|f(x)-g(x)|dx$ について，m が $0\leqq m\leqq 3$ を満たしながら動くとき，$h(m)$ の最大値は ア$\boxed{\quad}$，最小値は $\dfrac{{}^{イ}\boxed{\quad}-{}^{ウ}\boxed{\quad}\sqrt{2}}{2}$ である。

(解説)



$h(m)$ は，$0\leqq x\leqq 3$ において，

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積の和である

(ｉ) $0\leqq m\leqq 2$ のとき

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^2-x=mx$$

$$x\{x-(m+1)\}=0 \qquad \therefore\ x=0,\ m+1$$

$$h(m)=\int_0^{m+1}\{mx-(x^2-x)\}dx+\int_{m+1}^3\{(x^2-x)-mx\}dx$$

$$=\frac{1}{6}(m+1)^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{m+1}{2}x^2\right]_{m+1}^3$$

$$=\frac{1}{3}(m+1)^3-\frac{9}{2}(m+1)+9$$

$$h'(m)=m^2+2m-\frac{7}{2}$$

$h'(m)=0$ のとき，$m=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$

増減表は下図

m	0	$\cdots$	$\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	2
$h'(m)$		$-$	0	$+$	
$h(m)$		↘	極小	↗	

(ii) $0\leqq m\leqq 2$ のとき，$h(m)$ は明らかに単調増加

よって，$h(m)$ は $m=3$ のとき最大値 ア9 をとり，

$m=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{{}^{イ}18-{}^{ウ}9\sqrt{2}}{2}$ をとる

確認問題3

定数 a，b に対して，$f(x)=x^3+ax^2+bx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ が x 軸と相異なる 3 点で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b の満たす条件を求めよ。

(2)　$b<0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積の和を a，b を用いて表せ。

(3)　$b>0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるための a，b の条件を求めよ。

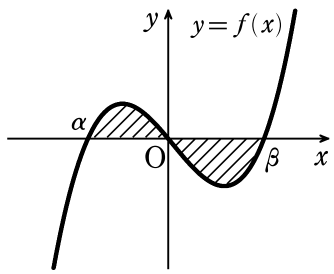
解説

(1) $f(x)=0$ のとき，　$x(x^2+ax+b)=0$

$y=f(x)$ が x 軸と相異なる 3 点で交わるとき

$x^2+ax+b=0$ が 0 以外の異なる 2 つの実数解をもてばよいから

$$a^2-4b>0 \text{ かつ } b\neq 0$$



(2) $x^2+ax+b=0$ の異なる 2 つの実数解を α，β とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=b$$

$b<0$ のとき $\alpha\beta<0$ より

α と β は異符号であるから，$\alpha<0<\beta$ とし，

求める面積の和を S とすると

$$S=\int_\alpha^0 (x^3+ax^2+bx)dx-\int_0^\beta (x^3+ax^2+bx)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_\alpha^0-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^\beta$$

$$=-\frac{1}{4}(\alpha^4+\beta^4)-\frac{a}{3}(\alpha^3+\beta^3)-\frac{b}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

ここで

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2b$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-a^3+3ab$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(a^2-2b)^2-2b^2=a^4-4a^2b+2b^2$$

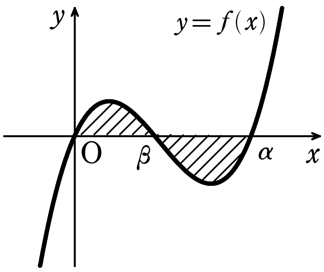
より

$$S=-\frac{1}{4}(a^4-4a^2b+2b^2)-\frac{a}{3}(-a^3+3ab)-\frac{b}{2}(a^2-2b)$$

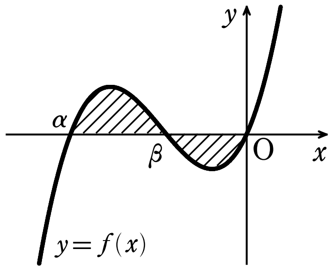
$$=\frac{a^4}{12}-\frac{a^2b}{2}+\frac{b^2}{2}$$

(3) $b>0$ のとき $\alpha\beta>0$ より，α，β は同符号である

(i) $0<\beta<\alpha$ のとき



(ii) $\alpha<\beta<0$ のとき



(i) $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるとき

$$\int_0^\beta f(x)dx=\int_\beta^\alpha\{-f(x)\}dx$$

$$\int_0^\beta f(x)dx+\int_\beta^\alpha f(x)dx=0 \quad \therefore \int_0^\alpha f(x)dx=0$$

(ii) $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積が等しくなるとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\beta^0\{-f(x)\}dx$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^0 f(x)dx=0 \quad \therefore \int_\alpha^0 f(x)dx=0 \quad \therefore \int_0^\alpha f(x)dx=0$$

(i)，(ii)から，$\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx=0$ より

$$\int_0^\alpha (x^3+ax^2+bx)dx=0$$

$$\frac{\alpha^4}{4}+\frac{a}{3}\alpha^3+\frac{b}{2}\alpha^2=0$$

$$3\alpha^2+4a\alpha+6b=0$$

$a=-(\alpha+\beta)$，$b=\alpha\beta$ より

$$3\alpha^2-4(\alpha+\beta)\alpha+6\alpha\beta=0$$

$$-\alpha^2+2\alpha\beta=0$$

$\alpha\fallingdotseq 0$ より，$\alpha=2\beta$

よって

$$a=-(2\beta+\beta)=-3\beta\,,\quad b=2\beta\cdot\beta=2\beta^2$$

$$\therefore \beta=-\frac{a}{3} \quad \therefore b=\frac{2}{9}a^2$$

確認問題4

(1)　放物線 C_1：$y=a^2-(x-a)^2$ と直線 $x=1$ との交点の y 座標 b が $0<b<1$ を満たすような a の値の範囲を求めよ.

(2)　a が (1) で得られた範囲にあるとき，C_1 と放物線 C_2：$y=x^2$ で囲まれる部分の面積が，C_1，C_2 と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積に等しくなるような a の値を求めよ.

(解説)

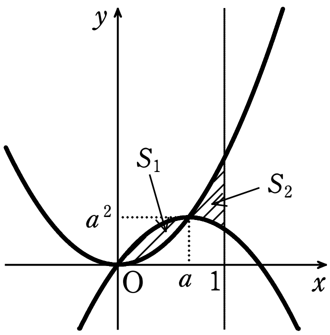
(1) $y=a^2-(x-a)^2$ に $x=1$，$y=b$ を代入して

$$b=a^2-(1-a)^2 \quad \therefore\ b=2a-1$$

$0<b<1$ より

$$0<2a-1<1 \quad \therefore\ \frac{1}{2}<a<1$$

(2) 右図の斜線部分の面積を S_1，S_2 として



$S_1=S_2$ のとき

$$\int_0^a \{a^2-(x-a)^2-x^2\}dx$$

$$=\int_a^1 \{x^2-\{a^2-(x-a)^2\}\}dx$$

$$\int_0^1 [x^2-\{a^2-(x-a)^2\}]dx=0$$

$$\int_0^1 (2x^2-2ax)dx=0$$

$$\left[\frac{2}{3}x^3-ax^2\right]_0^1=0$$

$$\frac{2}{3}-a=0 \quad \therefore\ a=\frac{2}{3}$$

確認問題5

a を実数とする。xy 平面上の 2 つの曲線 C_1：$y=x^3$ と C_2：$y=2x^2-ax$ を考える。

(1)　2 曲線 C_1，C_2 が異なる 3 つの交点をもつための a の条件を求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 が異なる 3 つの交点をもち，C_1 と C_2 で囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

解説

(1) C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$x^3=2x^2-ax$$

$$x^3-2x^2+ax=0$$

$$x(x^2-2x+a)=0$$

C_1 と C_2 が異なる 3 つの交点をもつとき

$x^2-2x+a=0$ …①が 0 以外の異なる 2 実解をもてばよいから

判別式を D として

$$\frac{D}{4}=1-a>0,\ a\neq 0 \qquad \therefore\ a<0,\ 0<a<1$$

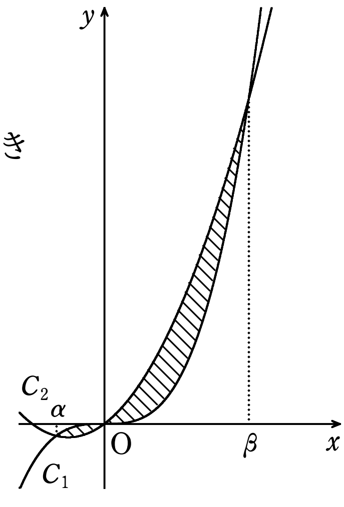
(2) ①の 2 解を α, β とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2,\ \ \alpha\beta=a$$

(i) $a<0$ のとき

$\alpha\beta<0$ より，$\alpha<0<\beta$ とすると

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が等しくなるとき



$$\int_\alpha^0\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^\beta\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$\int_\alpha^0\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^\beta\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

$$\therefore\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

このとき

$$(\text{左辺})=\int_\alpha^\beta\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{4}(\beta^4-\alpha^4)-\frac{\alpha+\beta}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{\alpha\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

$$=-\frac{(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3}{12}=0 \quad \therefore (\alpha+\beta)(\beta-\alpha)^3=0$$

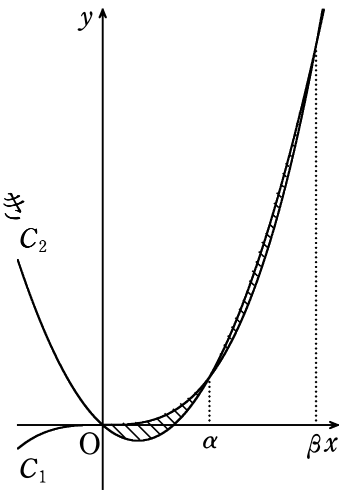
$\alpha+\beta=2\neq 0$，$\alpha<\beta$ より

これを満たす α，β は存在しない

(ii) $0<a<1$ のとき

$\alpha\beta>0$ より，$0<\alpha<\beta$ とすると

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が等しくなるとき



$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

$$\therefore \int_0^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx=0$$

このとき

$$(\text{左辺})=\int_0^{\beta}\{x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^{\beta}$$

$$=\frac{\beta^3\{3\beta-4(\alpha+\beta)+6\alpha\}}{12}=0 \quad \therefore \beta^3\{3\beta-4(\alpha+\beta)+6\alpha\}=0$$

$\alpha+\beta=2$，$\beta\neq 0$ より

$$6\alpha+3\beta=8$$

$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=a$ より

$$\alpha=\frac{2}{3},\ \beta=\frac{4}{3},\ a=\frac{8}{9}$$

(i)，(ii)より，$a=\dfrac{8}{9}$

別解

$\displaystyle\int\{x^2-ax-x^3\}dx=\{(x^2-x^3)-ax\}dx$ を利用して解く。