2.7　方程式への応用

(1) 方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。よって，関数 $y=f(x)$ の増減を調べてグラフをかくことにより，方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を調べることができます。

> **例1**
> (1)　方程式 $x^3-3x-1=0$ の正の実数解の個数と負の実数解の個数を求めよ。
> (2)　方程式 $x^3-3x-1+a=0$ (a は実数) の異なる実数解の個数が，定数 a の値によりどのように変わるかを調べよ。

解説

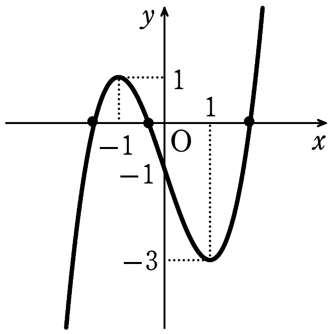
(1) $f(x)=x^3-3x-1$ とおく

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ のとき，　$x=-1$，1

増減表は下図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



$f(0)=-1$ より

$y=f(x)$ のグラフは右図

よって，方程式 $f(x)=0$ の

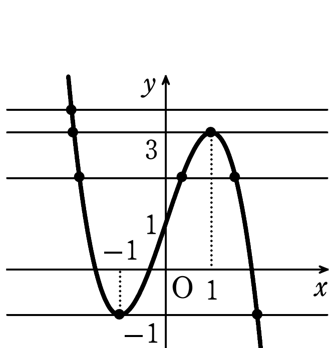
正の実数解は 1 個，負の実数解は 2 個

(2) $x^3-3x-1+a=0$

$\quad -(x^3-3x-1)=a$

この方程式の実数解の個数は，

$y=-f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に等しいから，グラフより



$\quad a<-1$，$3<a$ のとき　1 個

$\quad a=-1$，3 のとき　2 個

$\quad -1<a<3$ のとき　3 個

例2
3 次方程式 $x^3-3x^2-9x+k=0$ が異なる 2 つの正の解と 1 つの負の解をもつとき，定数 k の値の範囲は ${}^{ア}\boxed{}<k<{}^{イ}\boxed{}$ である。

(解説)

$x^3-3x^2-9x+k=0$

$-x^3+3x^2+9x=k$

$f(x)=-x^3+3x^2+9x$ とおくと

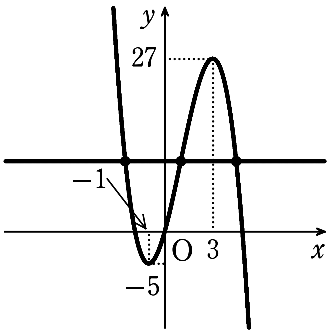
$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=-1$，3

増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -5	↗	極大 27	↘

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図



方程式 $f(x)=k$ の実数解は

$y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の x 座標に等しいから

2 つの正の解と 1 つの負の解をもつのは

グラフより

${}^{ア}0<k<{}^{イ}27$

例3

k を定数として，3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ ……(＊)を考える。

(1)　この方程式が，異なる 3 つの実数解をもつような k の値の範囲は

$$-\boxed{}^{\text{ア}}<k<\frac{\boxed{}^{\text{イ}}}{\boxed{}^{\text{ウ}}}$$ ……(＊＊)である。

(2)　k が(＊＊)の範囲にあるとき，方程式(＊)の 3 つの解を α，β，γ (ただし $\alpha<\beta<\gamma$) とおく。

(a)　k が(＊＊)の範囲を動くとき，α，β，γ のとりうる値の範囲は，それぞれ

$$-\frac{\boxed{}^{\text{エ}}}{\boxed{}^{\text{オ}}}<\alpha<-\boxed{}^{\text{カ}},\quad -\boxed{}^{\text{キ}}<\beta<\boxed{}^{\text{ク}},$$

$$\boxed{}^{\text{ケ}}<\gamma<\frac{\boxed{}^{\text{コ}}}{\boxed{}^{\text{サ}}}$$

である。

(b)　k が(＊＊)の範囲を動くとき，α と γ の積 $\alpha\gamma$ が最小となるのは

$k=-\dfrac{\boxed{}^{\text{シ}}}{\boxed{}^{\text{ス}}}$ のときであって，$\alpha\gamma$ の最小値は $-\dfrac{\boxed{}^{\text{セ}}}{\boxed{}^{\text{ソ}}}$ である。

(解説)

(1) $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$

$x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x=k$

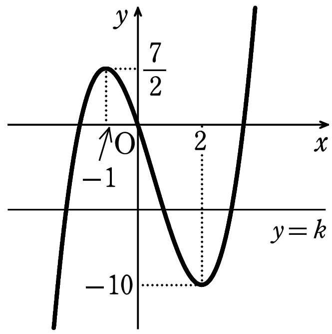
$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x$ とおく

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=-1$，2

増減表は下図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{7}{2}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図

方程式 (*) の実数解の個数は，

$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しいから，

共有点の個数がちょうど 3 個となる k の値の範囲は

$$-{}^{\text{ア}}10<k<\frac{{}^{\text{イ}}7}{{}^{\text{ウ}}2}$$

(2) (a) $k=-10$ のとき

$$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+10=0$$

$$2x^3-3x^2-12x+20=0$$

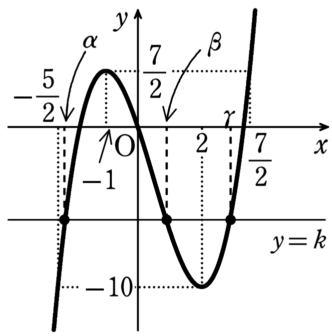
$$(x-2)^2(2x+5)=0 \quad \therefore\ x=-\frac{5}{2},\ 2$$

$k=\dfrac{7}{2}$ のとき

$$x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{7}{2}=0$$

$$2x^3-3x^2-12x-7=0$$

$$(x+1)^2(2x-7)=0 \quad \therefore\ x=-1,\ \frac{7}{2}$$



k が (**) の範囲を動くとき

$$-\frac{{}^{\text{エ}}5}{{}^{\text{オ}}2}<\alpha<-{}^{\text{カ}}1,\quad -{}^{\text{キ}}1<\beta<{}^{\text{ク}}2,$$

$${}^{\text{ケ}}2<\gamma<\frac{{}^{\text{コ}}7}{{}^{\text{サ}}2}$$

(b) α，β，γ は方程式 (*) の解であるから

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\ \cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6\ \cdots②,\quad \alpha\beta\gamma=k\ \cdots③$$

②より

$$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)-6$$

①より

$$\alpha\gamma=-\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)-6 \quad (-1<\beta<2)$$

$$=\beta^2-\frac{3}{2}\beta-6$$

$$=\left(\beta-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{105}{16}$$

$\beta=\dfrac{3}{4}$ のとき最小で，最小値 $-\dfrac{105}{16}$

このとき，③より

$$k=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{105}{16}\right)=-\frac{315}{64}$$

例4

$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。

解説

(1) $f(x)=2x^3+x^2-3$

$f'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$

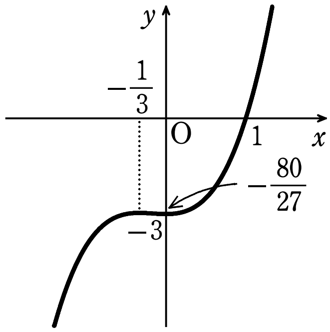
$f'(x)=0$ のとき，$x=0,\ -\dfrac{1}{3}$

増減表は下図

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $-\frac{80}{27}$	$\searrow$	極小 -3	$\nearrow$

$f(1)=0$

よって，$y=f(x)$ グラフの概形は右図



(2) $y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(6t^2+2t)x-4t^3-t^2-3$$

これが原点を通るとき

$$0=-4t^3-t^2-3$$

$$4t^3+t^2+3=0$$

$$(t+1)(4t^2-3t+3)=0$$

t は実数より，$t=-1$

このとき，接線の傾きは 4

よって，直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるのは

グラフより，$m>4$

例5

$y=x^3-7x^2-9$ で表される曲線を C とする．このとき

(1)　点 $(p,\ p^3-7p^2-9)$ における C の接線の方程式は

$$y=\left(^{ア}\boxed{}p^2-{}^{イ}\boxed{}p\right)x-{}^{ウ}\boxed{}p^3+{}^{エ}\boxed{}p^2-{}^{オ}\boxed{}$$

となり，この接線が原点を通るのは，p の値が (小さい順に) $^{カ}\boxed{}$，$^{キ}\boxed{}$，$^{ク}\boxed{}$ のときである．

(2)　3 次方程式 $x^3-7x^2-kx-9=0$ が 3 個の異なる実数解をもつのは，定数 k の値の範囲が

$$^{ケ}\boxed{}<k<{}^{コ}\boxed{},\quad {}^{サ}\boxed{}<k$$

のときである．

(解説)

(1) $f(x)=x^3-7x^2-9$ とおく

$f'(x)=3x^2-14x$

$(p,\ p^3-7p^2-9)$ における C の接線は

$$y-f(p)=f'(p)(x-p)$$

$$y-(p^3-7p^2-9)=(3p^2-14p)(x-p)$$

$$\therefore\ y=(3p^2-14p)x-2p^3+7p^2-9$$

この接線が原点を通るとき

$$-2p^3+7p^2-9=0$$

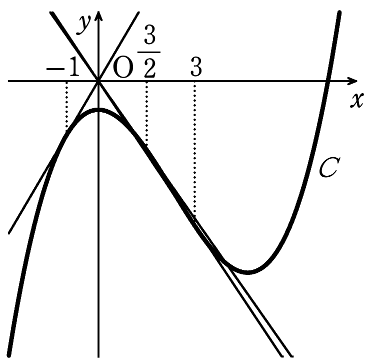
$$(p+1)(2p-3)(p-3)=0 \quad \therefore\ p=-1,\ \frac{3}{2},\ 3$$

(2) $x^3-7x^2-kx-9=0$

$$x^3-7x^2-9=kx$$

$f(x)=kx$ の実数解の個数は

$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=kx$ の共有点の個数に等しい



(1)より，曲線 C と直線 $y=kx$ が接するときの k の値は

$$k=17,\ -\frac{57}{4},\ -15$$

よって， $x^3-7x^2-kx-9=0$ が 3 個の異なる実数解をもつのは

グラフより

$$-15<k<-\frac{57}{4},\ 17<k$$

これまでのように，定数分離でうまく処理できるときは定数を分離して解けばよいが，うまく処理できないときは，極値を利用して解きます。

$f(x)$ を 3次関数として，x の 3次方程式 $f(x)=0$の実数解の個数は，

$f(x)$ が極値をもたないとき， $f(x)$ は単調増加なので 1 個，

$f(x)$ が極値をもつとき，

極値が異符号，すなわち極値の積が負であれば 3 個

極値のどちらかが 0，すなわち極値の積が 0 であれば 2 個

極値が同符号，すなわち極値の積が正であれば 1 個

となります。

例6
a を正の定数とする。3 次関数 $f(x)=x^3-12a^2x+16a$ について，次の問いに答えよ。
(1)　関数 $f(x)$ の極値を a を用いて表せ。
(2)　3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を，a の値により場合分けして求めよ。

解説

(1) $f(x)=x^3-12a^2x+16a$
$f'(x)=3x^2-12a^2=3(x-2a)(x+2a)$
$f'(x)=0$ のとき，　$x=\pm 2a$　（ $a>0$ ）
増減表は右図

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=-2a$ で極大，極大値
$$f(-2a)=(-2a)^3-12a^2(-2a)+16a$$
$$=16a^3+16a=16a(a^2+1)$$
$x=2a$ で極小，極小値
$$f(2a)=(2a)^3-12a^2\cdot 2a+16a$$
$$=-16a^3+16a=-16a(a^2-1)$$
(2) $a>0$ より，極大値 $16a(a^2+1)>0$
よって，$f(x)=0$ の実数解の個数は
(極小値)>0 のとき　1 個，
(極小値)$=0$ のとき　2 個，
(極小値)<0 のとき　3 個
$a>0$ に注意して
$-16a(a^2-1)>0$　すなわち　$0<a<1$ のとき 1 個
$-16a(a^2-1)=0$　すなわち　$a=1$　　のとき 2 個
$-16a(a^2-1)<0$　すなわち　$1<a$　　のとき 3 個

注
$x^3-12a^2x+16a=0$ を
$x^3=12a^2\left(x-\dfrac{4}{3a}\right)$ と変形しても，　$y=12a^2\left(x-\dfrac{4}{3a}\right)$ の動きがとらえづらい(傾きも変わり，通る点 $\left(\dfrac{4}{3a},0\right)$ も変わる)ので，定数分離ではうまく処理できません。

例7

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x+b$ とおく．

(1)　$y=f(x)$ の極値を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が，相異なる実数の解をちょうど n 個もつための a, b の関係を，$n=1, 2, 3$ の場合に分けて，求めよ．

(解説)

(1) $f(x)=x^3-3a^2x+b$

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=\pm a$　（$a>0$）

よって，増減表は右図

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=-a$ で極大

　極大値　$f(-a)=2a^3+b$

$x=a$ で極小

　極小値　$f(a)=-2a^3+b$

(2) $n=1$ のとき，$f(-a)$ と $f(a)$ が同符号

$n=2$ のとき，$f(-a)$ と $f(a)$ のどちらかが 0

$n=3$ のとき，$f(-a)$ と $f(a)$ が異符号となればよいから

$a>0$ より，$2a^3+b>-2a^3+b$ に注意して

　$n=1$ のとき，$2a^3+b<0$ または $-2a^3+b>0$

　$n=2$ のとき，$2a^3+b=0$ または $-2a^3+b=0$

　$n=3$ のとき，$2a^3+b>0$ かつ $-2a^3+b<0$

別解

$x^3-3a^2x+b=0$

$-x^3+3a^2x=b$ と分離して，$y=-x^3+3a^2x$ のグラフと直線 $y=b$ の共有点の個数で考えてもできます。

(2) ある点から曲線に引ける接線の本数

例8

点 A $(2,\ a)$ を通って，曲線 $y=x^3$ に 3 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ．

(解説)

$f(x)=x^3$ とおく

$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3$

これが点 A $(2,\ a)$ を通るとき

$-2t^3+6t^2=a$ …①

点 A から $y=f(x)$ に 3 本の接線が引けるとき,

$y=f(x)$ とその接線の接点が 3 つ存在すればよいから

t についての方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもてばよい

$g(t)=-2t^3+6t^2$ とおく

$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$

$g'(t)=0$ のとき, $t=0, 2$

増減表は下図

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	8	↘

①が異なる 3 つの実数解をもつとき

$y=g(t)$ のグラフと直線 $y=a$ が 3 つの共有点をもてばよいから

$0<a<8$

例9

$f(x)=x^3-x$ とし,関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ。

(2) $t\neq t'$ のとき,点 $(t,\ f(t))$ における C の接線と点 $(t',\ f(t'))$ における C の接線は異なることを示せ。

(3) C の接線で点 $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求めよ。

(4) 点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在するための u,v の満たすべき条件を求めよ。また,その条件を満たす点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

解説

(1) $f(x)=x^3-x$

$f'(x)=3x^2-1$

求める接線の方程式は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2-1)x-2t^3$ …①

(2) 点 $(t',\ f(t'))$ における接線の方程式は

$y=(3t'^2-1)x-2t'^3$ …②

$-2u^3$ は単調減少であるから， $t\neq t'$ のとき $-2t^3\neq -2t'^3$ となり

接線①と接線②の y 切片は異なる

よって，$t\neq t'$ のとき，接線①と接線②は異なる

(3) ①が点 $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るとき

$-\dfrac{2}{3}=(3t^2-1)\cdot\dfrac{2}{3}-2t^3$

$t^3-t^2=0$

$t^2(t-1)=0 \quad \therefore\ t=0,\ 1$

求める接線の方程式は

$t=0$ のとき $y=-x$

$t=1$ のとき $y=2x-2$

(4) ①が点 $(u,\ v)$ を通るとき

$v=(3t^2-1)u-2t^3$

$2t^3-3ut^2+u+v=0$ …③

(2)より，曲線 C の接線について，接点が異なれば接線も異なるから

点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在するとき，

$y=f(x)$ とその接線の接点が 3 個存在すればよいから

t の 3次方程式③が異なる 3 つの実数解をもてばよい

$g(t)=2t^3-3ut^2+u+v$ とおく

$g'(t)=6t^2-6ut=6t(t-u)$

$g(t)$ が極値をもち，極大値と極小値の積が負となればよいから

$u\neq 0,\ g(0)\,g(u)<0$

$u\neq 0,\ (u+v)(-u^3+u+v)<0$

2 番目の条件は， $u=0$ とすると $v^2<0$ となり不合理 $\quad\therefore\ u\neq 0$

よって

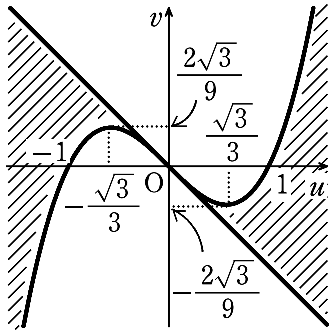
$(u+v)(-u^3+u+v)<0$

$$\therefore \begin{cases} u+v>0 \\ -u^3+u+v<0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} u+v<0 \\ -u^3+u+v>0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} v>-u \\ v<u^3-u \end{cases} \text{ または } \begin{cases} v<-u \\ v>u^3-u \end{cases}$$

よって，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の斜線部

ただし，境界線は除く



注

(2)について，一般に 3次関数では

　引ける接線の本数＝接点の個数

という関係が成り立ちますが，これが極値が 3 個以上となるような関数では，この関係が成り立たないので注意が必要です。

確認問題1

3次関数 $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ について，次の問いに答えよ。ただし，k は定数とする。

(1)　$f(x)$ が極値をとるときの x の値を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる3つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ から

$f'(x)=3x^2-6x-4$

$f'(x)=0$ のとき，　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

増減表は右図

x	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ が極値をとるとき

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

(2) $x^3-3x^2-4x+k=0$ …①

$-x^3+3x^2+4x=k$

$g(x)=-x^3+3x^2+4x$ とおく

①の解は，$y=g(x)$ のグラフと $y=k$ の共有点の x 座標と一致するから，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が3つの共有点をもち，かつその共有点の x 座標がすべて整数であるような k の値を求めればよい

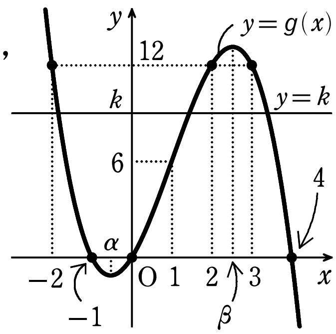
$g'(x)=-3x^2+6x+4$

$g'(x)=0$ のとき，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

増減表は右図

x	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

ここで，$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ とおくと，



$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が3つの共有点をもつとき，$g(\alpha)<k<g(\beta)$

$\alpha<x<\beta$ を満たす整数 x は，$x=0$，1，2

$g(0)=0$，$g(1)=6$，$g(2)=12$ であるから，

求める k の値の候補は，$k=0$，6，12

$k=0$ のとき

$x^3-3x^2-4x=0$

$x(x+1)(x-4)=0$　　$\therefore\ x=0,\ -1,\ 4$

$k=6$ のとき

$x^3-3x^2-4x+6=0$

$(x-1)(x^2-2x-6)=0$　　$\therefore\ x=1$，$1\pm\sqrt{7}$ (不適)

$k=12$ のとき

$x^3-3x^2-4x+12=0$

$(x-2)(x+2)(x-3)=0$　　$\therefore\ x=2$，-2，3

よって，$k=0$，12

また，3 つの整数解は

$k=0$ のとき，$x=-1$，0，4

$k=12$ のとき，$x=-2$，2，3

確認問題2

$f(x)=x^3-3x^2$ とするとき

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$a \geqq 0$ とする。方程式 $|f(x)|=a$ の異なる実数解の個数を調べよ。

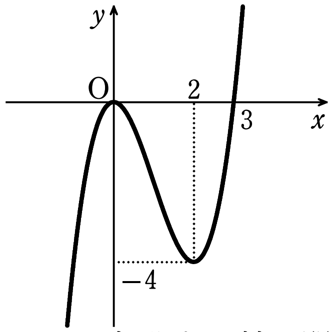
解説

(1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=0, 2$

増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$



x 軸との交点は

　$x^2(x-3)=0$　　$\therefore\ x=0,\ 3$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図

(2) $y=|f(x)|$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフの $y<0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返したもので，右図のようになる

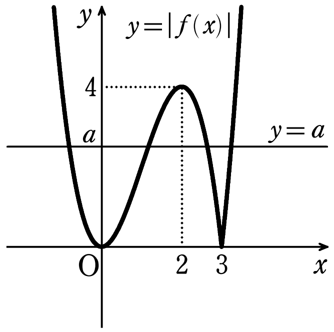
このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の異なる実数解の個数となるから

求める実数解の個数は

　$a=0$，$4<a$ のとき 2個

　$a=4$ のとき 3個

　$0<a<4$ のとき 4個



確認問題3

方程式 $|x^3-x|=x+k$ ……① の実数解について考察する。ただし，k は実数の定数とする。

(1) 方程式①が異なるちょうど3個の実数解をもつような k の値は，

$k_1=$ ア $\boxed{}$，または $k_2=$ イ $\boxed{}$ である。ただし，$k_1<k_2$ とする。

(2) $k=k_2$ のとき，①の3個の実数解を求めよ。

(3) $k_1<k<k_2$ のとき，①の実数解の個数を求めよ。

解説

(1) $|x^3-x|-x=k$

$f(x)=|x^3-x|-x$ とおく

方程式①が異なる3個の実数解をもつとき

$y=f(x)$ と $y=k$ が共有点を3個もてばよい

$$|x^3-x|=\begin{cases} x^3-x & (-1\leqq x\leqq 0,\ 1\leqq x) \\ -x^3+x & (x<-1,\ 0<x<1) \end{cases}$$ より

(ⅰ) $-1\leqq x\leqq 0$，$1\leqq x$ のとき

$f(x)=x^3-x-x=x^3-2x$

$f'(x)=3x^2-2$

$f'(x)=0$ のとき， $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(ⅱ) $x<-1$，$0<x<1$ のとき

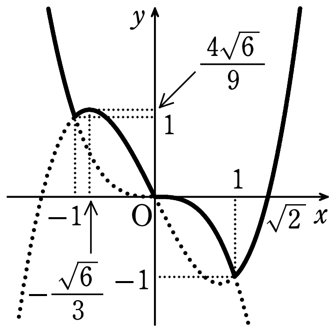
$f(x)=-x^3+x-x=-x^3$

$f'(x)=-3x^2$

増減表は下図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右図



求める k の値は

$$k_1={}^{ア}1\ ,\ k_2={}^{イ}\ \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

(2) $k=\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ のとき

$-1\leqq x\leqq 0$，$1\leqq x$ のとき

$$x^3-2x-\frac{4\sqrt{6}}{9}=0$$

$$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$x<-1$，$0<x<1$ のとき

$$-x^3-\frac{4\sqrt{6}}{9}=0$$

$$x^3=-\frac{2\times 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \qquad \therefore\ x=-\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{6}}{3}$$

よって，求める 3 個の実数解は

$$x=-\frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt{6}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(3) $1<k<\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ のとき，①の実数解の個数は 4 個

確認問題4

m は実数の定数とし，x の 3 次方程式 $x^3-3mx+m-3=0$ が 3 個の異なる実数解 α，β，γ をもつとする。

(1)　m の範囲は $\boxed{}$ である。

(2)　$\alpha<\beta<\gamma$ とする。このとき，

(i)　α の範囲は $\boxed{}$ である。

(ii)　β の範囲は $\boxed{}$ である。

(iii)　γ の範囲は $\boxed{}$ である。

解説

(1) $x^3-3mx+m-3=0$

$$x^3-3=3m\left(x-\frac{1}{3}\right)\ \cdots①$$

①の実数解の個数は，

$y=x^3-3$ と $y=3m\left(x-\frac{1}{3}\right)$ の共有点の個数に等しい

$f(x)=x^3-3$ とすると，　$f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ t^3-3)$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

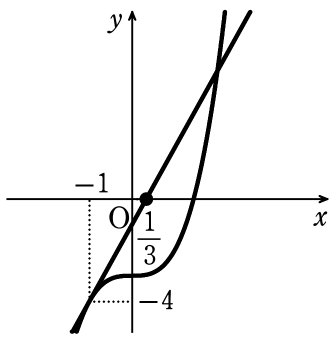
$$y-(t^3-3)=3t^2(x-t)\qquad \therefore\ y=3t^2x-2t^3-3$$

この接線が $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$ を通るとき

$$0=3t^2\cdot\frac{1}{3}-2t^3-3$$

$$2t^3-t^2+3=0$$

$$(t+1)(2t^2-3t+3)=0\qquad \therefore\ t=-1$$



$y=f(x)$ と $y=3m\left(x-\frac{1}{3}\right)$ が接するとき

$$3m=3\qquad \therefore\ m=1$$

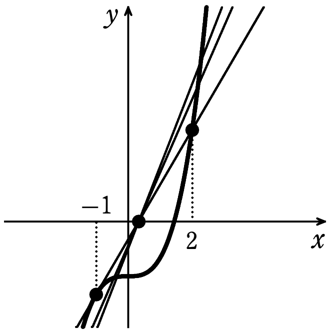
図より，これらの共有点の個数が 3 個となるとき，$m>1$

(2) $m=1$ のとき，①の実数解は

$x^3-3=3x-1$

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0 \quad \therefore\ x=-1,\ 2$



図より

(i) $\alpha<-1$

(ii) $-1<\beta<\dfrac{1}{3}$

(iii) $\gamma>2$

確認問題5

a は実数とする．3 次方程式

$$x^3+3ax^2+3ax+a^3=0$$

の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるかを調べよ．

(解説)

$f(x)=x^3+3ax^2+3ax+a^3$ とする

$f'(x)=3x^2+6ax+3a=3(x^2+2ax+a)$

$f'(x)=0$ のとき

$x^2+2ax+a=0$

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=a^2-1\cdot a=a(a-1)$

(i) $D\leqq 0$，すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$f'(x)\geqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する

よって，$f(x)=0$ の実数解の個数は 1 個

(ii) $D>0$，すなわち $a<0$，$1<a$ のとき

$x^2+2ax+a=0$ の 2 解を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とすると，

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=a$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+a)(x^2+2ax+a)+2a(1-a)x+a^2(a-1)\\&=(x+a)(x^2+2ax+a)+a(a-1)(a-2x)\end{aligned}$$ より

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=a(a-1)(a-2\alpha)\times a(a-1)(a-2\beta)\\&=a^2(a-1)^2\{a^2-2(\alpha+\beta)a+4\alpha\beta\}\\&=a^2(a-1)^2\{a^2-2(-2a)a+4a\}\\&=a^2(a-1)^2\times a(5a+4)\end{aligned}$$

$f(x)=0$ の実数解の個数は

$f(\alpha)f(\beta)>0$，すなわち $a<-\dfrac{4}{5}$，$1<a$ のとき 1 個

$f(\alpha)f(\beta)=0$，すなわち $a=-\dfrac{4}{5}$ のとき 2 個

$f(\alpha)f(\beta)<0$，すなわち $-\dfrac{4}{5}<a<0$ のとき 3 個

よって，実数解の個数は，$a<-\dfrac{4}{5}$，$0\leqq a$ のとき 1 個，

$a=-\dfrac{4}{5}$ のとき 2 個，$-\dfrac{4}{5}<a<0$ のとき　3 個