2.6　最大値・最小値

(1) 最大値・最小値

　導関数を用いて，関数の最大値，最小値を求めてみます。

例1

(1) 関数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ の区間 $-3\leqq x\leqq 3$ における最大値・最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$ $(-2\leqq x\leqq 5)$ の最大値，最小値とそれらをとるときの x の値を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=2x^3+3x^2-12x$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=1,\ -2$

$f(x)$ の増減表は下図

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	45

$x=3$ で最大値 45

$x=1$ で最小値 -7

注

この例からも分かるように，極大値，極小値は必ずしも最大値，最小値ではない。

(2) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x^2-3x-4)=4x(x+1)(x-4)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=0,\ -1,\ 4$

$f(x)$ の増減表は下図

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	19	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-125	$\nearrow$	-72

$x=-2$ で最大値 19

$x=4$ で最小値 -125

例2

関数 $f(x)=x^3-4x^2+3x+1$ の $-1\leqq x\leqq 3$ における最大値，最小値を求めよ。

(解説)

$f(x)=x^3-4x^2+3x+1$

$f'(x)=3x^2-8x+3$

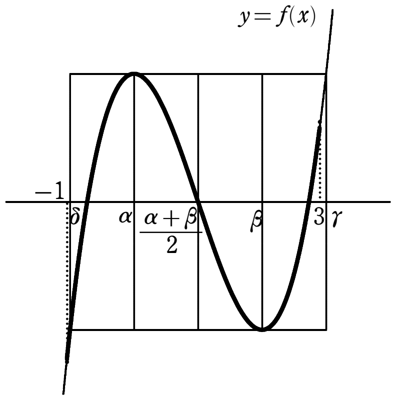
$f'(x)=0$ のとき， $x=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

$\alpha=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$，$\beta=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ とおくと， $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{4}{3}$

増減表は下図

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-7	↗	極大	↘	極小	↗	1

$y=f(x)$ のグラフは右図



右図の8つの長方形の横の長さは $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ より

$$\gamma=\frac{4+2\sqrt{7}}{3}=\frac{2(2+\sqrt{7})}{3}>3$$

$(\sqrt{7}>\sqrt{6.25}=2.5)$

$$\delta=\frac{4-2\sqrt{7}}{3}=\frac{2(2-\sqrt{7})}{3}>-1$$

$(\sqrt{7}<\sqrt{9}=3)$

3次関数の対称性，等間隔性より， $f(x)$ は

$x=\alpha$ のとき最大

$f(x)=(3x^2-8x+3)\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{9}\right)-\dfrac{14}{9}x+\dfrac{7}{3}$ より

最大値 $f(\alpha)=-\dfrac{14}{9}\alpha+\dfrac{7}{3}=\dfrac{7+14\sqrt{7}}{27}$

$x=-1$ のとき最小

最小値 $f(-1)=-7$

注

本問のように，極値をとる x の値が汚いときはグラフを利用するとよい。

例3

θ の関数 $y=\cos 3\theta-3\cos 2\theta+3\cos\theta+1$ について

(1)　$x=\cos\theta$ とおいて，y を x の式で表せ．

(2)　y の最大値と最小値を求めよ．

解説

(1) $y=\cos 3\theta-3\cos 2\theta+3\cos\theta+1$

$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-3(2\cos^2\theta-1)+3\cos\theta+1$

$=4\cos^3\theta-6\cos^2\theta+4$

$=4x^3-6x^2+4$

(2) $x=\cos\theta$ とおくと，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より $-1\leqq x\leqq 1$

$f(x)=4x^3-6x^2+4$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ とおく

$f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f(x)$ の増減表は下図

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-6	↗	極大 4	↘	2

最大値は 4，最小値は -6

例4

実数 a に対し，関数 $f(x)=x^3-3x$ の $a\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

(2)　$f(a)=f(a+1)$ を満たす a の値を求めよ。

(3)　a の値で場合を分けて，$m(a)$ を a の式として表せ。

(4)　横に a 軸，縦に b 軸をとり，平面上に曲線 $b=m(a)$ の概形をかけ。

解説

(1) $f(x)=x^3-3x$

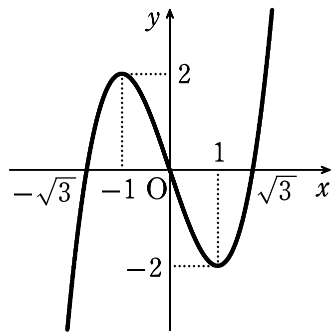
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=-1$，1

増減表は右図

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極大	↗

$x=-1$ のとき極大　極大値 2
$x=1$ のとき極小　極小値 -2
関数 $y=f(x)$ のグラフは右図



(2) $f(a)=f(a+1)$ のとき

$a^3-3a=(a+1)^3-3(a+1)$

$3a^2+3a-2=0$　　$\therefore\ a=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$

(3) (i) $a<\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}$ のとき

$m(a)=f(a)=a^3-3a$

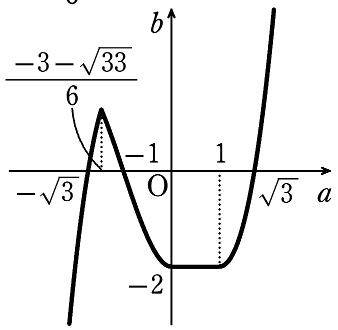
(ii) $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}\leqq a$ かつ $a+1<1$，すなわち $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{6}\leqq a<0$ のとき

$m(a)=f(a+1)=(a+1)^3-3(a+1)$
$\qquad=a^3+3a^2-2$

(iii) $a<1\leqq a+1$，すなわち $0\leqq a<1$ のとき
$m(a)=f(1)=-2$

(iv) $1\leqq a$ のとき
$m(a)=f(a)=a^3-3a$

(4) (3)より，曲線 $b=m(a)$ の概形は右図



別解
最小値は，極小値または端点でとるので，これらの値をグラフ化して，いちばん小さいものを最小としてもよい。ただし，極小値で最小値をとるときは，極小値が定義域に入っていなければならないので，極小値で最小値をとるときには条件が付くことに注意する。

例5
3 次関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ がある。ただし，a は正の定数とする。
(1)　$f(x)$ が $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲において極値をとらないような a の値の範囲を求めよ。また，そのときの $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ a で表せ。
(2)　$f(x)$ が $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲において極値をとるとき，$f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ a で表せ。

解説
(1) $f(x)=x^3-3a^2x$

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=\pm a$

増減表は右図

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $2a^3$	$\searrow$	極小 $-2a^3$	$\nearrow$

$f(x)$ が $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲において極値をとらないとき

$-a<-2, 2<a \quad \therefore 2<a$

このとき

$x=-2$ で最大　最大値 $6a^2-8$

$x=2$ で最小　最小値 $-6a^2+8$

(2) $f(x)$ が $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲において極値をとるとき

$0<a\leqq 2$

最大値

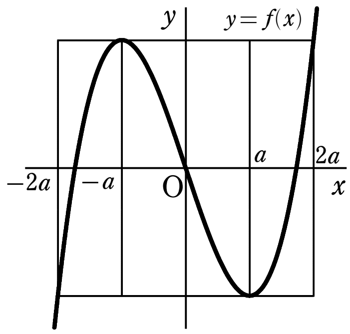
$2a\geqq 2$ すなわち $a\geqq 1$ のとき $-6a^2+8$

$a<1$ のとき $2a^3$

最小値

$a\geqq 1$ のとき $6a^2-8$

$a<1$ のとき $-2a^3$



例6

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

(1)　$f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

解説

(1) $f(-1)\leqq f(3)$ より

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leqq 9-\frac{9}{2}a \quad \therefore a\leqq\frac{7}{3}$$

$a>0$ より， $0<a\leqq\dfrac{7}{3}$

(2) $f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=0$，a

$f(x)$ の増減表は右図

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$x=a$ で極小であるから，$f(a)\leqq f(-1)$ より

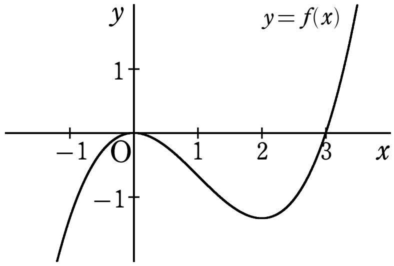
$$-\frac{1}{6}a^3\leqq-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$$

$$(a+1)^2(a-2)\geqq 0$$

$a>0$ であるから $(a+1)^2>0$ より

$$a-2\geqq 0 \qquad \therefore\ a\geqq 2$$

(3) (1), (2) より



$0<a<2$ のとき $f(-1)=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}a$

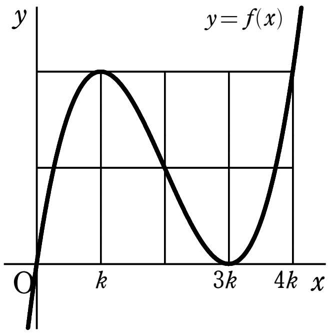
$2\leqq a\leqq 3$ のとき $f(a)=-\dfrac{1}{6}a^3$

$a>3$ のとき $f(3)=9-\dfrac{9}{2}a$

例7
k を $0<k<1$ である実数とする．関数 $f(x)=x(x-3k)^2$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を求めよ．また，最大値が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，k の値を求めよ．

(解説)

$y=f(x)$ のグラフは右図



$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値は

(i) $4k\geqq 1$，すなわち $\dfrac{1}{4}\leqq k<1$ のとき $4k^3$

(ii) $4k<1$，すなわち $0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき $(1-3k)^2$

最大値が $\dfrac{1}{2}$ となるとき，

(i)のとき

$$4k^3=\frac{1}{2} \qquad k^3=\frac{1}{8}$$

$\dfrac{1}{4}\leqq k<1$ より，$k=\dfrac{1}{2}$

(ii)のとき

$$(1-3k)^2=\frac{1}{2} \qquad 1-3k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ k=\frac{2\pm\sqrt{2}}{6}$$

$0<k<\dfrac{1}{4}$ より，　$k=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

以上より

$$k=\frac{1}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

(2) 最大値･最小値の応用問題

例8

xy 平面において，放物線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ，$(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2+6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし，$0<a<3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

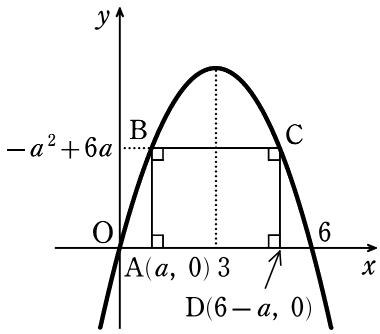
(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a を求め，関数 $S(a)$ のグラフをかけ。

解説

(1) A $(a,\ 0)$，B $(a,\ -a^2+6a)$ とし，面積が最大となるときの長方形を ABCD とする

このとき，長方形 ABCD は右図のように放物線と直線で囲まれた図形に内接するから



$$\mathrm{C}\,(6-a,\ -a^2+6a),\ \mathrm{D}\,(6-a,\ 0)$$

このとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AD} \\ &= (-a^2+6a)\{(6-a)-a\} \\ &= 2a^3-18a^2+36a \end{aligned}$$

(2) $S'(a)=6a^2-36a+36=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$ のとき，　$a=3\pm\sqrt{3}$

$0<a<3$ における増減表は右図

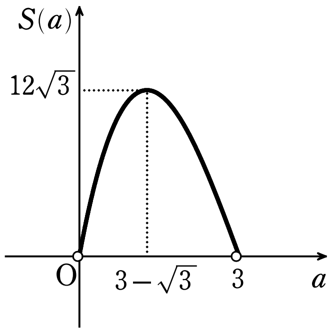
a	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$S(a)$ の値が最大となる a の値は

$$a=3-\sqrt{3}$$

$$S(3-\sqrt{3})=(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$$
$$=12\sqrt{3}$$

$S(a)$ のグラフは右図



例9

半径 1 の球に高さ h の円錐が内接している。

(1)　この円錐の体積 V を h で表せ。

(2)　V の最大値とそのときの h の値を求めよ。

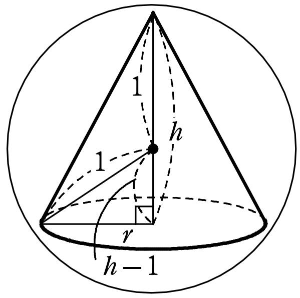
解説

(1) 円錐の底面の半径を r とする

高さ h の範囲は，$0<h<2$

球の中心から円錐の底面に下ろした垂線の長さは

$|h-1|$ であるから，三平方の定理より



$$r^2+(h-1)^2=1^2$$

$$r^2=1-(h-1)^2=-h^2+2h$$

よって

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(-h^2+2h)h$$
$$=\frac{\pi}{3}(-h^3+2h^2)\quad(0<h<2)$$

(2) $\dfrac{dV}{dh}=\dfrac{\pi}{3}(-3h^2+4h)=-\dfrac{\pi}{3}h(3h-4)$

$\dfrac{dV}{dh}=0$ のとき，$h=0$，$\dfrac{4}{3}$

$0<h<2$ における増減表は右図

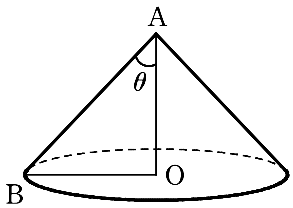
h	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dV}{dh}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{32}{81}\pi$	$\searrow$	

よって，V は $h=\dfrac{4}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{32}{81}\pi$ をとる

例10

Aを頂点とする円錐において，Oを底面の中心，
Bを底面の周上の点とし，AB＝1，∠OAB＝θ
(ただし，$0° < \theta < 90°$) とする．
この円錐の体積を，$\cos\theta$ を用いて表すと

ア$\boxed{}$



となり，$\cos\theta =$ イ$\boxed{}$ のとき最大値 ウ$\boxed{}$ をとる．

(解説)

AO＝$\cos\theta$，BO＝$\sin\theta$

よって，この円錐の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}(1-\cos^2\theta)\cos\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}(-\cos^3\theta+\cos\theta)$$

$\cos\theta = x$ とおくと， $0° < \theta < 90°$ より $0 < x < 1$

$$V=\frac{\pi}{3}(-x^3+x)$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi}{3}(-3x^2+1)=-\pi\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$0 < x < 1$ における増減表は下図

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dx}$		$+$	0	$-$	
V		↗	最大	↘	

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ すなわち $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最大

最大値 $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

確認問題1
関数 $f(x)=x^3-3x^2-3x+1$ について，次の問いに答えよ。
(1)　方程式 $f(x)=0$ の実数解をすべて求めよ。
(2)　$f(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ。
(3)　関数 $y=|f(x)|$ の $-1\leqq x\leqq 4$ における最大値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=(x+1)(x^2-4x+1)$ より

$x=-1,\ 2\pm\sqrt{3}$

(2) $f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1)$

$f'(x)=0$ のとき

$x^2-2x-1=0 \quad \therefore\ x=1\pm\sqrt{2}$

増減表は右図

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ると

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-4x$$

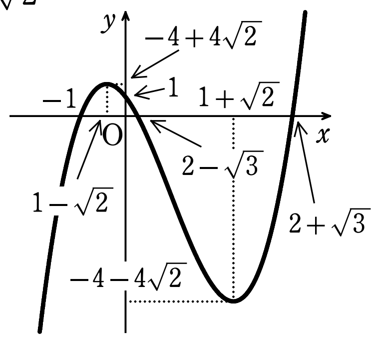
$x=1-\sqrt{2}$ で極大

極大値 $f(1-\sqrt{2})=-4(1-\sqrt{2})=-4+4\sqrt{2}$

$x=1+\sqrt{2}$ で極小

極小値 $f(1+\sqrt{2})=-4(1+\sqrt{2})=-4-4\sqrt{2}$

よって，グラフは右図



(3) $-1\leqq x\leqq 4$ における $y=|f(x)|$ の最大値の候補は，$x=-1,\ 1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2},\ 4$ のときである

$|f(-1)|=0$

$|f(1+\sqrt{2})|=|-4-4\sqrt{2}|=4+4\sqrt{2}$

$|f(1-\sqrt{2})|=|-4+4\sqrt{2}|=4\sqrt{2}-4$

$|f(4)|=5$

より，$y=|f(x)|$ は $x=1+\sqrt{2}$ で最大

最大値 $4+4\sqrt{2}$

確認問題2

θ の関数 $f(\theta)=3\sin\theta+3\cos\theta+3\sin\theta\cos\theta+2\sin^3\theta+2\cos^3\theta$ について

(1) $x=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を x の式で表せ。

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ における $f(\theta)$ の最小値と最大値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(解説)

(1) $f(\theta)=3(\sin\theta+\cos\theta)+3\sin\theta\cos\theta+2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$

$x=\sin\theta+\cos\theta$ より

$$x^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta \qquad \therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2}$$

また

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=x^3-3\cdot\frac{x^2-1}{2}\cdot x=-\frac{x^3-3x}{2}\end{aligned}$$

よって

$$f(\theta)=3x+3\cdot\frac{x^2-1}{2}-2\cdot\frac{x^3-3x}{2}=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{3}{2}$$

(2) $x=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta<2\pi$ から $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ より

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1 \qquad \therefore -\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$$

$f(\theta)=g(x)$ とおくと

$$g(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{3}{2}$$

$$g'(x)=-3x^2+3x+6=-3(x+1)(x-2)$$

$g(x)$ の増減表は下図

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{3}{2}-4\sqrt{2}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{3}{2}+4\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$ のとき最大

　最大値 $\dfrac{3}{2}+4\sqrt{2}$

このとき

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1 \qquad \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

$x=-1$ のとき最小

　最小値 -5

このとき

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \qquad \therefore\ \theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$

確認問題3

x の関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値，最小値およびそれぞれのときの x の値を求めよ.

解説

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-a)(x-1)$

$a=1$ のとき， $f'(x) \geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加

$a<1$ のとき

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$a>1$ のとき

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

最大値

$a<0$ のとき，$x=1$ で最大　最大値 $f(0)=0$

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき， $x=a$ で最大　最大値 $f(a)=-a^3+3a^2$

$a>1$ のとき， $x=1$ で最大　最大値 $f(1)=3a-1$

最小値

$f(0)=f(1)$ となるとき， $0=3a-1$ 　 $\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$f(0)<f(1)$， $a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$f(0)>f(1)$ に注意して

$a<\dfrac{1}{3}$ のとき， $x=1$ で最小　最小値 $f(1)=3a-1$

$a=\dfrac{1}{3}$ のとき， $x=0,1$ で最小　最小値 0

$a>\dfrac{1}{3}$ のとき， $x=0$ で最小　最小値 $f(0)=0$

確認問題4

a は定数とする．関数 $f(x)=x^3+3x^2-6ax+1$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ．

解説

$f'(x)=3x^2+6x-6a=3(x^2+2x-2a)$

$f'(x)=0$ のとき

$x^2+2x-2a=0 \cdots ①$

判別式を D とすると，

$D \leqq 0$ のとき

$\dfrac{D}{4}=1+2a \leqq 0 \quad \therefore\ a \leqq -\dfrac{1}{2}$

このとき， $f'(x) \geqq 0$ となり $f(x)$ は単調増加

$x=-1$ のとき最小　最小値 $f(-1)=6a+3$

$D>0$ ，すなわち $a>-\dfrac{1}{2}$ のとき，①は異なる 2 実解をもち

$x=-1 \pm \sqrt{1+2a}$

$y=f(x)$ は点 $(-1,\ f(-1))$ の関して対称で

$x=-1-\sqrt{1+2a}$ のとき極大，$x=-1+\sqrt{1+2a}$ のとき極小となる

$-1+\sqrt{1+2a}<1$ のとき

$\sqrt{2a+1}<2 \quad \therefore\ -\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$

このとき， $x=-1+\sqrt{1+2a}$ で最小

$f(x)=(x^2+2x-2a)(x+1)-2(2a+1)x+(2a+1)$ より

最小値 $f(-1+\sqrt{2a+1})=-2(2a+1)(-1+\sqrt{2a+1})+(2a+1)$

$=3(2a+1)-2\sqrt{(2a+1)^3}$

$-1+\sqrt{1+2a}<1$ ，すなわち， $a \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$x=1$ で最小

最小値 $f(1)=-6a+5$

確認問題5

(1)　縦と横の長さの和が一定である長方形のうちでは，正方形が面積最大であることを示せ．

(2)　上の結果を参考にして，縦の長さ，横の長さ，高さの和が一定である直方体のうちでは，立方体が体積最大であることを示せ．

解説

(1) 縦，横の長さをそれぞれ x, y とし，$x+y=l$ (一定) とする

$x>0, y>0$ であるから，相加相乗平均より

$$\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy} \quad \therefore\ xy \leqq \frac{l^2}{4}$$

等号成立は $x=y$ のとき

よって，面積 xy は $x=y$ ，すなわち，正方形のとき最大である

別解 $xy=x(l-x)=-\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}$ として解いてもよい

(2) 縦，横，高さをそれぞれ x, y, z とし，$x+y+z=k$ (一定) とする

$x>0, y>0, z>0$ であり，z を固定して，$x+y=k-z$ (一定)

このとき，$k-z>0$ より，$0<z<k$

(1)より，xy は $x=y$ のとき最大値 $\frac{(k-z)^2}{4}$ をとる

$z>0$ より，$xyz \leqq \frac{(k-z)^2}{4}z$

$f(z)=\frac{1}{4}z(k-z)^2=\frac{1}{4}(z^3-2kz^2+k^2z), 0<z<k$ とおく

$f'(z)=\frac{1}{4}(3z^2-4kz+k^2)=\frac{1}{4}(z-k)(3z-k)$

$f(z)$ は $z=\frac{k}{3}$ のとき 最大値をとる

このとき $x=y, x+y=\frac{2}{3}k$ より，$x=y=z=\frac{k}{3}$

すなわち，立方体が体積最大である

確認問題6

中心 O，半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D を頂点とする四面体において，三角形 BCD は正三角形であるとする。また，三角形 BCD の重心 G と O との距離を x，四面体 ABCD の体積を V とおく。

(1)　三角形 BCD の面積を x で表せ。

(2)　$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，V の最大値を求めよ。

(3)　V の最大値を求めよ。

(解説)

(1) 球の対称性より，O から △BCD に下した垂線の足は G であるから

$$\mathrm{BG}=\sqrt{1-x^2}\ ,\ \ \mathrm{BC}=\sqrt{3}\ \mathrm{BG}=\sqrt{3(1-x^2)}$$

よって，△ BCDの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3(1-x^2)}\right)^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-x^2)$$

(2) V が最大となるのは，

△BCD を底面ととして，高さが最大となるときである

高さが最大となるのは，A が直線 OG と球の交点のうち，O に関して G と逆側にあるときである

このとき，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{32}$$

(3) $0\leqq x<1$ を満たす x に対して，V の最大値は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-x^2)\cdot(1+x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^3-x^2+x+1)$$

$f(x)=-x^3-x^2+x+1$ とすると

$f'(x)=-3x^2-2x+1=-(x+1)(3x-1)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=-1,\ \dfrac{1}{3}$

増減表は下図

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$x=\dfrac{1}{3}$ のとき最大

最大値 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{32}{27}$

よって，V の最大値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{32}{27}=\frac{8\sqrt{3}}{27}$$