3.7　いろいろな面積(3)

次は放物線と，放物線に 2 本の接線が引ける点から放物線に引いた 2 本の接線とが囲む図形の面積です。

例1

p を定数，q を正の定数とし，直線 $y=px+q$ …… ① と放物線 $y=x^2$ …… ② の 2 交点をそれぞれ $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とする．

(1)　直線 ① と放物線 ② で囲まれた部分の面積 S_1 は $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(2)　放物線 ② と，点 A, B における放物線 ② の接線とで囲まれた部分の面積 S_2 を α, β を用いて表し，比 $S_1:S_2$ を求めよ．

(解説)

(1) ①と②の共有点は

$$x^2=px+q$$

$$x^2-px-q=0$$

この 2 解が α，β である

$$S_1=\int_\alpha^\beta (px+q-x^2)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) $f(x)=x^2$ とおくと，$f'(x)=2x$

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ における接線の方程式はそれぞれ

$$y-\alpha^2=f'(\alpha)(x-\alpha)\ ,\quad y-\beta^2=f'(\beta)(x-\beta)$$

$$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha),\quad y-\beta^2=2\beta(x-\beta)$$

$$\therefore\ y=2\alpha x-\alpha^2,\ y=2\beta x-\beta^2$$

この 2 直線の交点の x 座標は

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$$

$$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2 \quad \therefore\ x=\frac{\alpha+\beta}{2}\ (\alpha\neq\beta)$$

よって

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

したがって

$$S_1:S_2=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3:\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=2:1$$

例2

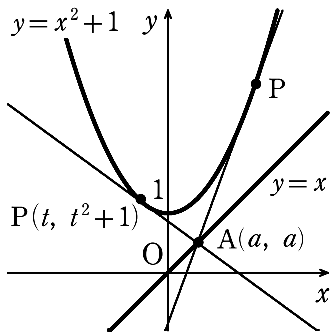
xy 平面上の放物線 C：$y=x^2+1$ について考える。直線 $y=x$ 上に点 A $(a,\ a)$ をとる。

(1)　点 A を通り，放物線 C に接する 2 直線を求めよ。

(2)　(1) で求めた 2 直線と放物線 C で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた $S(a)$ を最小にする a を求めよ。

解説



(1) $f(x)=x^2+1$ とおくと，　$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)$$

$$\therefore\ y=2tx-t^2+1$$

これが点 A $(a,\ a)$ を通るとき

$$a=2ta-t^2+1$$

$$t^2-2at+a-1=0$$

$$\therefore\ t=a\pm\sqrt{a^2-a+1}$$

よって，求める 2 つの接線の方程式は

$$y=2(a+\sqrt{a^2-a+1})x-(2a^2-a+2a\sqrt{a^2-a+1}),$$
$$y=2(a-\sqrt{a^2-a+1})x-(2a^2-a-2a\sqrt{a^2-a+1})$$

(2) $\alpha=a-\sqrt{a^2-a+1}$, $\beta=a+\sqrt{a^2-a+1}$ とおくと， $a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より

$$S(a)=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2+1-(2\alpha x-\alpha^2+1)\}dx$$
$$+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2+1-(2\beta x-\beta^2+1)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{2}{3}(\sqrt{a^2-a+1})^3$$

(3) (2)より

$$S(a)=\frac{2}{3}\left\{\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right\}^3$$

$S(a)$ を最小にする a の値は $a=\dfrac{1}{2}$

次は 2 次の項の係数が等しい 2 つの異なる放物線とそれらの共通接線とが囲む図形の面積です

例3

2 つの放物線 C_1：$y=x^2$ と C_2：$y=x^2-6x+15$ の共通接線を ℓ とする。

(1)　ℓ の方程式を求め，C_1，C_2 および ℓ を図示せよ。

(2)　C_1，C_2 および ℓ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

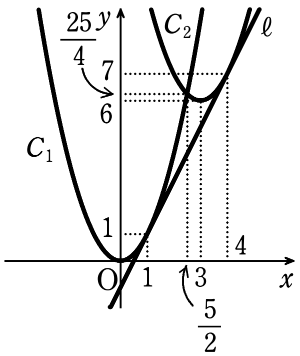
解説

(1) $f(x)=x^2$ とおくと， $f'(x)=2x$

C_1 の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-t^2=2t(x-t)$$
$$y=2tx-t^2$$
これが C_2 にも接するとき
$$2tx-t^2=x^2-6x+15$$
$$x^2-2(t+3)x+t^2+15=0 \cdots ①$$
が重解をもてばよい
この判別式を D とすると， $D=0$ より
$$\frac{D}{4}=(t+3)^2-1\cdot(t^2+15)=6(t-1)=0 \quad \therefore t=1$$
よって，ℓ の方程式は
$$y=2x-1$$
また，ℓ と C_1 の接点は $(1,\ 1)$
ℓ と C_2 の接点は $(4,\ 7)$
C_1 と C_2 の交点は,
$$x^2=x^2-6x+15 \quad \therefore x=\frac{5}{2} \quad \therefore \left(\frac{5}{2},\ \frac{25}{4}\right)$$



C_2 : $y=(x-3)^2+6$ であるから,
C_1，C_2 および ℓ を図示すると右図
(2) 求める面積を S とすると
$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{x^2-(2x-1)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{x^2-6x+15-(2x-1)\}dx$$
$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2dx$$
$$=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^4=\frac{9}{4}$$

これも一般化してみます。2 つの異なる放物線を
C_1: $y=ax^2+b_1x+c_1$, C_2: $y=ax^2+b_2x+c_2$ $(b_1 \neq b_2)$ ($b_1=b_2$ のときは共通接線をもたない) とし，共通接線を $y=mx+n$ とする。これらと共通接線とが接する点の x 座標がそれぞれ α, β ($\alpha<\beta$)であるとする。

C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$ax^2+b_1x+c_1=ax^2+b_2x+c_2$$

$$(b_1-b_2)x=c_2-c_1 \quad \therefore\ x=\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2}$$

ここで， $f(x)=ax^2+b_1x+c_1$, $g(x)=ax^2+b_2x+c_2$ とおくと

$f'(x)=2ax+b_1$, $g'(x)=2ax+b_2$

C_1 の $x=\alpha$ における接線は

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

$$y-(a\alpha^2+b_1\alpha+c_1)=(2a\alpha+b_1)(x-\alpha)$$

$$\therefore\ y=(2a\alpha+b_1)x-a\alpha^2+c_1$$

C_2 の $x=\beta$ における接線は

$$y=(2a\beta+b_2)x-a\beta^2+c_2$$

これらは共通接線であり，同じものであるから

$$2a\alpha+b_1=2a\beta+b_2 \quad \therefore\ b_1-b_2=2a(\beta-\alpha)$$

$$-a\alpha^2+c_1=-a\beta^2+c_2 \quad \therefore\ c_2-c_1=a(\beta^2-\alpha^2)$$

よって，

$$x=\frac{a(\beta^2-\alpha^2)}{2a(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって，2 つの放物線と共通接線とで囲まれる部分の面積 S は

$a>0$ であるとすれば，

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{(ax^2+b_1x+c_1)-(mx+n)\}dx$$

$$+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{(ax^2+b_2x+c_2)-(mx+n)\}dx$$

$$=a\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

となります。積分区間の数字が汚くなったり，被積分関数に文字が入っていて因数分解できないときは，このように一般的に扱えないと計算がとても大変です。

次は 3次関数とその 3次関数の接線が囲む図形の面積です。

例4

xy 平面上に，曲線 C：$y=x^3-x$ と C 上の点 A$(-1,\ 0)$ があるとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 A を通る直線と C との共有点が，A を含めて 2 個であるような 2 本の直線 l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　C と l_1 で囲まれた部分の面積，C と l_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

(解説)

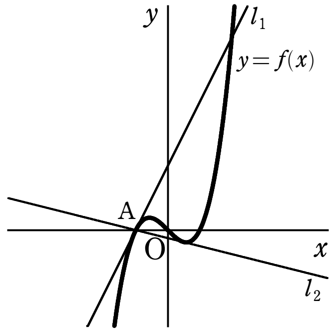
(1) $f(x)=x^3-x$ とおくと，　$f'(x)=3x^2-1$

C の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(3t^2-1)x-2t^3$$



これがA$(-1, 0)$ を通るとき

$$0=-3t^2+1-2t^3$$

$$2t^3+3t^2-1=0$$

$$(t+1)^2(2t-1)=0 \qquad \therefore\ t=-1, \frac{1}{2}$$

よって，求める接線は

$$l_1 : y=2x+2,\ l_2 : y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

(2) C と l_1 で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1=\int_{-1}^{2}\{2x+2-(x^3-x)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx=\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4=\frac{27}{4}$$

C と l_2 で囲まれた部分の面積 S_2 は

$$S_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left\{x^3-x-\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2}-(-1)\right\}^4=\frac{27}{64}$$

次は3次関数とその3次関数に接する2次関数で囲まれた図形の面積です。

例5
2つの曲線 C_1：$y=x^3-x$，C_2：$y=x^2+ax$ を考える。ただし，a は実数である。
(1)　C_1 と C_2 がある共有点で共通の接線をもつような a の値をすべて求めよ。更に，そのときの接点の x 座標を求めよ。
(2)　(1) で求めたそれぞれの a に対して，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説
(1) $f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2+ax$ とすると
$f'(x)=3x^2-1$，$g'(x)=2x+a$
C_1 と C_2 が $x=t$ で共通の接線をもつとき

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^3-t=t^2+at \cdots ① \\ 3t^2-1=2t+a \cdots ② \end{cases}$$

②より，$a=3t^2-2t-1$
①より

$$t^3-t=t^2+(3t^2-2t-1)t$$

$$t^2(2t-1)=0 \quad \therefore\ t=0,\ \frac{1}{2}$$

$t=0$ のとき $a=-1$，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $a=-\dfrac{5}{4}$

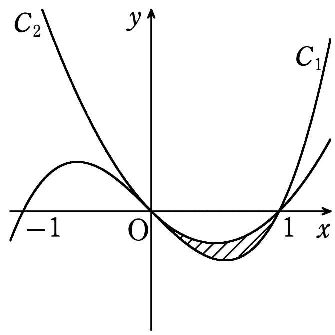
$a=-1$ のとき 0，$a=-\dfrac{5}{4}$ のとき $\dfrac{1}{2}$

(2) $f(x)=x(x+1)(x-1)$
(i) $a=-1$ のとき
$g(x)=x^2-x=x(x-1)$
2曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標は

$$x^3-x=x^2-x$$

$$x^2(x-1)=0 \quad \therefore\ x=0,\ 1$$

C_1，C_2 の概形は右図



よって，求める面積 S_1 は

$$S_1=\int_0^1\{(x^2-x)-(x^3-x)\}dx$$

$$=-\int_0^1 x^2(x-1)dx=\frac{1}{12}(1-0)^4=\frac{1}{12}$$

(ii) $a=-\frac{5}{4}$ のとき

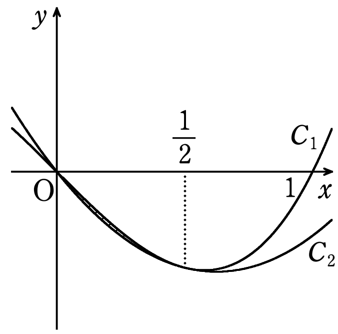
$$g(x)=x^2-\frac{5}{4}x=x\left(x-\frac{5}{4}\right)$$

2 曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標は

$$x^3-x=x^2-\frac{5}{4}x$$

$$x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore\ x=0,\ \frac{1}{2}$$

C_1，C_2 の概形は右図



よって，求める面積 S_2 は

$$S_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{(x^3-x)-\left(x^2-\frac{5}{4}x\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}-0\right)^4=\frac{1}{192}$$

次は 3次の項の係数が等しい 2 つの異なる 3次関数が囲む図形の面積です。

例6
関数 $f(x)=x^2(x-1)$ について，次の問いに答えよ。
(1)　$f(x)$ を微分せよ。
(2)　$f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。
(3)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸の正の方向に 1，y 軸の正の方向に 2 だけ平行移動してできる曲線の方程式を $y=g(x)$ とするとき，$g(x)$ を求めよ。
(4)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(解説)

(1) $f'(x)=3x^2-2x$

(2) $f'(x)=x(3x-2)$

$f'(x)=0$ のとき， $x=0,\ \dfrac{2}{3}$

$f(x)$ の増減表は下図

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=0$ で極大，極大値は $f(0)=0$

$x=\dfrac{2}{3}$ で極小，極小値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}-1\right)=-\dfrac{4}{27}$

(3) $y=x^2(x-1)$ のグラフを x 軸の正の方向に 1，y 軸の正の方向に 2 だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y-2=(x-1)^2\{(x-1)-1\}$$

$$y=(x-1)^2(x-2)+2$$

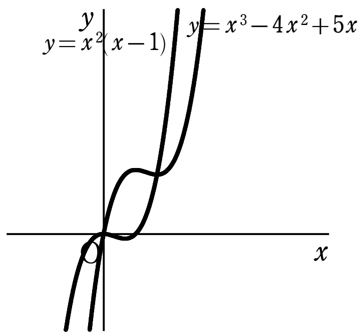
$$=x^3-4x^2+5x \qquad \therefore\ g(x)=x^3-4x^2+5x$$

(4) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^2(x-1)=x^3-4x^2+5x$$

$$3x^2-5x=0$$

$$x(3x-5)=0 \qquad \therefore\ x=0,\ \frac{5}{3}$$



求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{5}{3}}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=-3\int_0^{\frac{5}{3}}x\left(x-\frac{5}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-0\right)^3=\frac{125}{54}$$

次は極値を 3 つもつ 4次関数とその 4次関数の 2 重接線で囲まれる図形の面積です。

例7

曲線 $y=f(x)=x^4-2x^3-3x^2+5x+5$ 上の異なる 2 点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ において，直線 $y=g(x)=ax+b$ がこの曲線に接するとする．ただし，$\alpha<\beta$ とする．このとき，α, β, a, b の値を求めると

$\alpha=$ ア $\boxed{}$, $\beta=$ イ $\boxed{}$, $a=$ ウ $\boxed{}$, $b=$ エ $\boxed{}$ である．

また，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とすると，$S=$ オ $\boxed{}$ である．

解説

題意より，$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \cdots(*)$

$$(\text{左辺})=x^4-2x^3-3x^2+5x+5-(ax+b)$$
$$=x^4-2x^3-3x^2+(5-a)x+5-b$$

$$(\text{右辺})=\{(x-\alpha)(x-\beta)\}^2=\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}^2$$
$$=x^4-2(\alpha+\beta)x^3+\{(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta\}x^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

$(*)$が任意の x で成り立つとき

$-2=-2(\alpha+\beta) \cdots$①

$-3=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta \cdots$②

$5-a=-2\alpha\beta(\alpha+\beta) \cdots$③

$5-b=\alpha^2\beta^2 \cdots\cdots$ ④

①より，$\alpha+\beta=1$

②より，$\alpha\beta=-2$

α, β は 2 次方程式 $t^2-t-2=0$ の解であり

$\alpha<\beta$ より，$\alpha=$ ア -1, $\beta=$ イ 2

③より，$a=$ ウ 1

④より，$b=$ エ 1

よって

$$S=\int_{-1}^{2}\{x^4-2x^3-3x^2+5x+5-(x+1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)^2dx=\frac{1}{30}\{2-(-1)\}^5=\text{オ}\ \frac{81}{10}$$

確認問題1

点Pから放物線 $y=x^2$ へ互いに直交する2本の接線が引けるとする。その接点を

A$(s,\ s^2)$，B$(t,\ t^2)$（ただし $s<t$）とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　s を t の式で表せ。

(2)　放物線と線分 PA，PB で囲まれる図形の面積 S を t の式で表せ。

(3)　S の最小値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=x^2$ とおくと，$f'(x)=2x$

A$(s,\ s^2)$ における接線の方程式は

$$y-s^2=f'(s)(x-s)$$

$$y-s^2=2s(x-s) \qquad \therefore\ y=2sx-s^2$$

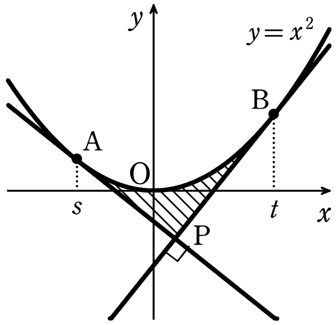
B$(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y=2tx-t^2$

この2本の接線が直交するから

$$2s\times 2t=-1$$

このとき，$t\neq 0$ より，$s=-\dfrac{1}{4t}$

(2) 点Pの x 座標は



$$2sx-s^2=2tx-t^2$$

$$2(s-t)x=s^2-t^2 \qquad \therefore\ x=\frac{s+t}{2}$$

よって

$$S=\int_s^{\frac{s+t}{2}}\{x^2-(2sx-s^2)\}dx+\int_{\frac{s+t}{2}}^{t}\{x^2-(2tx-t^2)\}dx$$

$$=\int_s^{\frac{s+t}{2}}(x-s)^2dx+\int_{\frac{s+t}{2}}^{t}(x-t)^2dx=\left[\frac{(x-s)^3}{3}\right]_s^{\frac{s+t}{2}}+\left[\frac{(x-t)^3}{3}\right]_{\frac{s+t}{2}}^{t}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{t-s}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{s-t}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(t-s)^3=\frac{1}{12}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3$$

(3) $s=-\dfrac{1}{4t}$ より，s と t は異符号であり，$s<t$ より，　$t>0$

相加相乗平均より

$$S=\frac{1}{12}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3 \geqq \frac{1}{12}\left(2\sqrt{t\cdot\frac{1}{4t}}\right)^3=\frac{1}{12}$$

等号成立は $t=\dfrac{1}{4t}$ すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき

このとき S は最小で，最小値は $\dfrac{1}{12}$

確認問題2

a を正の実数とし，2 つの放物線 C_1：$y=x^2$，C_2：$y=x^2-4ax+4a$ を考える。

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

(1) $f(x)=x^2-4ax+4a$ とおくと， $f'(x)=2x-4a$

C_2 の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(t^2-4at+4a)=(2t-4a)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(2t-4a)x-t^2+4a$$

これが C_1 にも接するとき

$$x^2=(2t-4a)x-t^2+4a$$

$$x^2-2(t-2a)x+t^2-4a=0$$

が重解をもてばよいから，判別式を D として， $D=0$ より

$$D=(t-2a)^2-(t^2-4a)=-4at+4a^2+4a=0 \qquad \therefore\ t=a+1$$

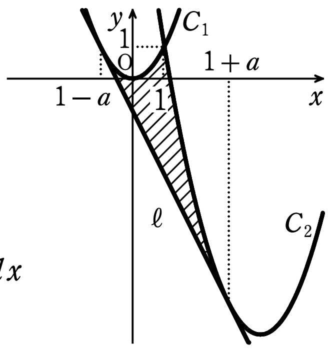
よって l は

$$y=2(1-a)x-(1-a)^2$$

l と C_1 の接点の x 座標は $x=t-2a=1-a$

(2) C_1 と C_2 の交点は，点 $(1,\ 1)$ であるから，

求める面積をS とすると



$$S=\int_{1-a}^{1}\{x^2-2(1-a)x+(1-a)^2\}dx$$

$$+\int_{1}^{1+a}\{x^2-4ax+4a-2(1-a)x+(1-a)^2\}dx$$

$$=\int_{1-a}^{1}(x-1+a)^2dx+\int_{1}^{1+a}(x-1-a)^2dx$$

$$=\left[\frac{(x-1+a)^3}{3}\right]_{1-a}^{1}+\left[\frac{(x-1-a)^3}{3}\right]_{1}^{1+a}=\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}a^3$$

確認問題3

(1)　3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx$ $(a>0)$ のグラフを C とする．原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ．

(2)　(1) で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする．C と l_1 で囲まれる部分の面積を S_1，C と l_2 で囲まれる部分の面積を S_2 とおく．この 2 つの面積の比 $S_1:S_2$ を求めよ．

(解説)

(1) $f(x)=-x^3+ax^2+bx$

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(-t^3+at^2+bt)=(-3t^2+2at+b)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(-3t^2+2at+b)x+2t^3-at^2$$

これが原点を通るとき

$$2t^3-at^2=0$$

$$t^2(2t-a)=0 \qquad \therefore\ t=0, \frac{a}{2}$$

$t=0$ のとき，$y=bx$，$t=\dfrac{a}{2}$ のとき，$y=\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)x$

(2) $a>0$ より，$\dfrac{a^2}{4}+b>b$

よって，l_1：$y=\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)x$，$l_2$：$y=bx$

$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ において $\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)x\geqq -x^3+ax^2+bx$ より

$$S_1=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{\left(\frac{a^2}{4}+b\right)x-(-x^3+ax^2+bx)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}}x\left(x-\frac{a}{2}\right)^2dx=\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\right)^4=\frac{a^4}{192}$$

C と $y=bx$ の共有点の x 座標は

$$-x^3+ax^2+bx=bx$$

$$x^2(x-a)=0 \qquad \therefore\ x=0, a$$

$0 \leqq x \leqq a$ において $-x^3+ax^2+bx \geqq bx$ より

$$S_2=\int_0^a \{(-x^3+ax^2+bx)-bx\}dx$$

$$=-\int_0^a x^2(x-a)dx=\frac{a^4}{12}$$

よって

$$S_1 : S_2=\frac{a^4}{192} : \frac{a^4}{12}=1 : 16$$

$\boxed{\text{注}}$ この結果は有名である。この結果も結局は積分区間の差の比がポイントである。

確認問題4

曲線 $C_1 : y=x^3-x$ を x 軸方向に $a\,(a>0)$ だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする.

(1)　2 曲線 C_1 と C_2 が共有点をもつ a の値の範囲を求めよ.

(2)　(1) のとき，2 曲線 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S を a で表せ.

(3)　面積 S の最大値は $\frac{1}{2}$ であることを示せ.

(解説)

(1) $f(x)=x^3-x$ とすると

$C_2 : g(x)=f(x-a)=(x-a)^3-(x-a)$

2 曲線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は

$$x^3-x=(x-a)^3-(x-a)$$

$$3ax^2-3a^2x+a^3-a=0$$

$$\therefore 3x^2-3ax+a^2-1=0 \cdots ①$$

これが実数解をもてばよいから，判別式を D として，$D \geqq 0$ より

$$D=9a^2-4\cdot 3(a^2-1)=12-3a^2 \geqq 0 \qquad \therefore 0<a \leqq 2$$

(2) このとき，①の実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$S=\int_\alpha^\beta \{(x-a)^3-(x-a)-(x^3-x)\}dx$$

$$=-3a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{12-3a^2}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}\,a}{18}(\sqrt{4-a^2})^3$$

(3) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{a^6(4-a^2)}$

$t=a^2$ とおくと，$0<t\leqq 4$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{t^3(4-t)}$

$h(t)=t^3(4-t)\,(0<t\leqq 4)$ とおく

$h'(t)=3t^2(4-t)-t^3=t^2\{3(4-t)-t\}=4t^2(3-t)$ より

$h(t)$ は $t=3$ で最大

このとき，S も最大で

最大値 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\cdot 3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$

確認問題5

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2$ として，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点で接する直線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と (2) で求めた直線とで囲まれる部分の面積を求めよ。

解説

(1) $f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$ のとき，$x=-2,\ 0,\ \dfrac{1}{2}$

増減表は下図

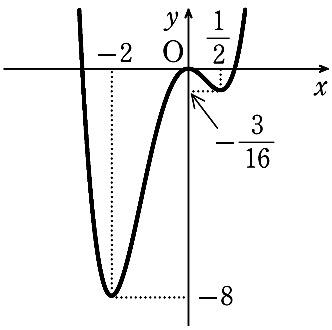
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-8	↗	0	↘	$-\frac{3}{16}$	↗

$x=-2$ のとき極小　極小値 -8

$x=0$　のとき極大　極大値 0

$x=\dfrac{1}{2}$　のとき極小　極小値 $-\dfrac{3}{16}$

グラフは右図



(2) $g(x)=ax+b$ とすると

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 点で接するとき

$$f(x)-g(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$$

と変形できるから

$$x^4+2x^3-2x^2-ax-b$$

$$=x^4-2(x_1+x_2)x^3+(x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2)x^2-2x_1x_2(x_1+x_2)x+(x_1x_2)^2$$

これが任意の x で成り立つとき

$$-2(x_1+x_2)=2 \cdots ①$$

$$x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2=-2 \cdots ②$$

$$-2x_1x_2(x_1+x_2)=-a \cdots ③$$

$$(x_1x_2)^2=-b \cdots ④$$

①より， $x_1+x_2=-1 \cdots ⑤$

②より， $(x_1+x_2)^2+2x_1x_2=-2 \quad x_1x_2=-\dfrac{3}{2} \cdots ⑥$

③，④より， $a=3$，$b=-\dfrac{9}{4}$

よって，求める直線の方程式は

$$y=3x-\frac{9}{4}$$

(3) ⑤，⑥より，x_1，x_2 は 2 次方程式 $t^2+t-\dfrac{3}{2}=0$ の解であるから

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{7}}{2},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$$

よって

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx$$

$$=\frac{1}{30}(x_2-x_1)^5=\frac{1}{30}(\sqrt{7})^5=\frac{49\sqrt{7}}{30}$$