1.3　円(1)

(1) **円の方程式**

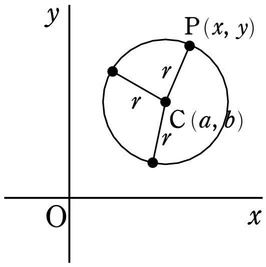
中心が C，半径が r の円は， CP$=r$ を満たす点 P 全体の集合である。

座標平面上で，中心 C の座標を (a, b)，
点 P の座標を (x, y) として，
条件 CP$=r$ を座標を用いて表すと

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

$\therefore (x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

よって，次のことが成り立ちます。



円の方程式
点 (a, b) を中心とし，半径が r の円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

特に，原点 O を中心とし，半径が r の円の方程式は

$x^2+y^2=r^2$

この円の方程式を円の方程式の**標準形**といいます

例1

(1) 2 点 A$(-2,\ -1)$ と B$(0,\ 1)$ について，線分 AB を 3：1 に外分する点を中心とし，点 B を通る円の方程式を求めよ。

(2) xy 平面上に 2 点 A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 6)$ がある。このとき，2 点 A，B を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(3) 円 C は y 軸に接し点 $(3,\ 1)$，$(6,\ 4)$ を通る。円 C の中心は第 1 象限にある。このとき円 C の中心の座標を求めよ。

(4) 中心の座標が $(1,\ 1)$ で，直線 ℓ ：$2x-y-11=0$ に接する円 C の半径を求めよ。また，C と ℓ の接点の x 座標を求めよ。

(5) xy 平面において，点 $(2,\ 1)$ を通り x 軸と y 軸に接する円の半径を求めよ。

(6) 中心が直線 $y=2x+1$ 上にあり，かつ x 軸に接し，点 $(-2,\ 3)$ を通る円の半径を求めよ。

解説

(1) 中心は線分 AB を 3：1 に外分する点より

$$\left(\frac{-1\cdot(-2)+3\cdot0}{3-1},\ \frac{-1\cdot(-1)+3\cdot1}{3-1}\right)=(1,\ 2)$$

半径は点 B と点 (1，2) の距離より

$$\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=2$$

(2) 中心は線分 AB の中点より

$$\left(\frac{2+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)=(1,\ 3)$$

半径は点 A と点 (1，3) の距離より

$$\sqrt{(2-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2=10$$

(3) 円 C の 中心の座標を $(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ とおくと

円 C は y 軸に接するから，求める円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

とおける

円 C は点 (3，1)，(6，4) を通るから

$$(3-a)^2+(1-b)^2=a^2 \quad \therefore 6a=b^2-2b+10 \ \cdots①,$$

$$(6-a)^2+(4-b)^2=a^2 \quad \therefore 12a=b^2-8b+52 \ \cdots②$$

①，②より

$$2(b^2-2b+10)=b^2-8b+52$$

$$b^2+4b-32=0$$

$$(b+8)(b-4)=0$$

$b>0$ より， $b=4$ $\therefore a=3$

よって，求める中心の座標は (3，4)

(4) 円の半径は中心 (1，1) と接線 ℓ ：$2x-y-11=0$ の距離に等しいから

$$\frac{|2\cdot1-1-11|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

C と ℓ の接点は， ℓ と中心 (1, 1) を通り ℓ に垂直な直線 $x+2y-3=0$ の交点より， (5, −1)

よって，交点の x 座標は 5

(5) x 軸と y 軸に接し，点 (2，1) を通るから円の中心は第 1 象限にある
半径を r とすると，求める円の方程式は

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

とおける
これが点 (2，1) を通るから

$$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$$

$$r^2-6r+5=0 \qquad \therefore r=1,\ 5$$

よって，求める円の半径は 1，5
(6) 中心が直線 $y=2x+1$ 上にあるから
中心の座標は $(p,\ 2p+1)$ とおける。
円は x 軸に接するから，円の半径は $|2p+1|$ より
求める円の方程式は

$$(x-p)^2+\{y-(2p+1)\}^2=(2p+1)^2$$

とおける
これが点 $(-2,\ 3)$ を通るから

$$(-2-p)^2+\{3-(2p+1)\}^2=(2p+1)^2$$

$$p^2-8p+7=0$$

$$(p-1)(p-7)=0 \qquad \therefore p=1,\ 7$$

よって，求める円の半径は 3，15

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を変形すると次のようになります。

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

一般に，円の方程式は定数 l, m, n を用いて

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

と表されます。この円の方程式を円の方程式の**一般形**をいいます。

例2
(1) 方程式 $x^2+y^2-2x+6y-10=0$ はどのような図形を表すか。
(2) k を実数とする。方程式 $x^2+y^2+2x-4y+k=0$ が円を表すような k の値を範囲は ア $\boxed{}$ であり，このとき，円の中心の座標は イ $\boxed{}$ である。

解説

(1) $x^2+y^2-2x+6y-10=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2=20$

よって，与えられた方程式は中心 (1，−3)，半径 $2\sqrt{5}$ の円を表す

(2) $x^2+y^2+2x-4y+k=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=5-k$

この方程式が円を表すとき

$5-k>0$　$\therefore$ ア$k<5$

このとき，円の中心の座標は イ(−1，2)

一般に， $x^2+y^2+lx+my+n=0$ は $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ に形に変形できて，

$k>0$ ならば，中心が点 (a, b)，半径 $\sqrt{k}$ の円

$k=0$ ならば，点 (a, b)

を表し，

$k<0$ ならば，表す図形はない

となります。

例3

3 点 A(1, 1)，B(3, 1)，C(5, −3) を頂点とする三角形の外接円の方程式は

$$x^2+y^2-{}^{\text{ア}}\boxed{}\,x+{}^{\text{イ}}\boxed{}\,y-{}^{\text{ウ}}\boxed{}=0$$

で，三角形 ABC の外心の座標は エ$\boxed{}$ である。

解説

求める外接円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおくと

この円が 3 点 A(1，1)，B(3，1)，C(5，−3) を通るから

$l+m+n+2=0$，$3l+m+n+10=0$，$5l-3m+n+34=0$

$\therefore l=-4$，$m=4$，$n=-2$

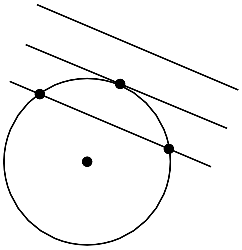
よって，外接円の方程式は

$x^2+y^2-{}^{\text{ア}}4x+{}^{\text{イ}}4y-{}^{\text{ウ}}2=0$

$(x-2)^2+(y+2)^2=10$

よって，外心の座標は エ(2，−2)

(2) 円と直線



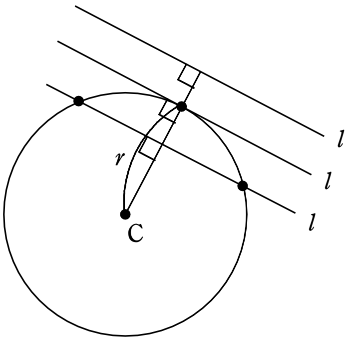
円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ と直線の方程式 $lx+my+n=0$ から y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とすると，この2次方程式の実数解の個数と，円と直線の共有点の個数は一致する。

よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると，円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $lx+my+n=0$ の位置関係は次のようになります。

円と直線の位置関係 1
円の方程式と直線の方程式から y を消去して x の 2次方程式が得られるとき，その判別式を D とすると

$D>0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる
$D=0 \Leftrightarrow$ 接する
$D<0 \Leftrightarrow$ 共有点をもたない

また，円と直線の位置関係について，下の図より，次のことが分かります。



円と直線の位置関係 2
半径 r の円の中心と直線 l の距離を d とするとき

$d<r \Leftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる
$d=r \Leftrightarrow$ 接する
$d>r \Leftrightarrow$ 共有点をもたない

例4

(1)　円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+1$ の共有点は2つあり，その x 座標はそれぞれ ${}^{ア}\boxed{}$ と ${}^{イ}\boxed{}$ である。

ただし，${}^{ア}\boxed{}<{}^{イ}\boxed{}$ とする。

(2)　a を実数とするとき，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+a$ が共有点をもつような a の値の範囲は ${}^{ウ}\boxed{}$ である。

(3)　点Pが円 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，点Pと直線 $y=-\frac{1}{2}x+2$ との距離が最小となる点Pの座標は $\left({}^{エ}\boxed{},\ {}^{オ}\boxed{}\right)$ であり，そのときの距離は $\dfrac{{}^{カ}\boxed{}}{5}$ である。

解説

(1) $y=-\frac{1}{2}x+1$ を $x^2+y^2=1$ に代入して

$$x^2+\left(-\frac{1}{2}x+1\right)^2=1$$

$$\frac{5}{4}x^2-x=0$$

$$x(5x-4)=0 \quad \therefore\ x={}^{ア}0,\ {}^{イ}\frac{4}{5}$$

(2) 原点O(0, 0)と直線 $x+2y-2a=0$ の距離を d_1 とすると

$$d_1=\frac{|0+2\times0-2a|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{5}}$$

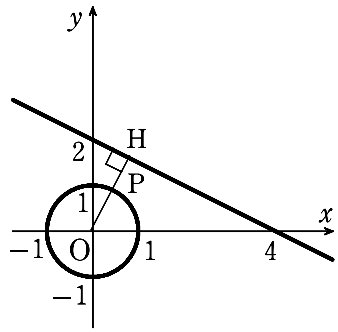
円と直線が共有点をもつとき

$$d_1\leqq1$$

$$\frac{|2a|}{\sqrt{5}}\leqq1$$

$$|a|\leqq\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \therefore\ {}^{ウ}-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(3) 原点 O から直線 $x+2y-4=0$ に垂線を下ろし，垂線の足を H とすると



$$\mathrm{OH}=\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

求める点 P は，円 $x^2+y^2=1$ と線分 OH の交点である。

直線 OH は $y=2x$ であるから，P は

$y=2x$ と $x^2+y^2=1$ の交点より

$$x^2+(2x)^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{5} \qquad \therefore\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって，点 P は $\left({}^{\text{エ}}\frac{1}{\sqrt{5}},\ {}^{\text{オ}}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

また， $\mathrm{PH}=\mathrm{OH}-\mathrm{OP}=\frac{4\sqrt{5}}{5}-1={}^{\text{カ}}\frac{4\sqrt{5}-5}{5}$

例5

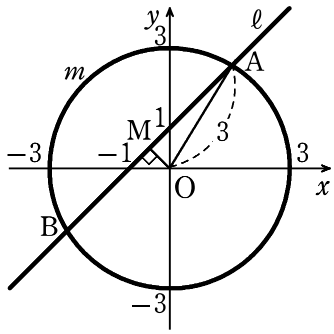
xy 平面において，直線 $y=x+1$ を ℓ ，円 $x^2+y^2=9$ を m とする。

(1)　原点 O から ℓ へ垂線 OM を下ろす。このとき，O と M との距離を求めよ。

(2)　m と ℓ との交点を A，B とするとき，弦 AB の長さを求めよ。

(解説)

(1) OM は原点と直線 $x-y+1=0$ との距離より



$$\mathrm{OM}=\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}$

$$=\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

よって

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\times\sqrt{\frac{17}{2}}=\sqrt{34}$$

例6

a を実数とする。円 $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ と直線 $y=ax+1$ が異なる 2 点 A，Bで交わっている。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　弦 ABの長さが最大になるときの a の値を求めよ。

(3)　弦 ABの長さが 2 になるときの a の値を求めよ。

(解説)

(1) $x^2+y^2-4x-8y+15=0$ …①

$(x-2)^2+(y-4)^2=5$

よって，円①の中心は (2，4)，半径は $\sqrt{5}$

円 ① の中心と直線 $ax-y+1=0$ の距離を d とすると

これらが異なる 2 点で交わるとき

$d<\sqrt{5}$

$\dfrac{|2a-3|}{\sqrt{a^2+1}}<\sqrt{5}$

$|2a-3|<\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}$

$(2a-3)^2<5(a^2+1)$

$a^2+12a-4>0$　　$\therefore a<-6-2\sqrt{10}$，$-6+2\sqrt{10}<a$

(2) 弦 ABの長さが最大になるのは

直線 $y=ax+1$ が円①の中心 (2，4) を通るときであるから

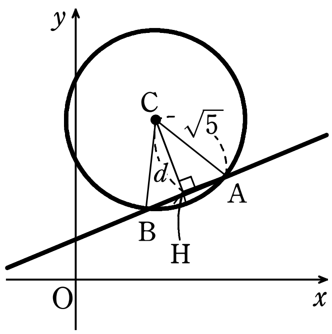
$4=2a+1$　　$\therefore a=\dfrac{3}{2}$

(3) 円 ① の中心を C とし，点 C から弦 AB に下ろした垂線の足を H とする

AB=2 となるとき，AH=1, CA=$\sqrt{5}$ から

三平方の定理より CH=2 となればよい

よって



$\dfrac{|2a-3|}{\sqrt{a^2+1}}=2$

$|2a-3|=2\sqrt{a^2+1}$

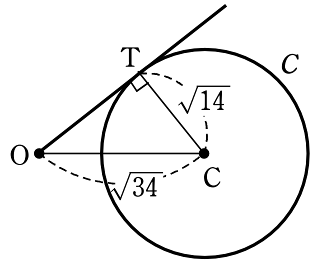
$(2a-3)^2=4(a^2+1)$

$-12a+9=4$　　$\therefore a=\dfrac{5}{12}$

例7

円 C：$x^2+y^2-10x+6y+20=0$ の半径は ア$\boxed{}$ であり，原点 O から C に引いた接線の接点を T とすると，OT= イ$\boxed{}$ である。

(解説)



$x^2+y^2-10x+6y+20=0$

$(x-5)^2+(y+3)^2=-20+25+9$

$(x-5)^2+(y+3)^2=14$

よって，円 C の半径は ア$\sqrt{14}$

円 C の中心を C とすると C(5，-3)

よって

$$\mathrm{OC}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$$

$$\mathrm{OT}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{CT}^2}=\sqrt{34-14}=\sqrt{20}={}^{イ}2\sqrt{5}$$

例8

原点を中心とする半径 1 の円 C と直線 ℓ：$y=mx+2$ がある。C と ℓ が共有点をもたない条件は m を用いて ア$\boxed{}$ と表される。このとき，C 上に動点 P，ℓ 上に動点 Q をとったとき，距離 PQ の最小値を m を用いて表すと イ$\boxed{}$ である。

(解説)

円 C の中心 O(0，0) と直線 ℓ との距離を d とする

C と ℓ が共有点をもたない条件は

$$d>1$$

$$\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}>1$$

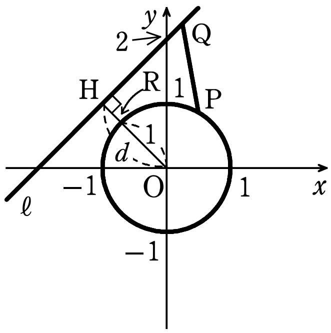
$$\sqrt{m^2+1}<2$$

$$m^2+1<4$$

$$m^2<3 \quad \therefore {}^{ア}-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

中心 O (0, 0) から ℓ に下ろした垂線を OH とし，OH と円 C の交点を R とする
距離 PQ が最小となるのは
P が R，Q が H に一致するときで
その最小値は

$$\mathrm{RH}=\mathrm{OH}-\mathrm{OR}=d-1={}^{イ}\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}-1$$



確認問題1

点 $(0,\ k)$ を通る傾き 1 の直線が，中心 $(0,\ 1)$，半径 1 の円 C と異なる 2 点 P，Q で交わるとき，実数 k の値の範囲を求めよ。さらに，線分 PQ が円 C に内接する正三角形の 1 辺となるとき，実数 k の値を求めよ。

解説

点 $(0,\ k)$ を通る傾き 1 の直線の方程式は

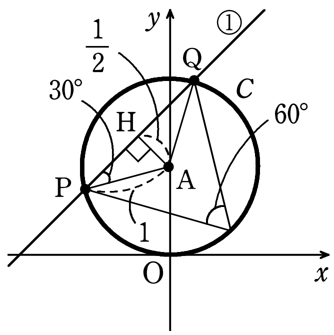
$$y=x+k \qquad \therefore\ x-y+k=0\ \cdots ①$$

直線①が円 C と異なる 2 点で交わるとき

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}<1$$

$$|k-1|<\sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}<k-1<\sqrt{2} \qquad \therefore\ 1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$$



円 C の中心 $(0,\ 1)$ を A とし，
点 A から直線 PQ に垂線 AH を下ろす
線分 PQ が円 C に内接する正三角形の 1 辺となるとき，$\angle \mathrm{PAH}=60°$ より

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AP}=\frac{1}{2}$$

よって

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$k-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \therefore\ k=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

確認問題2

xy 平面内に円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と直線 $y=mx$ $(m>1)$ がある。円の中心を C とし，円とこの直線の交点を原点から近い順に A，B とする。$\triangle$ABC の面積を S とする。

(1) S の最大値とそのときの $\angle$ACB の大きさを求めよ。

(2) $m>1$ の場合に，線分 AB の長さを m を用いて表せ。

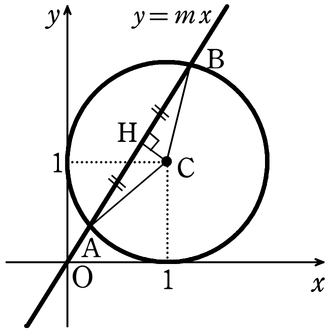
(3) S が最大値をとるときの m の値を求めよ。

解説

(1) $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{1}{2}\sin\angle\mathrm{ACB}$

S は $\sin\angle\mathrm{ACB}=1$ すなわち $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$のとき最大で

最大値 $\dfrac{1}{2}$



(2) $y=mx$ から　　$mx-y=0$

C から AB に下ろした垂線を CH とすると

$$\mathrm{CH}=\frac{|m\cdot1-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2=1^2-\frac{(m-1)^2}{m^2+1}$$

$$=1-\frac{m^2-2m+1}{m^2+1}=\frac{2m}{m^2+1}$$

$\mathrm{AH}>0$ より，$\mathrm{AH}=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+1}}$

$\mathrm{AB}=2\mathrm{AH}$ より，$\mathrm{AB}=2\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+1}}$

(3) (1) より，S が最大値をとるとき，

$\triangle$ABC は $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=1$ の直角二等辺三角形になるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ より

$$2\sqrt{\frac{2m}{m^2+1}}=\sqrt{2}$$

$$\frac{8m}{m^2+1}=2$$

$$m^2-4m+1=0 \quad \therefore m=2\pm\sqrt{3}$$

$m>1$ より，$m=2+\sqrt{3}$

確認問題3

円 $x^2+y^2=1$ を直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ に関して対称移動して得られる円が直線 $y=\dfrac{4}{3}x-1$ に接するように k の値を定めよ．

(解説)

$x^2+y^2=1$

中心O$(0, 0)$，半径 1

対称移動して得られた円の中心を A(a, b) とすると

A は O と l:$y=\dfrac{1}{2}x+k$ ($k \neq 0$) に関して対称な点である

($k=0$ のとき，題意を満たさない)

O, A の中点は l 上にあるから

$$\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}+k \quad \therefore 2b=a+4k \cdots ①$$

また，直線 OA と l は直交するから

$$\frac{b}{a}=-2 \quad \therefore b=-2a \cdots ②$$

①，②より

$$a=-\frac{4}{5}k, b=\frac{8}{5}k \quad \therefore \mathrm{A}\left(-\frac{4}{5}k, \frac{8}{5}k\right)$$

A を中心とし半径 1 の円が， $y=\dfrac{4}{3}x-1$，すなわち $4x-3y-3=0$ に接するとき

$$\frac{\left|-\frac{16}{5}k-\frac{24}{5}k-3\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$$

$$|8k+3|=5$$

$$8k+3=\pm 5 \quad \therefore k=\frac{1}{4}, -1$$