3.4　正弦定理・余弦定理(2)/平面図形の計量(1)

(1) 三角形の成立条件

3 辺の長さが a, b, c である三角形 ABC について，以下の条件が成り立ちます。

三角形の成立条件
三角形の 3 辺の長さを a, b, c とするとき，

(1) $\begin{cases} a < b+c \\ b < c+a \\ c < a+b \end{cases}$

(2) $|b-c| < a < b+c$

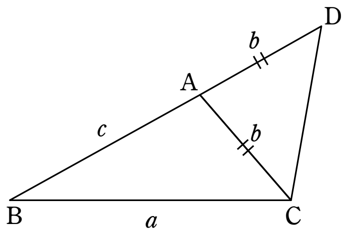
(3) a が最大辺と分かっているときは

$a < b+c$

のみでよい。

(1)は，1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和より小さいということである。

$a < b+c$ を証明します。他の 2 つの不等式も同様にして証明できます。



△ABC の BA の延長上に AD＝AC となる，点D をとる

∠ADC＝∠ACD であるから

$\angle \mathrm{BDC} < \angle \mathrm{BCD}$

よって，辺の長さと対辺の長さの関係より

$\mathrm{BC} < \mathrm{BD}$

$\therefore a < b+c$

(2)は(1)の言い換えである。

(1) → (2)

$b < c+a$ より，$b-c < a$

$c < a+b$ より，$-a < b-c$

よって，

$-a < b-c < a \quad \therefore |b-c| < a$

また，$a < b+c$ より，(2)の不等式が成り立ちます。

(2) → (1)

$|b-c|<a$

$b \geqq c$ のとき，

$b-c<a \quad \therefore b<c+a$

$a>0$ より， $c<a+b$ は明らか

$b<c$ のとき，

$-(b-c)<a \quad \therefore c<a+b$

$a>0$ より， $b<c+a$ は明らか

これらに，右の不等式の $a<b+c$ を加えれば，(1)の連立不等式です。

(3)は，a が最大辺と分かっていれば， a, b, c は，辺の長さより正なので，他の 2 つの不等式は，明らかに成り立ちます。

注 (1)の不等式は対称であるから， $|b-c|<a$ と同様にして $|c-a|<b$ ，$|a-b|<c$ も成り立ちます。よって，三角形の成立条件が成り立てば，各辺の長さは正になります。

例1

△ABC において，各辺の長さが AB$=x+1$，BC$=3x-3$，CA$=6$ であるとする。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\cos A=-\dfrac{1}{3}$ のとき，x の値を求めよ。

(解説)

(1) 三角形の成立条件より

$|(3x-3)-(x+1)|<6<(3x-3)+(x+1)$

$|2x-4|<6<4x-2$

$|2x-4|<6$ より

$-6<2x-4<6 \quad \therefore -1<x<5$

$6<4x-2$ より

$x>2$

よって， $2<x<5$

(2) 余弦定理より

$$(3x-3)^2=(x+1)^2+6^2-2\cdot(x+1)\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$x^2-3x-4=0 \quad (x+1)(x-4)=0$

$2<x<5$ より， $x=4$

(2) 鋭角三角形･直角三角形･鈍角三角形

△ABCにおいて， A が鋭角，直角，鈍角であるとき，3辺 a, b, c について，どのような関係式が成り立つかを考えます。

A が鋭角 $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$
A が直角 $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$
A が鈍角 $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$b, c > 0$，かつ， $A < 90°$ のとき $\cos A > 0$ より

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0 \qquad \therefore\ a^2 < b^2 + c^2$$

他も同様にして求まります。

もとの余弦定理の式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

からも $A < 90°$ のとき， $\cos A > 0$ より

$$a^2 < b^2 + c^2$$

ということは分かります。

次に，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の判別について考えます。鋭角三角形はすべての角が鋭角，直角三角形は最大角が直角で他の2つの角は鋭角，鈍角三角形は最大角が鈍角で他の2つの角は鋭角です。よって，最大角をみて，それが鋭角，直角，鈍角のどれであるかが分かれば，鋭角，直角，鈍角三角形のどれであるか判別ができます。

あとは，最大辺に対する対角が最大であるという性質と上の不等式とを利用すればよい。ただし，各辺に文字が入っていて，その文字に代入した値によって最大辺が変わることもあるので，そういうときは場合分けが必要になります。あるいは，これらのことをまとめて，三角形の成立条件と同様に次の不等式が成り立ちます。ただし，煩雑なので最大角で判断した方がよい。

鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形

△ ABCの3辺の長さを a, b, c とするとき，

(1) △ABCが鋭角三角形

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ b^2 < c^2 + a^2 \\ c^2 < a^2 + b^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow |b^2 - c^2| < a^2 < b^2 + c^2$

ただし， a が最大辺と分かっているときは， $a^2 < b^2 + c^2$ のみでよい。

(2) △ABCが直角三角形

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ または $b^2 = c^2 + a^2$ または $c^2 = a^2 + b^2$

ただし， a が最大辺と分かっているときは， $a^2 = b^2 + c^2$ のみでよい。

(3) △ABCが鈍角三角形

$\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$ または $b^2 > c^2 + a^2$ または $c^2 > a^2 + b^2$

ただし， a が最大辺と分かっているときは， $a^2 > b^2 + c^2$ のみでよい。

例2

3辺の長さが次のような三角形は，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のうちのどれか。

(1)　3，5，7　　(2)　5，12，13　　(3)　13，7，15

解説

(1)　$3^2 + 5^2 = 34 < 7^2 = 49$ より，鈍角三角形

(2)　$5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ より，直角三角形

(3)　$7^2 + 13^2 = 218 < 15^2 = 225$ より，鈍角三角形

例3

3 辺の長さが a，$a+2$，$a+4$ である三角形について考える。次の問いに答えよ。

(1)　この三角形が鈍角三角形であるとき，a のとりうる範囲は $^{ア}\boxed{}<a<{}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　この三角形の 1 つの内角が 120° であるとき，$a={}^{ウ}\boxed{}$ となり，外接円の半径は $^{エ}\boxed{}$ となる。

解説

(1) $a<a+2<a+4$ であるから，

三角形の成立条件より

$$a+4<a+(a+2) \quad \therefore\ a>2$$

鈍角三角形となるためには

$$(a+4)^2>a^2+(a+2)^2$$

$$a^2-4a-12<0$$

$$(a+2)(a-6)<0 \quad \therefore\ -2<a<6$$

よって

$$^{ア}2<a<{}^{イ}6$$

(2) 長さ $a+4$ の辺に対する角が 120° であるから，余弦定理より

$$(a+4)^2=a^2+(a+2)^2-2a(a+2)\cos 120^\circ$$

$$2(a^2-a-6)=0$$

$$(a+2)(a-3)=0$$

$2<a<6$ より，　$a={}^{ウ}3$

外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\frac{a+4}{\sin 120^\circ}=2R$$

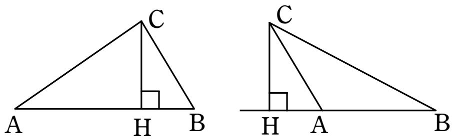
$$\frac{7}{\sin 120^\circ}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}={}^{エ}\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

(3) **三角形の面積**

　△ABC の面積 S を，2 辺の長さとその間の角を用いて表してみます。

頂点 C から辺 AB，または，その延長に下ろした垂線を CH とすると，



A が鋭角，直角，鈍角，どの場合も

$$\mathrm{CH}=b\sin A$$

よって，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}cb\sin A$$

2 辺の長さとその間の角で公式が成り立っています。

同様にして，次の公式が成り立ちます。

三角形の面積

△ABC の面積を S とするとき，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

例4

(1) 三角形 ABC において，$\angle \mathrm{A}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{AC}=7$ のとき，三角形 ABC の面積 S は $S=$ ア$\boxed{}$ である。

(2) △ABC において，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=6\sqrt{2}$，$\mathrm{CA}=3\sqrt{5}$ のとき，面積は ア$\boxed{}$ であり，$\angle \mathrm{ABC}=$ イ$\boxed{}^\circ$ である。

(3) $\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=3$，$\angle \mathrm{ABC}=60^\circ$ の平行四辺形 ABCD の面積を求めよ.

解説

(1) $S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\sin 60^\circ=\dfrac{21\sqrt{3}}{2}$

(2) 余弦定理より

$$\cos\angle \mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{3^2+(6\sqrt{2})^2-(3\sqrt{5})^2}{2\cdot 3\cdot 6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ<\angle \mathrm{ABC}<180^\circ$ より，　$\angle \mathrm{ABC}=$ イ45°

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}={}^{ア}9$$

(3) 求める面積 S は

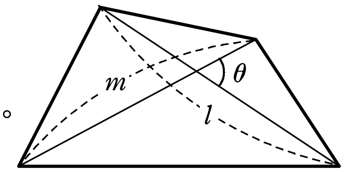
$$S=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B=2\sqrt{3}\cdot 3\sin 60^\circ=2\sqrt{3}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9$$

例5

右図のような四角形において，対角線の長さを l，m，対角線のなす角を θ とする。

(1)　四角形の面積 S を l，m，θ を用いて表せ。

(2)　対角線の長さの和が k (定数) となる四角形の中で，その面積が最大となるものの面積を求めよ。



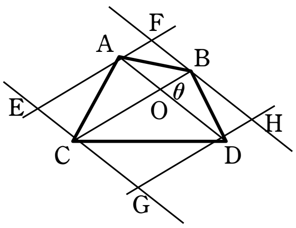
解説

(1) 図のように，
B, C を通り AD に平行な直線，
A, D を通り BC に平行な直線を引く
このとき，

$\angle\mathrm{BOD}=\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{AEC}=\theta$

$\mathrm{EG}=\mathrm{FH}=l$, $\mathrm{EF}=\mathrm{BC}=m$ より，

$$S=\frac{1}{2}lm\sin\theta$$



(2) まず， l, m を固定して，
$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから， $\theta=90^\circ$ のとき S は最大で，このとき，

$$S=\frac{1}{2}lm$$

$l+m=k$ より， $0<l<k$

$$S=\frac{1}{2}l(k-l)=-\frac{1}{2}(l^2-kl)=-\frac{1}{2}\left\{\left(l-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}\right\}$$

$l=\frac{k}{2}$ のとき最大で，そのとき面積は $\frac{k^2}{8}$

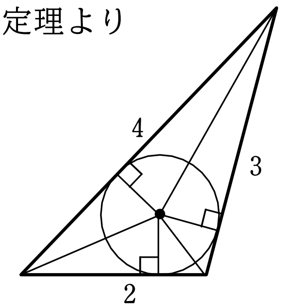
例6

3 辺の長さがそれぞれ 2，3，4 であるような三角形がある。この三角形の面積を S，この三角形に内接する円の半径を r とする。

(1)　S を求めよ。　　　　(2)　r を求めよ。

(解説)

(1) 長さ2の辺の対角の大きさを A とすると，余弦定理より



$$\cos A=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{21}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}$$

$\sin A>0$ より

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

よって，

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin A=6\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

(2) $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=\dfrac{9}{2}r$ より

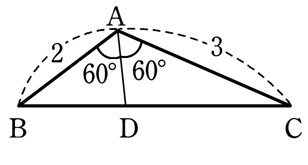
$$r=\frac{2}{9}S=\frac{2}{9}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

例7

△ABCにおいて，AB＝2，AC＝3，∠BAC＝120° のとき，△ABCの面積を求めよ。また，∠BACの二等分線と辺BCの交点をDとするとき，ADの長さを求めよ。

(解説)

△ABCの面積は



$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

AD＝x とおくと，

△ABC＝△ABD＋△ACD より

$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot x\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot3\cdot\sin60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4}x=\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ x=\frac{6}{5}$$

よって，$\mathrm{AD}=\dfrac{6}{5}$

例8

△ABCの面積を S，内接円の半径を r，3辺の長さを a，b，c とすると，

$$r=\frac{S}{l},\quad S=\sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}$$

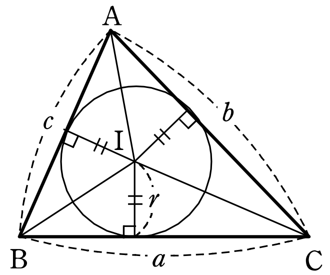
であることを示せ。ただし $2l=a+b+c$ とする。

(解説)

内接円の中心を I とすると，

△ABC＝△IAB＋△IBC＋△ICA より

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=lr \quad \therefore r=\frac{S}{l}$$



また，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)}$$

余弦定理より，

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\times\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2l(2l-2a)(2l-2b)(2l-2c)}$$

$$=\sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}$$

この公式を**ヘロンの公式**といいます。三角形の3辺の長さが分かっているとき，その三角形の面積を求める公式です。使い勝手がよさそうに見えますが，例えば，1辺に $\sqrt{}$ が入ってしまうと，途端に計算が面倒になり，使い勝手がよくありません。特に覚える必要はありません。

例9

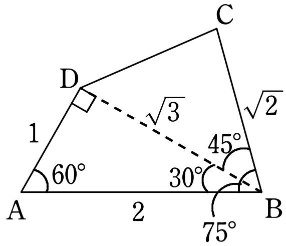
四角形 ABCD において，∠A＝60°，∠B＝75°，DA＝1，AB＝2，BC＝$\sqrt{2}$ であるとき，この四角形の面積を求めよ.

(解説)

$\triangle$ABD は，$\angle A=60°$，$AB=2$，$AD=1$ より
$\angle ADB=90°$ の直角三角形である

$BD=\sqrt{3}$，$\angle ABD=30°$，$\angle CBD=45°$

よって，求める面積 S は，



$$S=\triangle ABD+\triangle CBD$$
$$=\frac{1}{2}\times AD\times BD+\frac{1}{2}\times BC\times BD\times\sin 45°$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$$

例10

四角形 ABCD において，$AB /\!/ DC$，$AB=4$，$BC=2$，$CD=6$，$DA=3$ であるとする。

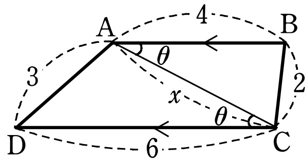
(1)　対角線 AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

解説

(1) $AC=x$ $(x>0)$ とする。

$\triangle$ABC，$\triangle$ACD で余弦定理より



$$\cos\angle BAC=\frac{4^2+x^2-2^2}{2\cdot 4\cdot x}=\frac{x^2+12}{8x},$$
$$\cos\angle ACD=\frac{6^2+x^2-3^2}{2\cdot 6\cdot x}=\frac{x^2+27}{12x}$$

$\angle BAC=\angle ACD$ であるから，$\cos\angle BAC=\cos\angle ACD$ より

$$\frac{x^2+12}{8x}=\frac{x^2+27}{12x}$$
$$3(x^2+12)=2(x^2+27)$$
$$x^2=18$$

$x>0$ より，　$x=3\sqrt{2}$

よって，$AC=3\sqrt{2}$

(2) $\angle BAC=\angle ACD=\theta$ とすると，(1) から

$$\cos\theta=\frac{18+12}{8\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

$0°<\theta<180°$ であるから，$\sin\theta>0$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{5}{4\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$$

よって，求める面積 S は，

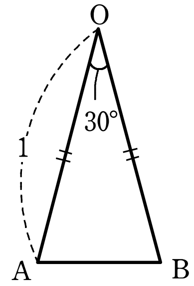
$$S=\frac{1}{2}(4+6)\cdot 3\sqrt{2}\sin\theta=\frac{15\sqrt{7}}{4}$$

別解 A から BC に平行な直線を引き，DC との交点を E として，△ADE で余弦定理を用いて $\cos D, \sin D$ を出して求めてもよい。

例11
(1) 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積と 1 辺の長さを求めよ。
(2) 半径 1 の円に外接する正十二角形の面積と 1 辺の長さを求めよ。

解説

(1) 正十二角形の面積 S_1 は，



$$S_1=12\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30^\circ=3$$

1辺の長さ l_1 は，余弦定理より，

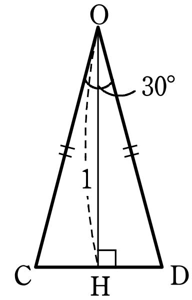
$$l_1{}^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 30^\circ$$

$$l_1{}^2=2-\sqrt{3}$$

$l_1>0$ より，

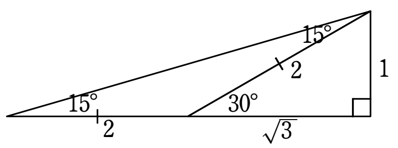
$$l_1=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

(2) O から CD に下ろした垂線を OH とすると，



$$\mathrm{CH}=1\cdot\tan 15^\circ$$

ここで，下図のような直角三角形を考えて，



$\tan 15^\circ=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ より，

$$\mathrm{CH}=2-\sqrt{3}$$

よって，1 辺の長さ l_2 は，

$$l_2=2\,\mathrm{CH}=2(2-\sqrt{3})=4-2\sqrt{3}$$

正十二角形の面積 S_2 は，

$$S_2=12\times\frac{1}{2}\cdot(4-2\sqrt{3})\cdot 1=24-12\sqrt{3}$$

確認問題1

3 辺の長さが $2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 である三角形について

(1)　$2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるための x の条件を求めよ。

(2)　最大辺に対する角の大きさを求めよ。

解説

(1) $2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 は三角形の 3 辺の長さより，

$$2x+1>0,\ x^2-1>0,\ x^2+x+1>0 \quad \therefore\ x>1 \ \cdots①$$

このとき，

$$(x^2+x+1)-(2x+1)=x^2-x=x(x-1)>0$$

$$(x^2+x+1)-(x^2-1)=x+2>0$$

より，x^2+x+1 が最大辺であるから，三角形の成立条件より

$$x^2+x+1<(2x+1)+(x^2-1)$$

$$x-1>0 \quad \therefore\ x>1 \ \cdots②$$

①，②より，$x>1$　$\boxed{答}$

(2) 最大辺に対する角を θ とすると，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(2x+1)^2+(x^2-1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{(2x+1)^2+\{(x^2-1)+(x^2+x+1)\}\{(x^2-1)-(x^2+x+1)\}}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{(2x+1)^2-x(2x+1)(x+2)}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{(2x+1)\{(2x+1)-x(x+2)\}}{2(2x+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{-(2x+1)(x^2-1)}{2(2x+1)(x^2-1)}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\theta=120^\circ$　$\boxed{答}$

確認問題2

n を自然数とする．

(1)　3 辺の長さが n，$\sqrt{n^2+1}$，$n+3$ であるような三角形ができるための必要十分条件を n に関する不等式で求めよ．

(2)　(1) の三角形が鈍角三角形になる n をすべて求めよ．

(解説)

(1) $(\sqrt{n^2+1})^2-n^2=(n^2+1)-n^2=1>0 \quad \therefore n^2<(\sqrt{n^2+1})^2$

n，$\sqrt{n^2+1}>0$ より，$n<\sqrt{n^2+1}$

$(n+3)^2-(\sqrt{n^2+1})^2=(n^2+6n+9)-(n^2+1)=6n+8>0$

$\therefore (\sqrt{n^2+1})^2<(n+3)^2$

$\sqrt{n^2+1}$，$n+3>0$ より，$\sqrt{n^2+1}<n+3$

よって，$n<\sqrt{n^2+1}<n+3$

三角形の成立条件より

$n+\sqrt{n^2+1}>n+3$

$\sqrt{n^2+1}>3$

$\sqrt{n^2+1}, 3>0$ より

$n^2+1>9 \quad \therefore n^2>8$

n は自然数より，$n \geqq 3$　答

(2) 鈍角三角形となるとき，

$n^2+(\sqrt{n^2+1})^2<(n+3)^2$

$n^2-6n-8<0 \quad \therefore 3-\sqrt{17}<n<3+\sqrt{17}$

n は，$n \geqq 3$ を満たす自然数より，

$n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$　答

確認問題3
n を自然数とする．3 辺の長さが，それぞれ $3n+1$，$2n+7$，$n+9$ である三角形が鋭角三角形になる自然数 n は全部でいくつあるか．

(解説)
三角形の成立条件より

$$|(3n+1)-(2n+7)|<n+9<(3n+1)+(2n+7)$$
$$|n-6|<n+9<5n+8$$

n は自然数より，常に成立する
よって，すべての自然数について，三角形となる。
鋭角三角形となるとき

$$|(3n+1)^2-(2n+7)^2|<(n+9)^2<(3n+1)^2+(2n+7)^2$$
$$|5n^2-22n-48|<n^2+18n+81<13n^2+34n+50$$

$|5n^2-22n-48|<n^2+18n+81$ より，

$$-(n^2+18n+81)<5n^2-22n-48<n^2+18n+81$$

$-(n^2+18n+81)<5n^2-22n-48$ より，

$$6n^2-4n+33>0 \qquad n \text{ はすべての整数}$$

$5n^2-22n-48<n^2+18n+81$ より

$$4n^2-40n-129<0$$
$$4(n-5)^2<229$$
$$(n-5)^2<\frac{229}{4}$$

$\frac{229}{4}=57.\cdots$ より， $1\leqq n\leqq 12$
よって， $1\leqq n\leqq 12$ …①
$(13n^2+34n+50)-(n^2+18n+81)=12n^2+16n-31$ より， $n\geqq 2$ …②
①，②より， $2\leqq n\leqq 12$
よって，求める n は全部で 11 個ある　(答)

確認問題4

△ABCにおいて，$\dfrac{5}{\sin A}=\dfrac{7}{\sin B}=\dfrac{8}{\sin C}$ が成り立っているとする.

(1)　$\sin A$ と $\cos A$ の値はそれぞれいくらか.

(2)　△ABCの面積が $30\sqrt{3}$ であるとき，△ABCの外接円の半径 R と内接円の半径 r をそれぞれ求めよ.

解説

(1) 条件式より，

$$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$$

また，正弦定理より，

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$$

よって，$a=5k, b=7k, c=8k\ (k>0)$ とおくと，

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(7k)^2+(8k)^2-(5k)^2}{2\cdot 7k\cdot 8k}=\frac{11}{14}$$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より

$$\sin^2 A=\frac{75}{196}$$

$0°<A<180°$ であるから，$\sin A>0$ より

$$\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$ 答

(2) $\dfrac{1}{2}bc\sin A=30\sqrt{3}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 7k\cdot 8k\cdot\frac{5\sqrt{3}}{14}=30\sqrt{3}$$

$$k^2=3$$

$k>0$ より，$k=\sqrt{3}$

正弦定理より，

$$2R=\frac{a}{\sin A}=5\sqrt{3}\cdot\frac{14}{5\sqrt{3}}=14 \qquad \therefore R=7$$

△ABCの面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot 20\sqrt{3}\cdot r=30\sqrt{3} \qquad \therefore r=3$$ 答

確認問題5

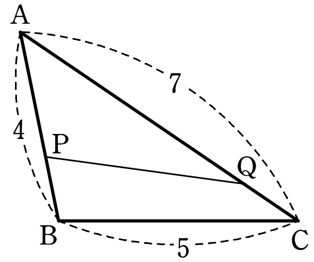
3辺の長さが AB＝4，BC＝5，AC＝7である三角形 ABC について考える。辺 AB 上の点 P，辺 AC 上の点 Q を，△APQ の面積が △ABC の面積の半分となるようにとる。

(1)　$\cos A$ の値を求めよ。　　　(2)　△ABC の面積を求めよ。

(3)　AP＝x，AQ＝y とおくとき，xy の値を求めよ。

(4)　線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

(解説)



(1) 余弦定理より，$\cos A=\dfrac{7^2+4^2-5^2}{2\cdot7\cdot4}=\dfrac{5}{7}$　答

(2) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

△ABC の面積を S とすると，

$S=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot4\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}$　答

(3) $\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ より

$\dfrac{1}{2}xy\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7}=2\sqrt{6}$

$\therefore\ xy=14$　答

(4) 余弦定理より

$$\mathrm{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos A=x^2+\frac{14^2}{x^2}-20$$

$x^2>0$ であるから，相加相乗平均より

$$\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{14^2}{x^2}}-20=8$$

等号成立は，$x=y=\sqrt{14}$ のとき

このとき，最小値をとり，最小値は $2\sqrt{2}$　答