2.8　不等式への応用・物理への応用

(1) 不等式の証明

関数の増減を調べることにより，不等式を証明することを考えます。

例1

(1) すべての実数 x に対して，不等式 $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}\geqq x$ が成り立つことを示せ。

(2) $x>0$ のとき，$x^3-9x\geqq 3x-16$ が成立することを証明せよ。

(解説)

(1) $f(x)=\left(\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}\right)-x$ とおく

$f'(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=1$

増減表は右図

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

$f(x)$ は $x=1$ で最小値 0 をとる

よって，すべての実数 x に対して

　$f(x)\geqq 0$

　$\therefore\ \dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}\geqq x$

(2) $f(x)=(x^3-9x)-(3x-16)=x^3-12x+16$

とおく

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=2$

増減表は右図

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x>0$ において，$f(x)$ は $x=2$ のとき最小値 0 をとる

よって，$x>0$ のとき

　$f(x)\geqq 0$

　$(x^3-9x)-(3x-16)\geqq 0$

　$\therefore\ x^3-9x\geqq 3x-16$

例2

不等式 $x^4+2x^3-2x^2+k>0$ がすべての実数 x について成り立つような定数 k の範囲を求めよ。

(解説)

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+k$ とおく

$f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(2x-1)(x+2)$

増減表は右図

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-\frac{3}{16}$	$\nearrow$

$f(x)$ は $x=-2$ のとき最小値 $k-8$ をとる

不等式 $f(x)>0$ がすべての実数 x について成り立つとき

$k-8>0 \quad \therefore k>8$

別解

$x^4+2x^3-2x^2+k>0$

$-x^4-2x^3+2x^2<k$

$f(x)=-x^4-2x^3+2x^2$ とおく

$f'(x)=-4x^3-6x^2+4x=-2x(2x-1)(x+2)$

増減表は右図

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{16}$	$\searrow$

$f(x)$ は $x=-2$ のとき最大値 8 をとる

不等式 $f(x)<k$ がすべての実数 x について成り立つとき

$y=f(x)$ のグラフが直線 $y=k$ より常に下にあればよいから

$k>8$

例3

$x\geqq 0$ のすべての x について，不等式 $a(x-1)\leqq x^3$ を満たす a の最大値を求めよ.

(解説)

不等式 $a(x-1)\leqq x^3$ が $x\geqq 0$ のすべての x について成り立つとき

$x\geqq 0$ において， $y=x^3$ のグラフが直線 $y=a(x-1)$ より常に上にあればよい

$f(x)=x^3$ とおくと $f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

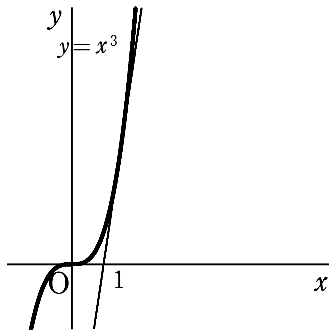
$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-t^3=3t^2(x-t) \quad \therefore y=3t^2x-2t^3$

これが $(1,0)$ を通るとき

$$0=3t^2-2t^3$$

$$t^2(2t-3)=0 \qquad \therefore\ t=0,\ \frac{3}{2}$$



$t=0$ のとき，　$a=0$

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき，　$a=\dfrac{27}{4}$

よって，求める条件は図より

$$0\leqq a\leqq\frac{27}{4}$$

したがって，　a の最大値は $\dfrac{27}{4}$

注

$f(x)=x^3-a(x-1)$ とおいて，　$f(x)$ の $x\geqq0$ における最小値を求めてそれが 0 以上になるような条件として a を求めてもよいが面倒です。

例4

$x\geqq0$ のとき，$x^3+32\geqq px^2$ が成り立つような定数 p の最大値は $\boxed{\quad}$ である。

解説

$f(x)=x^3-px^2+32$ とおくと

$x^3+32\geqq px^2 \Leftrightarrow f(x)\geqq0$

$f'(x)=3x^2-2px=x(3x-2p)$

$f'(x)=0$ のとき，　$x=0,\ \dfrac{2}{3}p$

(i) $p\leqq0$ のとき

$x\geqq0$ において $f'(x)\geqq0$ であるから，　$f(x)$ は単調増加

$f(0)=32$ より，$x\geqq0$ のとき $f(x)\geqq0$

(ii) $p>0$ のとき

$x\geqq0$ における増減表は右図

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}p$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	32	↘	$-\frac{4}{27}p^3+32$	↗

$x\geqq0$ のとき $f(x)\geqq0$ が成り立つとき

$$-\frac{4}{27}p^3+32\geqq0$$

$$p^3\leqq8\cdot27 \qquad \therefore\ p\leqq6$$

$p>0$ より，　$0<p\leqq6$

(ⅰ), (ⅱ)より $p \leqq 6$

よって，p の最大値は $p=6$

注

3 次関数と放物線では考えにくいので，$f(x)$ の最小値を考えて解く。

例5

a，b は正の定数，$x>0$ として，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$a^3+8b^3+8x^3 \geqq 12abx$$

解説

$f(x)=8x^3-12abx+a^3+8b^3$ とおく

$f'(x)=24x^2-12ab=12(2x^2-ab)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$

増減表は右図

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小	↗

$f(x)$ は $x=\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$ で最小

$$\text{最小値 } f\left(\sqrt{\frac{ab}{2}}\right)=-4\sqrt{2}\,ab\sqrt{ab}+a^3+8b^3$$

$$=\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2-2\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot 2\sqrt{2}\,b^{\frac{3}{2}}+\left(2\sqrt{2}\,b^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

$$=\left(a^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\,b^{\frac{3}{2}}\right)^2 \geqq 0$$

よって，$x>0$ のとき

$f(x) \geqq 0$

$\therefore\ a^3+8b^3+8x^3 \geqq 12abx$

別解

$a^3, 8b^3, 8x^3>0$ であるから，相加相乗平均より

$$a^3+8b^3+8x^3 \geqq 3\sqrt[3]{a^3\cdot 8b^3\cdot 8x^3}=12abx$$

例6

定数 a に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x-4$ と定める．

(1)　「$f(1)\geqq 0$ である」ための，a についての必要十分条件を求めよ．

(2)　「$x\geqq 1$ ならば $f(x)\geqq 0$ である」ための，a についての必要十分条件を求めよ．

(解説)

(1) $f(1)\geqq 0 \Leftrightarrow 9a^2-6a-3\geqq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(3a+1)\geqq 0$

$\Leftrightarrow a\leqq -\dfrac{1}{3}$，$1\leqq a$

(2) $x\geqq 1$ ならば $f(x)\geqq 0$ であるためには

$f(1)\geqq 0$ であること，すなわち $a\leqq -\dfrac{1}{3}$，$1\leqq a$ であることが必要

$f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x-4$

$f'(x)=3x^2-12ax+9a^2=3(x-a)(x-3a)$

$f'(x)=0$ のとき，　$x=a, 3a$

(ⅰ) $a\leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき

$x\geqq 1$ において $f'(x)>0$ より $f(x)$ は単調増加

よって，$x\geqq 1$ ならば $f(x)\geqq 0$

(ⅱ) $a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 1$ における増減表は下図

x	1	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗

$x=3a$ で最小　最小値 $f(3a)=27a^3-54a^3+27a^3-4=-4<0$

よって，$x\geqq 1$ において $f(x)<0$ となる x の値が存在する

(ⅰ)，(ⅱ)より $a\leqq -\dfrac{1}{3}$

注

(2)において，必要条件である程度 a の範囲を絞っておかないと場合分けが生じて大変です。

例7

すべての $x \geqq 0$ に対して，$x^3-3x^2 \geqq k(3x^2-12x-4)$ が成り立つ定数 k の値の範囲を求めよ．

解説

$f(x)=x^3-3x^2-k(3x^2-12x-4)$ とおくと

$x^3-3x^2 \geqq k(3x^2-12x-4) \Leftrightarrow f(x) \geqq 0$

$x \geqq 0$ で $f(x) \geqq 0$ となるためには，$f(0) \geqq 0$ であることが必要

$$f(0)=4k \geqq 0 \quad \therefore k \geqq 0$$

$f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx+4k$

$f'(x)=3x^2-6(k+1)x+12k=3(x-2k)(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=2k,\ 2$

(ⅰ) $0 \leqq k < 1$ のとき

$x=2k$ で極大，$x=2$ で極小

$$\text{最小値 } f(2)=16k-4 \geqq 0 \quad \therefore k \geqq \frac{1}{4}$$

よって，$\dfrac{1}{4} \leqq k < 1$

(ⅱ) $k=1$ のとき

$f'(x)=3(x-2)^2 \geqq 0$ から $f(x)$ は単調増加より，条件を満たす

(ⅲ) $k>1$ のとき

$x=2$ で極大，$x=2k$ で極小

$$\text{最小値 } f(2k)=-4k(k^2-3k-1) \geqq 0$$

$-4k<0$ より

$$k^2-3k-1 \leqq 0 \quad \therefore \frac{3-\sqrt{13}}{2} \leqq k \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

よって，$1 < k \leqq \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

(ⅰ)～(ⅲ)より

$$\frac{1}{4} \leqq k \leqq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

(2) 物理への応用

ここでは，直線上を運動する点の位置，速度，加速度について考えます。

例8 静止の状態にあった自転車が走り始めてから x 秒後に進んだ距離を y m とする．y が $x \geqq 0$ において x^2 に比例し，走り始めてから 3 秒後に 4.5 m 進むならば，走り始めて 5 秒後から 9 秒後までの間の平均の速さは毎秒 $\boxed{}$ m である．

(解説)

$x \geqq 0$ において，y は x^2 に比例するから

$y = ax^2$ (a は正の定数) とおける

走り始めてから 3 秒後に 4.5 m 進むから

$$4.5 = a \cdot 3^2 \quad \therefore\ a = \frac{1}{2}$$

よって，$y = \dfrac{1}{2}x^2$

求める平均の速さは

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 9^2 - \frac{1}{2}\cdot 5^2}{9-5} = 7\ (\text{m/秒})$$

数直線上を運動する点 P の，時刻 t における位置 x は t の関数である。この関数を $x = f(t)$ とすると，t の増分に $\varDelta t$ に対する $f(t)$ の平均変化率

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \frac{f(t+\varDelta t) - f(t)}{\varDelta t}$$

は，時間 t から $t + \varDelta t$ に変わる間の P の平均速度を表します。よって，

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{f(t+\varDelta t) - f(t)}{\varDelta t}$$

は時刻 t における瞬間の速度と考えられます。この瞬間の速度を，時刻 t における P の**速度**といいます。また，速度 $\dfrac{dx}{dt}$ の絶対値 $\left|\dfrac{dx}{dt}\right|$ を，時刻 t における点 P の**速さ**，または速度の大きさといいます。

時刻 t における点 P の速度 v が，t の関数 $v=g(t)$ で表されるとき，v の t に対する変化率

$$a=\frac{dv}{dt}=g'(t)$$

を，時刻 t における点 P の**加速度**といいます。また，$|a|$ を**加速度の大きさ**といいます。速度と加速度について，次のことが成り立ちます。

速度と加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における位置を $x=f(t)$ とすると，点 P の時刻 t における速度 v，加速度 a は

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad a=\frac{dv}{dt}$$

例9

物体を，地上 3 m の位置から毎秒 20 m の初速度で真上に投げ上げるとき，t 秒後の物体の高さを y m とすると，$y=3+20t-4.9t^2$ で表される.

(1)　物体が再び 3 m の高さになるのは何秒後か.

(2)　投げ上げてから 3 秒後の物体の速度 v を求めよ.

(3)　物体の達しうる最高点の y の値を求めよ.

(解説)

(1) $y=3$ のとき

$$3=3+20t-4.9t^2$$

$$4.9t^2-20t=0$$

$$t(49t-200)=0 \qquad \therefore\ t=0,\ \frac{200}{49}$$

よって，再び 3 m の高さになるのは $\frac{200}{49}$ 秒後

(2) t 秒後の物体の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t)=y'=20-9.8t$$

$t=3$ のとき

$$v=20-29.4=-9.4\ (\text{m/秒})$$

(3) 最高点では $v(t)$ の符号が正から負に変わるから $v(t)=0$ より

$$20-9.8t=0 \qquad \therefore\ t=\frac{20}{9.8}=\frac{100}{49}$$

このとき

$$y=3+20\cdot\frac{100}{49}-4.9\cdot\left(\frac{100}{49}\right)^2=\frac{1147}{49}$$

例10
半径 10 cm の球があり，毎分 1 cm の割合で半径が大きくなっている．5 分後に，球の表面積 S cm^2 は毎分何 cm^2 の割合で大きくなっているか変化率を求めよ．また，体積 V cm^3 は 5 分後に毎分何 cm^3 の割合で大きくなっているか変化率を求めよ．

(解説)

t 分後の半径は $(t+10)$ cm より

$$S=4\pi(t+10)^2,\quad V=\frac{4}{3}\pi(t+10)^3$$

よって

$$\frac{dS}{dt}=8\pi(t+10),\quad \frac{dV}{dt}=4\pi(t+10)^2$$

$t=5$ のとき

$$\frac{dS}{dt}=120\pi,\quad \frac{dV}{dt}=900\pi$$

したがって，5 分後の表面積の変化率は 120π cm^2/分，

体積の変化率は　900π cm^3/分

確認問題1
a を正の定数とする．このとき，すべての $x \geqq 0$ と自然数 n に対して不等式 $x^n - a^n \geqq n a^{n-1}(x-a)$ が成り立つことを示せ．

(解説)

$n=1$ のとき

　$x-a \geqq x-a$ であり，成り立つ

$n \geqq 2$ のとき

$f(x)=(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)$ とおく

$f(x) \geqq 0$ を示せばよい

$f'(x)=nx^{n-1}-na^{n-1}=n(x^{n-1}-a^{n-1})$

増減表は下図

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ は $x=a$ のとき極小かつ最小

　最小値 $f(a)=0$

であるから $f(x) \geqq 0$

よって，不等式は成り立つ

確認問題2

(1)　a を実数とする。$x \leqq 0$ において，常に $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1) で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式 $x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$ を解け。

(解説)

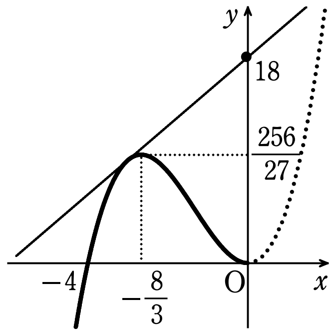
(1) $f(x)=x^3+4x^2$ とすると

$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=0,\ -\dfrac{8}{3}$

$x \leqq 0$ における増減表は下図

x	$\cdots$	$-\dfrac{8}{3}$	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{256}{27}$	$\searrow$	0



$y=f(x)$ $(x \leqq 0)$ のグラフは右図の

$y=f(x)$ 上の $x=t$ における接線の方程式は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3+4t^2)=(3t^2+8t)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2$

これが点 $(0,\ 18)$ を通るとき

$18=-2t^3-4t^2$

$t^3+2t^2+9=0$

$(t+3)(t^2-t+3)=0$　　$\therefore\ t=-3$

このとき，$f'(-3)=3$

よって，求める a の値の範囲は，$a \leqq 3$

(2) $a_0=3$ のとき

$x^3+4x^2 \leqq 3x+18$

$x^3+4x^2-3x-18 \leqq 0$

$(x+3)^2(x-2) \leqq 0$　　$\therefore\ x \leqq 2$

確認問題3

a, b を正の定数とするとき，$x \geqq 0$ に対して不等式

$\dfrac{1}{3}(x^3+a^3+b^3)-\left(\dfrac{x+a+b}{3}\right)^3 \geqq \dfrac{1}{4}(a+b)(a-b)^2$ が成り立つことを示せ.

(解説)

$u=a+b, v=ab$ とおくと， $u>0, v>0$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=u^3-3uv$$

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=u^2-4v$$

より，与えられた不等式は

$$\frac{1}{3}(x^3+u^3-3uv)-\left(\frac{x+u}{3}\right)^3 \geqq \frac{1}{4}u(u^2-4v)$$

$$9(x^3+u^3-3uv)-(x^3+3ux^2+3u^2x+u^3)-\frac{27}{4}(u^3-4uv) \geqq 0$$

$$8x^3-3ux^2-3u^2x+\frac{5}{4}u^3 \geqq 0$$

を示せばよい

$f(x)=8x^3-3ux^2-3u^2x+\dfrac{5}{4}u^3\ (\ x \geqq 0\ )$ とおく

$f'(x)=24x^2-6ux-3u^2=3(2x-u)(4x+u)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=u, -\dfrac{u}{4}$

増減表は右図

x	0	$\cdots$	$\dfrac{u}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

$x=\dfrac{u}{2}$ で極小かつ最小

最小値 $f\left(\dfrac{u}{2}\right)=0$

よって， $f(x) \geqq 0$

確認問題4
a を実数の定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-2)x+2$ とする．
(1)　$f(x)$ の極小値 b を求め，$b\geqq 0$ となるための a の値の範囲を求めよ．
(2)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して，$f(x)\geqq 0$ となるための a の値の範囲を求めよ．

解説

(1) $f'(x)=3x^2-6(a-1)x+3a(a-2)=3(x-a)\{x-(a-2)\}$
$f'(x)=0$ のとき，$x=a-2, a$
$y=f(x)$ は点 $(a-1, f(a-1))$ に関して対称
増減表は下図

x	$\cdots$	$a-2$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$ は $x=a$ で極小
　極小値 $b=f(a)=a^3-3(a-1)a^2+3a^2(a-2)+2$
$\qquad\qquad =a^3-3a^2+2$
$b\geqq 0$ となるとき
　$a^3-3a^2+2\geqq 0$
　$(a-1)(a^2-2a-2)\geqq 0$
　$\therefore 1-\sqrt{3}\leqq a\leqq 1$，$1+\sqrt{3}\leqq a$
(2) $0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$ となるためには
$f(1)\geqq 0$ であることが必要
　$f(1)=1-3(a-1)+3a(a-2)+2$
　$\quad =3a^2-9a+6$
　$\quad =3(a-1)(a-2)\geqq 0$　$\therefore a\leqq 1, a\geqq 2$
$0\leqq a\leqq 1$ のとき，$x=a$ で最小となるが，
(1)より，$0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$
$a<0$ のとき，$x=0$ で最小となるが，
$f(0)=2$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$
$a\geqq 2$ のとき，$x=0$ または $x=1$ で最大となるが
このとき，$f(0), f(1)\geqq 0$ より，$0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq 0$
よって，求める a の値の範囲は $a\leqq 1$，$2\leqq a$

確認問題5

2つの関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$，$g(x)=-9x^2+6x+a$ に対して，次の問いに答えよ。ただし a は定数とする。

(1)　$f(x)$ の極大値および極小値を与える x の値をそれぞれ α，β とおく。α および β の値を求めよ。

(2)　任意の $x>\alpha$ に対して，$f(x)\geqq g(x)$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(3)　任意の $x_1>\alpha$ および任意の $x_2>\alpha$ に対して，$f(x_1)\geqq g(x_2)$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=-1$，2

増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

$x=-1$ で極大　極大値 7

$x=2$ で極小　極小値 -20

よって，$\alpha=-1$，$\beta=2$

(2) (1)より，$\alpha=-1$

$F(x)=f(x)-g(x)=2x^3+6x^2-18x-a$ とする

$x>-1$ において，$F(x)\geqq 0$ となる a の値の範囲を求めればよい

$F'(x)=6x^2+12x-18=6(x-1)(x+3)$

$F'(x)=0$ のとき，$x=1$

増減表は右図

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$	$-10-a$	$\nearrow$

$x=1$ のとき，極小かつ最小

　最小値 $-10-a$

求める a の値の範囲は

　$-10-a\geqq 0$　　$\therefore\ a\leqq -10$

(3) $x>-1$ において，$[f(x)$ の最小値$]\geqq[g(x)$ の最大値$]$ となればよい

(1)より，$f(x)$ は $x=2$ で最小値 -20 をとる

$$g(x)=-9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a+1$$

$g(x)$　$x=\dfrac{1}{3}$ で最大値 $a+1$ をとる

よって，求める a の値の範囲は，$-20\geqq a+1$　　$\therefore\ a\leqq -21$